Занятие 12. Оптимальная нелинейная фильтрация

Задача фильтрации называется нелинейной, если сообщение описывается нелинейным дифференциальным (разностным) уравнением, и/или нелинейно входит в наблюдения *y(t)*

Постановка задачи (в дискретном времени)

Фильтруемый процесс:

$$\lambda_k = f_{k-1}\left(\lambda_{k-1}\right) + g_{k-1}\left(\lambda_{k-1}\right)\xi_{k-1}, \quad \lambda\left(t_0\right) = \lambda_0,$$

$$\xi_{k-1} \text{ - ДБГШ: } M\left[\xi_k \xi_m^{\text{т}}\right] = D_\xi \delta_{km}$$

$$f_k\left(x_k\right), \quad g_k\left(x_k\right) - \text{ известные функции}$$

Наблюдения

$$y_k = S_k\left(\lambda_k\right) + n_k,$$

n_k – ДБГШ с дисперсией σ_n^2

$S_k\left(\lambda_k\right)$ – сигнальная функция (известная).

Решение выводится из уравнения Стратоновича:

$$p\left(\lambda_k \middle| Y_0^k\right) = cp\left(y_k \middle| \lambda_k\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} p\left(\lambda_{k-1} \middle| Y_0^{k-1}\right) p\left(\lambda_k \middle| \lambda_{k-1}\right) d\lambda_{k-1}, \quad p\left(\lambda_0 \middle| Y_0^0\right) = \mathbb{N}\left(m_\lambda, \sigma_\lambda\right)$$

Задача нелинейной фильтрации в общем виде не решается. АПВ не является гауссовской. Уравнение Стратоновича решают приближённо. Практически, наибольшее распространение получило гауссовское приближение, при котором АПВ полагается гауссовской.

Решение задачи нелинейной фильтрации

Идея: будем приближённо считать АПВ гауссовской:

$$\boxed{p\left(\lambda_{k-1}\middle|Y_0^{k-1}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\lambda,k-1}}}\exp\left(-\frac{\left(\lambda_{k-1}-\hat{\lambda}_{k-1}\right)^2}{2D_{\lambda,k-1}}\right)}$$

Одношаговая функция правдоподобия:

$$p\left(y_k\middle|\lambda_k\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\exp\left\{-\frac{\left(y_k-S_k\left(\lambda_k\right)\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

Переходная плотность вероятности:

$$p\left(\lambda_k\middle|\lambda_{k-1}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_g^2\left(\lambda_{k-1}\right)}}\exp\left\{-\frac{\left(\lambda_k-f_{k-1}\left(\lambda_{k-1}\right)\right)^2}{2\sigma_g^2\left(\lambda_{k-1}\right)}\right\},\quad \sigma_g^2\left(\lambda_{k-1}\right)=g_{k-1}^2\left(\lambda_{k-1}\right)\sigma_\xi^2$$

Решение задачи нелинейной фильтрации

Подставим выражения для всех ПВ в уравнение Стратоновича

$$\int_{-\infty}^{\infty} p\left(\lambda_{k-1} \middle| Y_0^{k-1}\right) p\left(\lambda_k \middle| \lambda_{k-1}\right) d\lambda_{k-1} = p\left(\lambda_k \middle| Y_0^{k-1}\right) =$$

$$= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_g\left(\lambda_{k-1}\right)} \exp\left\{ -\frac{\left(\lambda_k - f_{k-1}\left(\lambda_{k-1}\right)\right)^2}{2\sigma_g^2\left(\lambda_{k-1}\right)} \right\} \exp\left(-\frac{\left(\lambda_{k-1} - \hat{\lambda}_{k-1}\right)^2}{2D_{\lambda,k-1}} \right) d\lambda_{k-1}$$

Вот из-за этого интеграл не берется.

Найдём его приближённо, разложив функции *f* и *g* в ряд в точке $\hat{\lambda}_{k-1}$ и взяв 2 первых члена ряда.

Линеаризация динамической модели процесса

$$f_{k-1}\left(\lambda_{k-1}\right) \approx f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right) + \frac{\partial f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)}{\partial \lambda_{k-1}}\left(\lambda_{k-1} - \hat{\lambda}_{k-1}\right),$$

$$g_{k-1}\left(\lambda_{k-1}\right) \approx g_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right) + \frac{\partial g_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)}{\partial \lambda_{k-1}}\left(\lambda_{k-1} - \hat{\lambda}_{k-1}\right),$$

$$\sigma_g^2\left(\lambda_{k-1}\right) = g_{k-1}^2\left(\lambda_{k-1}\right)\sigma_\xi^2 \approx g_{k-1}^2\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\sigma_\xi^2$$

Подставляем это в выражение для ПВ экстраполированных значений оценки процесса:

$$p\left(\lambda_k \middle| Y_0^{k-1}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\lambda_{k-1} \middle| Y_0^{k-1}\right) p\left(\lambda_k \middle| \lambda_{k-1}\right) d\lambda_{k-1} =$$

$$= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_g\left(\lambda_{k-1}\right)} \exp\left\{-\frac{\left(\lambda_k - f_{k-1}\left(\lambda_{k-1}\right)\right)^2}{2\sigma_g^2\left(\lambda_{k-1}\right)}\right\} \exp\left(-\frac{\left(\lambda_{k-1} - \hat{\lambda}_{k-1}\right)^2}{2D_{\lambda,k-1}}\right) d\lambda_{k-1}$$

Решение задачи нелинейной фильтрации

После подстановки и взятия интеграла получаем:

$$p\left(\lambda_k \middle| Y_0^{k-1}\right) \approx c_2 \exp\left\{-\frac{\left(\lambda_k - f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\right)^2}{2\left(g_{k-1}^2\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\sigma_\xi^2 + D_{\lambda,k-1}F_{k-1}^2\right)}\right\}, \text{ где } F_{k-1} = \frac{\partial f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)}{\partial \lambda_{k-1}}$$

Подставляем это в уравнение Стратоновича:

$$p\left(\lambda_k \middle| Y_0^{k}\right) = c\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left\{-\frac{\left(y_k - S_k\left(\lambda_k\right)\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \cdot c_2 \exp\left\{-\frac{\left(\lambda_k - f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\right)^2}{2\left(g_{k-1}^2\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\sigma_\xi^2 + D_{\lambda,k-1}F_{k-1}^2\right)}\right\} =$$

$$= c_3 \exp\left\{-\frac{\left(\lambda_k - f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\right)^2}{2\left(g_{k-1}^2\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\sigma_\xi^2 + D_{\lambda,k-1}F_{k-1}^2\right)} - \frac{\left(y_k - S_k\left(\lambda_k\right)\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

!!! Не даёт представить АПВ в виде:

$$p\left(\lambda_k \middle| Y_0^{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\lambda,k}}} \exp\left(-\frac{\left(\lambda_k - \hat{\lambda}_k\right)^2}{2D_{\lambda,k}}\right) = c_4 \exp\left\{-\frac{1}{D_{\lambda,k}}\frac{\lambda_k^2}{2} + \hat{\lambda}_k \frac{\lambda_k}{D_{\lambda,k}}\right\}$$

Решение задачи нелинейной фильтрации

Разложим функцию S в ряд в точке экстраполированной оценки $f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)$ (чтобы получилась скобка $\left(\lambda_k - f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\right)$) и возьмём 2 первых члена ряда:

$$\boxed{S_k\left(\lambda_k\right) \approx S_k\left(f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\right) + \frac{\partial S_k\left(f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\right)}{\partial \lambda_k}\left(\lambda_k - f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\right)}$$

Отсюда:

$$p\left(\lambda_k \middle| Y_0^k\right) = c\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\exp\left\{-\frac{\left(y_k - S_k\left(\lambda_k\right)\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}\cdot c_2\exp\left\{-\frac{\left(\lambda_k - f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\right)^2}{2\left(g_{k-1}^2\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\sigma_\xi^2 + D_{\lambda,k-1}F_{k-1}^2\right)}\right\} =$$

$$= c_3\exp\left\{-\frac{\left(\lambda_k - f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\right)^2}{2\left(g_{k-1}^2\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\sigma_\xi^2 + D_{\lambda,k-1}F_{k-1}^2\right)} - \frac{1}{2\sigma_n^2}\left(y_k - S_k\left(f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\right) - \frac{\partial S_k\left(f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\right)}{\partial \lambda_k}\left(\lambda_k - f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\right)\right)^2\right\}$$

Решение задачи нелинейной фильтрации

Найдём коэффиценты a и b при λ_k и λ_k^2

$$p\left(\lambda_k \middle| Y_0^k\right) = c_4 \exp\left\{b\lambda_k^2 + a\lambda_k\right\},$$

$$\left(a = \frac{\hat{\lambda}_k}{D_{\lambda,k}}, b = -\frac{1}{2D_{\lambda,k}} \quad \Rightarrow \quad D_{\lambda,k} = -\frac{1}{2b}, \quad \hat{\lambda}_k = -\frac{a}{2b}\right)$$

Отсюда

$$\hat{\lambda}_k = f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right) + \frac{D_{\lambda,k}}{\sigma_n^2}\left(\frac{\partial S_k\left(f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\right)}{\partial \lambda_k}\right)\left(y_k - S_k\left(f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\right)\right),$$

$$\frac{1}{D_{\lambda,k}} = \left[\left(\frac{\partial f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)}{\partial \lambda_{k-1}}\right)^2 D_{\lambda,k-1} + g_{k-1}^2\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\sigma_\xi^2\right]^{-1} + \frac{1}{\sigma_n^2}\left(\frac{\partial S_k\left(f_{k-1}\left(\hat{\lambda}_{k-1}\right)\right)}{\partial \lambda_k}\right)^2$$

Нелинейная фильтрация многомерных МП при векторных наблюдениях*

Постановка задачи (в дискретном времени)

Фильтруемый процесс:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}\left(\mathbf{x}_{k-1}\right) + \mathbf{g}_{k-1}\left(\mathbf{x}_{k-1}\right)\xi_{k-1}, \quad \mathbf{x}\left(t_0\right) = \mathbf{x}_0,$$

ξ_{k-1} - векторный ДБГШ: $M\left[\xi_k \xi_m^{\mathrm{т}}\right] = \mathbf{D}_\xi \delta_{km}$

$\mathbf{f}_k\left(\mathbf{x}_k\right), \quad \mathbf{g}_k\left(\mathbf{x}_k\right) -$ известные векторные функции

Наблюдения:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{S}_k\left(\mathbf{c}\mathbf{x}_k\right) + \mathbf{n}_k,$$

$\mathbf{n}_k -$ векторный ДБГШ: $M\left[\mathbf{n}_k \mathbf{n}_m^{\mathrm{т}}\right] = \mathbf{D}_n \delta_{km}$

$\mathbf{S}_k\left(\mathbf{c}\mathbf{x}_k\right) -$ сигнальная функция (известная).

$\mathbf{c} -$ определяет какие компоненты $\mathbf{x}_k$ используются в $\mathbf{S}_k$

*Не только для джедаев

Расширенный Фильтр Калмана (РФК)*

Алгоритм фильтрации по шагам

1. $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{f}_{k-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right)$ - экстраполированная оценка

2. $\tilde{\mathbf{D}}_{\mathrm{x},k} = \dfrac{\partial \mathbf{f}_{k-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{D}_{\mathrm{x},k-1} \left(\dfrac{\partial \mathbf{f}_{k-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right)}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}} + \mathbf{g}_{k-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right) \mathbf{D}_{\xi} \mathbf{g}_{k-1}^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right)$

   - дисперсия ошибки экстраполированной оценки $\tilde{\mathbf{x}}_k$

Экстраполяция

3. $\mathbf{K}_k = \tilde{\mathbf{D}}_{\mathrm{x},k} \left(\dfrac{\partial \mathbf{S}_k\left(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k\right)}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}} \left(\left(\dfrac{\partial \mathbf{S}_k\left(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k\right)}{\partial \mathbf{x}}\right) \tilde{\mathbf{D}}_{\mathrm{x},k} \left(\dfrac{\partial \mathbf{S}_k\left(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k\right)}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}} + \mathbf{D}_n\right)^{-1}$

   - коэффициент фильтра

4. $\left(\mathbf{y}_k - \mathbf{S}_k\left(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k\right)\right)$ - невязка измерений

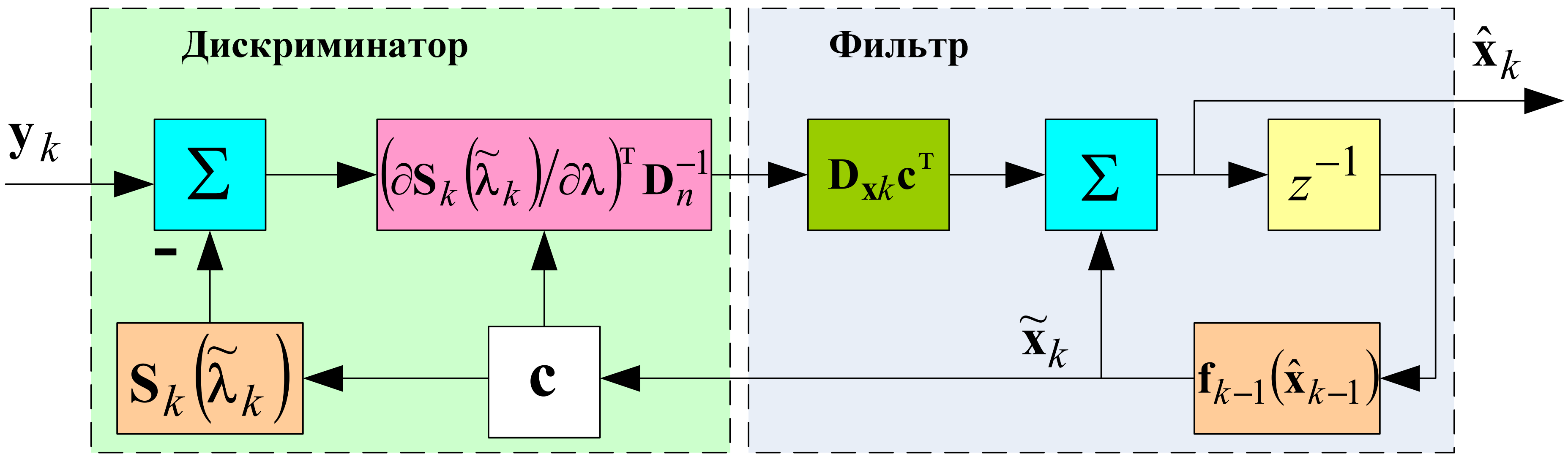
5. $\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k\left(\mathbf{y}_k - \mathbf{S}_k\left(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k\right)\right)$ - шаг оценивания

6. $\mathbf{D}_{\mathrm{x},k} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \left(\dfrac{\partial \mathbf{S}_k\left(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k\right)}{\partial \mathbf{x}}\right)\right) \tilde{\mathbf{D}}_{\mathrm{x},k}$ - дисперсия ошибки оценки $\hat{\mathbf{x}}_k$

Оценивание

*Extended Kalman Filter (EKF)

Схема дискретной оптимальной системы фильтрации (схема РФК)



$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_{\mathbf{x}k}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\mathbf{S}_k\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial\boldsymbol{\lambda}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_n^{-1}\left(\mathbf{y}_k - \mathbf{S}_k\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)\right) = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_{\mathbf{x}k}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_{\text{д}k}$$

$$\boxed{\mathbf{u}_{\text{д}k} = \left(\frac{\partial\mathbf{S}_k\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial\boldsymbol{\lambda}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_n^{-1}\left(\mathbf{y}_k - \mathbf{S}_k\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)\right)}$$

<u>Определение дискриминатора:</u>

Это производная логарифма функционала правдоподобия по параметру!!!

Нелинейная фильтрация в непрерывном времени*

Постановка задачи

Фильтруемый процесс:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\xi}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

$\boldsymbol{\xi}(t)$ - векторный БГШ с односторонней СПМ $\mathbf{S}_{\xi}$

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) -$ известные векторные функции

Наблюдения:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{cx}, t) + \mathbf{n}(t)$$

$\mathbf{n}(t) -$ векторный БГШ с односторонней СПМ $\mathbf{N}_n$

$\mathbf{S}(\mathbf{cx}, t) -$ сигнальная функция (известная).

$\mathbf{c} -$ определяет какие компоненты $\mathbf{x}$ используются в $\mathbf{S}$, $\mathbf{cx} = \boldsymbol{\lambda}$

*Только для джедаев

Расширенный Фильтр Калмана в непрерывном времени

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}},t\right) + \mathbf{D}_{\mathbf{x}}\left(t\right)\left(\frac{\partial \mathbf{S}\left(\mathbf{c}\hat{\mathbf{x}},t\right)}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}} 2\mathbf{N}_{\mathbf{n}}^{-1}\left(\mathbf{y}\left(t\right) - \mathbf{S}\left(\hat{\mathrm{x}},t\right)\right)$$

$$\frac{d\mathbf{D}_{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}},t\right)}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{D}_{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial \mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}},t\right)}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{g}\left(\hat{\mathbf{x}},t\right)}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{S}_{\xi}\left(\frac{\partial \mathbf{g}\left(\hat{\mathbf{x}},t\right)}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}} + \mathbf{D}_{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{\partial F\left(\hat{\mathbf{x}},t\right)}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{\mathbf{x}},$$

где $F\left(\mathbf{x},t\right) = 2\mathbf{S}\left(\mathbf{c}\mathbf{x},t\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{N}_{n}^{-1}\left(\mathbf{y}\left(t\right) - 0.5\mathbf{S}\left(\mathbf{c}\mathbf{x},t\right)\right)$