Лекция 14. Решение навигационной задачи методом наименьших квадратов

Болденков Е.Н.

Московский Энергетический институт

ноябрь 2015

Содержание

Основные физические принципы

Постоянство скорости распространения сигнала

Позволяет измерять расстояние путём измерения задержек.

$$R = \tau \cdot c$$

Прямолинейность распространения сигнала

Позволяет измерять расстояние между приёмником и спутником по прямой.

Псевдодальномерный метод

Требования к СРНС

- высокая пропускная способность
- простота аппаратуры потребителя

Для соблюдения данных требований используется беззапросный метод измерений.

В аппаратуре потребителя только приёмник! Передатчика нет.

Псевдодальномерный метод

Как измерять задержку?

Момент излучения сигнала определяется по шкале времени спутника (БШВ), момент приёма — по шкале времени приёмника (ШВП)

$$\tilde{\tau} = t_{\text{прм},\text{ШВП}} - t_{\text{изл},\text{БШВ}}$$

Псевдодальномерный метод

Как измерять задержку?

Момент излучения сигнала определяется по шкале времени спутника (БШВ), момент приёма — по шкале времени приёмника (ШВП)

$$\tilde{\tau} = t_{\text{прм,ШВП}} - t_{\text{изл,БШВ}}$$

Шкалы времени рассинхронизированы

$$\Delta\tau = t_{\text{БШВ}} - t_{\text{ШВП}}$$

Псевдодальномерный метод

Дальномерный метод предполагает измерения дальности

$$R = \tau \cdot c$$

Псевдодальномерный метод

Дальномерный метод предполагает измерения дальности

$$R = \tau \cdot c$$

Псевдодальномерный метод предполагает измерение псеводальности

$$\rho = \tau \cdot c + \Delta\tau \cdot c$$

Псевдодальномерный метод

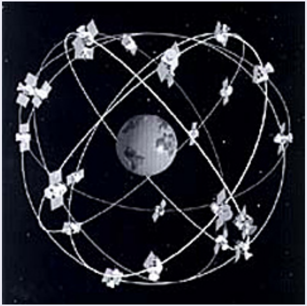
Псевдодальность можно связать с координатами потребителя и НС

$$\rho_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} + \Delta\tau \cdot c$$

Псевдодальномерный метод

Шкалы времени всех спутников непрерывно синхронизируются

$$t_{\text{ШВС}} \sim t_{\text{БШВ},i}$$



Псевдодальномерный метод

Проводя 4 измерения, можно определить все неизвестные переменные

$$\begin{cases} \rho_1 = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}+\Delta\tau\cdot c \\ \rho_2 = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}+\Delta\tau\cdot c \\ \rho_3 = \sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2}+\Delta\tau\cdot c \\ \rho_4 = \sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2+(z-z_4)^2}+\Delta\tau\cdot c \end{cases}$$

Псевдодальномерный метод

Обычно измерений больше 4

$$\begin{cases} \rho_1 &= \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}+\Delta\tau\cdot c \\ \rho_2 &= \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}+\Delta\tau\cdot c \\ & \dots \\ \rho_N &= \sqrt{(x-x_N)^2+(y-y_N)^2+(z-z_N)^2}+\Delta\tau\cdot c \end{cases}$$

Такая система не имеет решения

В этом случае используется метод наименьших квадратов

$$\sum_{i=1}^{N}\{\tilde{\rho}_i\,(x,y,z,\Delta_\tau)-\rho_i\}^2 \underset{x,y,z,\Delta\tau}{\rightarrow} \min$$

Решение методом наименьших квадратов

Математически метод наименьших квадратов записывается так:

$$\sum_{i=1}^{N} \{\tilde{\rho}_i (x, y, z, \Delta_\tau) - \rho_i\}^2 \underset{x,y,z,\Delta\tau}{\rightarrow} \min$$

Решение методом наименьших квадратов

Математически метод наименьших квадратов записывается так:

$$\sum_{i=1}^{N} \left\{ \tilde{\rho}_i \left(x, y, z, \Delta_\tau \right) - \rho_i \right\}^2 \underset{x,y,z,\Delta\tau}{\rightarrow} \min$$

Решение задачи минимизации функции

Для минимизации $f(x)$ надо найти экстремум

$$\frac{d}{dx} f(x) = 0$$

Решение методом наименьших квадратов

В рассматриваемой задаче функция и параметр - векторные

- Вектор параметров $\vec{x} = \begin{pmatrix} x & y & z & c \cdot \Delta\tau \end{pmatrix}^T$
- Вектор наблюдаемой функции

$$\mathbf{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} + \Delta\tau \cdot c \\ \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2} + \Delta\tau \cdot c \\ \dots \\ \sqrt{(x-x_N)^2 + (y-y_N)^2 + (z-z_N)^2} + \Delta\tau \cdot c \end{pmatrix}$$

Решение методом наименьших квадратов

Решить задачу непостредственно слишком сложно

На практике применяют итеративный метод решения — метод Ньютона.

$$\vec{x}^k = \vec{x}^{k-1} + \frac{d}{d\vec{x}}\mathbf{F}(\vec{x})\left(\vec{\rho} - \vec{\rho}(\vec{x})\right).$$

k — номер итерации

Решение методом наименьших квадратов

Необходимо определить производную $\frac{d}{d\vec{x}}\mathbf{F}(\vec{x})$

$$\mathbf{H} = \frac{d}{d\vec{x}}\mathbf{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\rho_1(\vec{x}) & \frac{\partial}{\partial y}\rho_1(\vec{x}) & \frac{\partial}{\partial z}\rho_1(\vec{x}) & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x}\rho_2(\vec{x}) & \frac{\partial}{\partial y}\rho_2(\vec{x}) & \frac{\partial}{\partial z}\rho_2(\vec{x}) & 1 \\ & \dots & & \\ \frac{\partial}{\partial x}\rho_N(\vec{x}) & \frac{\partial}{\partial y}\rho_N(\vec{x}) & \frac{\partial}{\partial z}\rho_N(\vec{x}) & 1 \end{pmatrix}$$

Данная матрица называется “матрица направляющих косинусов”.

Решение методом наименьших квадратов

Почему “матрица направляющих косинусов”?

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho_1(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} + \Delta\tau \cdot c$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho_1(\vec{x}) = \frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2}} = \frac{x-x_1}{R_1} = -\cos(\alpha_1)$$

Данное выражение определяет косинус угла между линией визирования и осью ох.

Решение методом наименьших квадратов

Размер матрицы направляющих косинусов - $N \times 4$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha_1) & -\cos(\beta_1) & -\cos(\gamma_1) & 1 \\ -\cos(\alpha_2) & -\cos(\beta_2) & -\cos(\gamma_2) & 1 \\ & \dots & & \\ -\cos(\alpha_N) & -\cos(\beta_N) & -\cos(\gamma_N) & 1 \end{pmatrix}$$

Алгоритм расчёта координат

Шаг 1. Задаём начальные условия

- $x^{(k)} = 0$
- $y^{(k)} = 0$
- $z^{(k)} = 0$
- $\Delta\tau^{(k)} = 0$

Начальная точка — центр Земли.
$k = 0$ — номер итерации.

Алгоритм расчёта координат

Шаг 2. Проводим измерения

- В момент взятия измерений $t_{\text{прм,ШВП}}$ из ССЗ получаем задержку дальномерного кода с неоднозначностью 1 мс.
- По навигационному сообщению вычисляем момент излучения сигнала $t_{\text{изл,БШВ}}$.
- Рассчитываем псевдодальность

$$\tilde{\tau} = t_{\text{прм,ШВП}} - t_{\text{изл,БШВ}}$$

Алгоритм расчёта координат

Шаг 3. Рассчитываем оценки псевдодальностей

$$\hat{\rho}_i^{(k-1)} = \sqrt{\left(x^{(k-1)} - x_1\right)^2 + \left(y^{(k-1)} - y_1\right)^2 + \left(z^{(k-1)} - z_1\right)^2} + \Delta\tau \cdot c$$

Ошибка оценок псевододальностей:

$$\Delta\rho_i^{(k-1)} = \rho_i^{(k-1)} - \hat{\rho}_i^{(k-1)}$$

Алгоритм расчёта координат

Шаг 4. Рассчитываем матрицу направляющих косинусов

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{x^{(k-1)}-x_1}{R_1} & \frac{y^{(k-1)}-y_1}{R_1} & \frac{z^{(k-1)}-z_1}{R_1} & 1 \\ \frac{x^{(k-1)}-x_2}{R_2} & \frac{y^{(k-1)}-y_2}{R_2} & \frac{z^{(k-1)}-z_2}{R_2} & 1 \\ & \dots & & \\ \frac{x^{(k-1)}-x_N}{R_N} & \frac{y^{(k-1)}-y_N}{R_N} & \frac{z^{(k-1)}-z_N}{R_N} & 1 \end{pmatrix}$$

$R_i = \sqrt{\left(x^{(k-1)} - x_i\right)^2 + \left(y^{(k-1)} - y_i\right)^2 + \left(z^{(k-1)} - z_i\right)^2}$ — расстояние до i-го НС.

Алгоритм расчёта координат

Шаг 5. Коррекция текущего решения

$$\vec{x}^{(k)} = \vec{x}^{(k-1)} + \mathbf{H} \cdot \vec{\Delta}\rho^{(k-1)}$$

Алгоритм расчёта координат

Шаг 6. Проверка достижения требуемой точности

Если смещение оценки на последней интерации

$$\sqrt{\left(x^{(k)} - x^{(k-1)}\right)^2 + \left(y^{(k)} - y^{(k-1)}\right)^2 + \left(z^{(k)} - z^{(k-1)}\right)^2}$$

достаточно мало, то конец цикла, иначе возврат к шагу 2.

Двухсистемное решение

Возможно решение навигационной задачи по сигналам разных навигационных систем

Проблема в том, что шкалы времени разных систем не синхронизированы.

$$t_{\text{БШВ},GPS} \neq t_{\text{БШВ,ГЛОНАСС}}$$

Двухсистемное решение

Приёмник должен оценивать смещение времени между разными системами

Уравнения для наблюдений GPS:

$$\rho_{GPS,i} = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} + \Delta\tau_{GPS} \cdot c$$

Уравнения для наблюдений ГЛОНАСС:

$$\rho_{GLN,j} = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2} + \Delta\tau_{GLN} \cdot c$$

Двухсистемное решение

Количество неизвестных увеличивается

- x, y, z — координаты
- $\Delta\tau_{GPS}$ — смещение ШВП относительно времени GPS.
- $\Delta\tau_{GLN}$ — смещение ШВП относительно времени ГЛОНАСС.

Двухсистемное решение

Количество неизвестных увеличивается

- x, y, z — координаты
- $\Delta\tau_{GPS}$ — смещение ШВП относительно времени GPS.
- $\Delta\tau_{GLN}$ — смещение ШВП относительно времени ГЛОНАСС.

Для решения нужно больше наблюдений

- 3 GPS + 2 ГЛОНАСС
- 3 ГЛОНАСС + 2 GPS
- и т.д.

Двухсистемное решение

Чем больше систем, тем больше уравнений

- 1 система — 4 наблюдения;
- 2 системы — 5 наблюдений;
- 3 системы — 6 наблюдений.

Решение — синхронизация шкал времени систем

“Любых четырёх достаточно”: Bradford Parkinson о конечной цели международной координации СРНС.

В ГЛОНАСС-М передаётся сдвиг шкал времени ГЛОНАСС-GPS

τ_{GPS} имеет точность не хуже 30 нс

Вычисление псеводальностей

Как вычисляется псевдодальность?

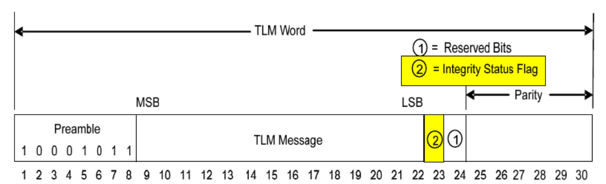
1. Из ССЗ получается оценка фазы кода на периоде 1 мс.
2. По символам данных неоднозначность разрешается на 20 мс.
3. По кадровой синхронизации неоднозначность разрешается до 6 с в GPS и 2 с в ГЛОНАСС.

Неоднозначности 6/2 с достаточно для вычисления псевдодальности. Но этого недостаточно для вычисления координат НС. Нужно полностью однозначно вычислить время излучения сигнала

Вычисление времени излучения сигнала

Рассмотрим вычисление времени излучения на примере GPS C/A

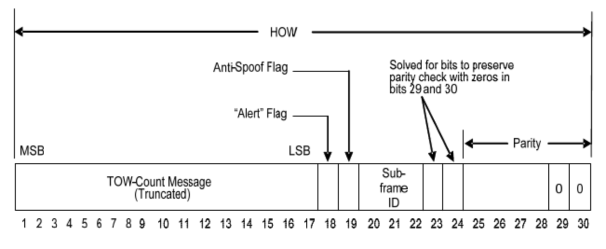
Сообщение GPS передаётся в виде кадров по 6 с



В начале каждого кадра есть преамбула, что позволяет выделить кадровую синхронизацию.

Вычисление времени излучения сигнала

В первом кадре передаётся текущее время БШВ



Всего бывает 5 кадров, во втором слове кадра есть номер кадра.

Вычисление времени излучения сигнала

Полное время излучения сигнала GPS вычисляется, как

$$t_{\text{изл},GPS} = WN \cdot 604800 + TOW + 1^{-3} \cdot N_{CA} + \tau$$

- WN — номер недели GPS;
- TOW — номер секунды в неделе GPS;
- N_{CA} — номер эпохи дальномерного кода в секунде;
- τ — задержка в пределах эпохи.

Вычисление времени излучения сигнала

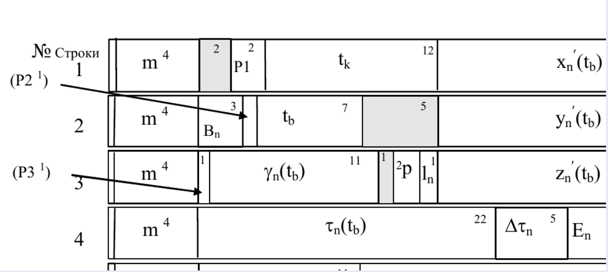
Аналогичная процедура выполняется в системе ГЛОНАСС

Сообщение сигнале ГЛОНАСС передаётся в виде строк по 2 с

Строка оканчивается фиксированной последовательностью - меткой времени

Вычисление времени излучения сигнала

В первой строке передаётся текущее время ГЛОНАСС



Длительность кадра составляет 30 с, что определяет темп передачи текущего времени

t_k — время кадра в пределах суток, 5 бит - часы, 6 бит - минуты, 1 бит - номер 30-секуного интервала

Вычисление времени излучения сигнала

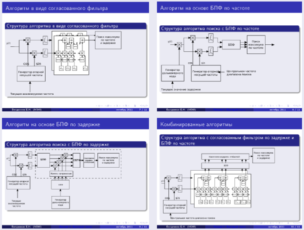
Полное время излучения сигнала ГЛОНАСС вычисляется, как

$$t_{\text{изл},Gln} = N_T \cdot 24 \cdot 3600 + t_k + 1^{-3} \cdot N_{\text{ПТ}} + \tau$$

- N_T — номер суток в пределах четырёхлетнего интервала;
- t_k — время в секундах в пределах суток;
- $N_{\text{ПТ}}$ — номер эпохи дальномерного кода в пределах секунды;
- τ — задержка сигнала в пределах эпохи.

Следующая лекция

Тема следующей лекции - фильтрационный алгоритм решения навигационной задачи



Посетите наш web-сайт

http://srns.ru