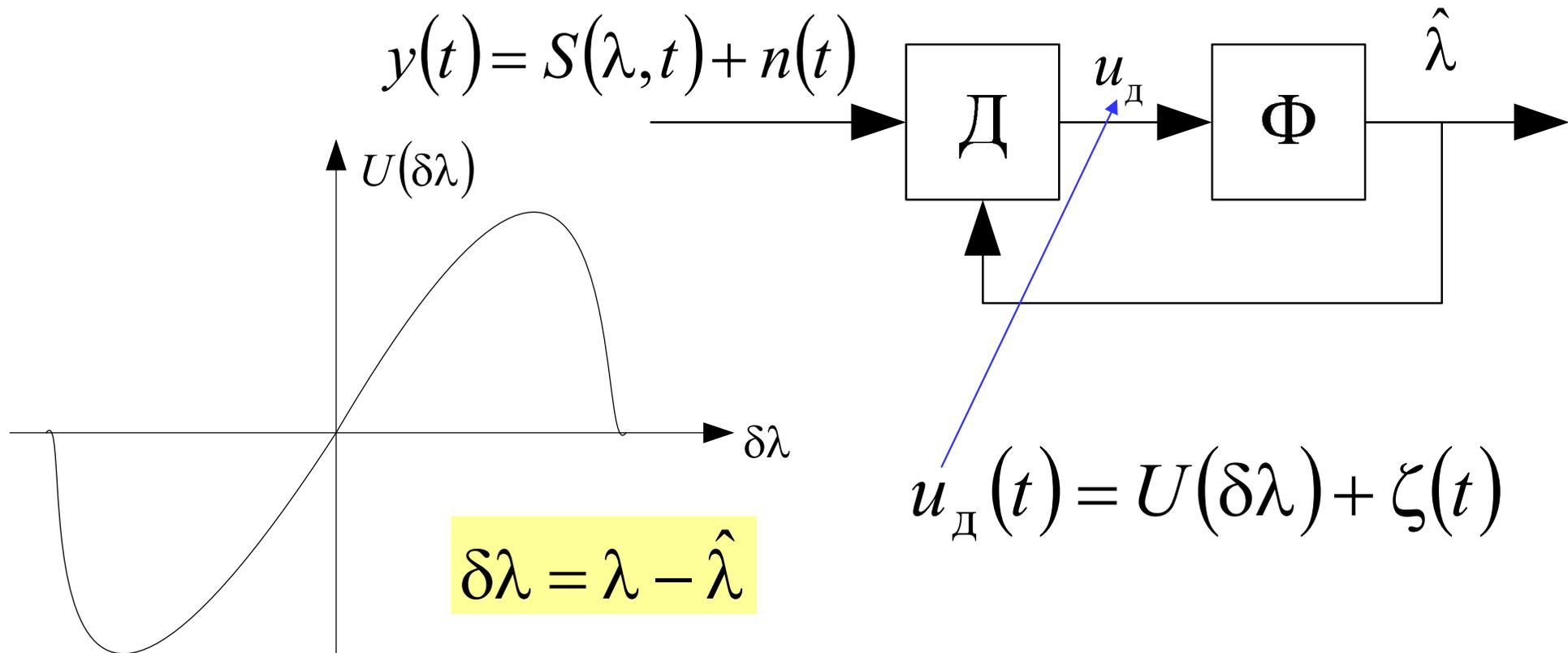


# Занятие 11. Применение теории оптимальной линейной фильтрации

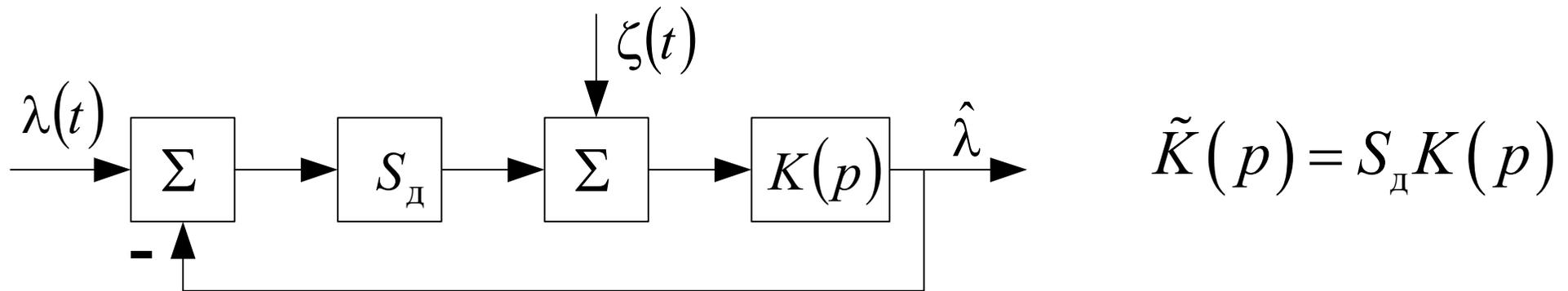
Синтез и анализ сглаживающих фильтров для следящих систем (см. п. 10.1.3).



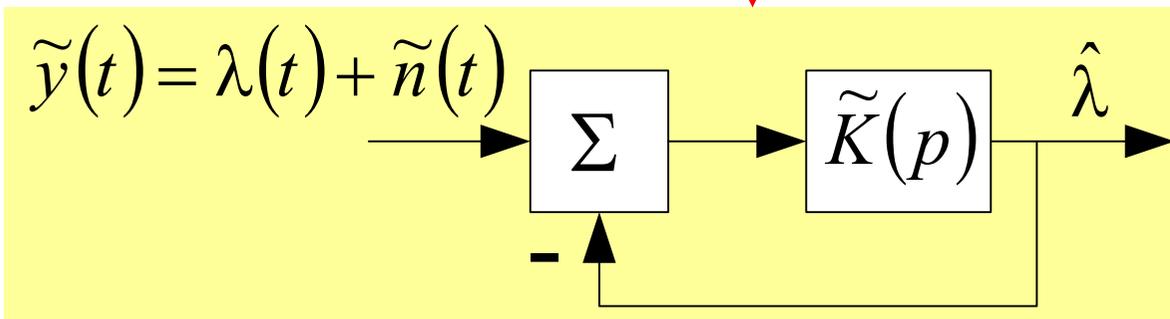
# Линеаризация следящей системы

$u_d(t) = U(\lambda - \hat{\lambda}) + \zeta(t) \approx S_d \cdot (\lambda - \hat{\lambda}) + \zeta(t)$  - при малых ошибках слежения

$S_d = \left. \frac{\partial U(\delta\lambda)}{\partial \delta\lambda} \right|_{\delta\lambda = 0}$  - крутизна дискриминационной характеристики



$\tilde{y}(t)$  – эквивалентные наблюдения



$\tilde{n}(t) = \zeta(t) / S_d$  – шум эквивалентных наблюдений

# Пример синтеза фильтра для системы ЧАП

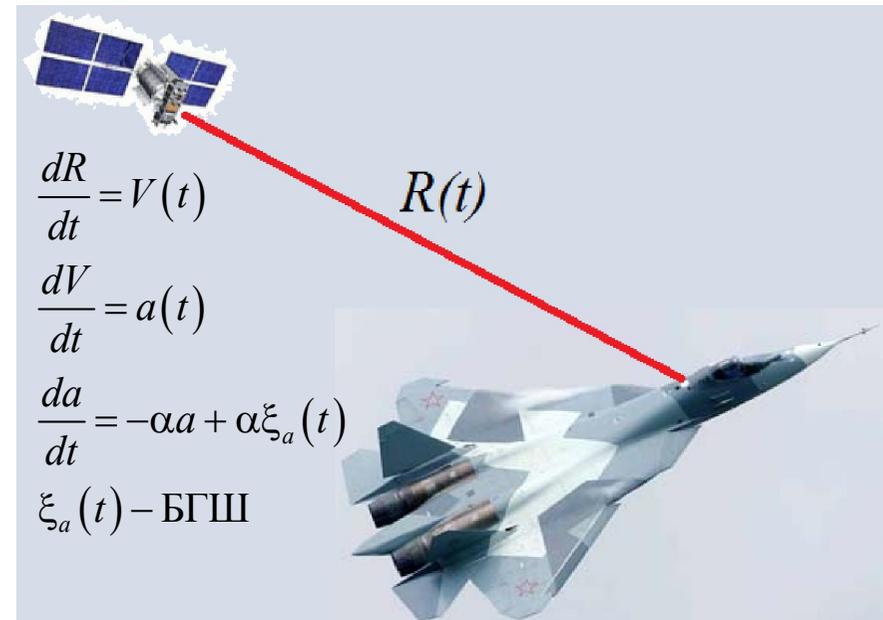
Задача: следить за доплеровской частотой сигнала, которая пропорциональна радиальной скорости.

Модель изменения доплеровской частоты:

$$\frac{d\Omega}{dt} = v(t)$$
$$\frac{dv}{dt} = -\alpha v + \alpha \xi(t)$$

$\Omega(t) = \left(\frac{\omega_0}{c}\right)V(t)$  – доплеровская частота,  $(V(t))$  – радиальная скорость,  $\omega_0$  - несущая)

$v(t) = \left(\frac{\omega_0}{c}\right)a(t)$ ,  $a(t)$  – радиальное ускорение,  $\xi(t)$  - формирующий БГШ



# Пример синтеза фильтра для системы ЧАП

Заданы:

$\alpha$  – ширина спектра флуктуаций радиального ускорения,

$\sigma_a$  – среднеквадратическое ускорение, из которого находим  $S_\xi$ :

$$S_\xi = S_{\xi a} \left( \frac{\omega_0}{c} \right)^2 = 2\sigma_a^2 \alpha \left( \frac{\omega_0}{c} \right)^2 \quad (\text{СПМ формирующего шума})$$

Эквивалентные наблюдения доплеровской частоты:

$$\tilde{y}(t) = \Omega(t) + \tilde{n}(t)$$

$\tilde{n}(t)$  - БГШ с нулевым м.о. и спектральной плотностью  $\tilde{N}_0/2$

$\tilde{N}_0$  - определяется флуктуационной характеристикой частотного дискриминатора

Введём вектор состояний:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \Omega & v \end{bmatrix}^T$$

# Приведение постановки задачи к общему виду

$$\tilde{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \tilde{n}(t), \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\xi(t),$$

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{vmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{vmatrix} 0 \\ \alpha \end{vmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{то есть:}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \Omega \\ \nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Omega \\ \nu \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \alpha \end{vmatrix} \cdot \xi(t)$$

Уравнения фильтрации в общем виде:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{F}(t)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_x(t)\mathbf{H}^T(t)2\tilde{N}_0^{-1}(y(t) - \mathbf{H}(t)\hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{D}_x(0) = \mathbf{D}_{x0}$$

$$\frac{d\mathbf{D}_x}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{D}_x + \mathbf{D}_x\mathbf{F}^T(t) + \frac{1}{2}\mathbf{G}(t)S_\xi\mathbf{G}^T(t) - \mathbf{D}_x\mathbf{H}^T(t)2\tilde{N}_0^{-1}\mathbf{H}(t)\mathbf{D}_x^T$$

# После подстановки всех матриц в общие формулы

Результирующие уравнения фильтра системы ЧАП:

Сам фильтр:

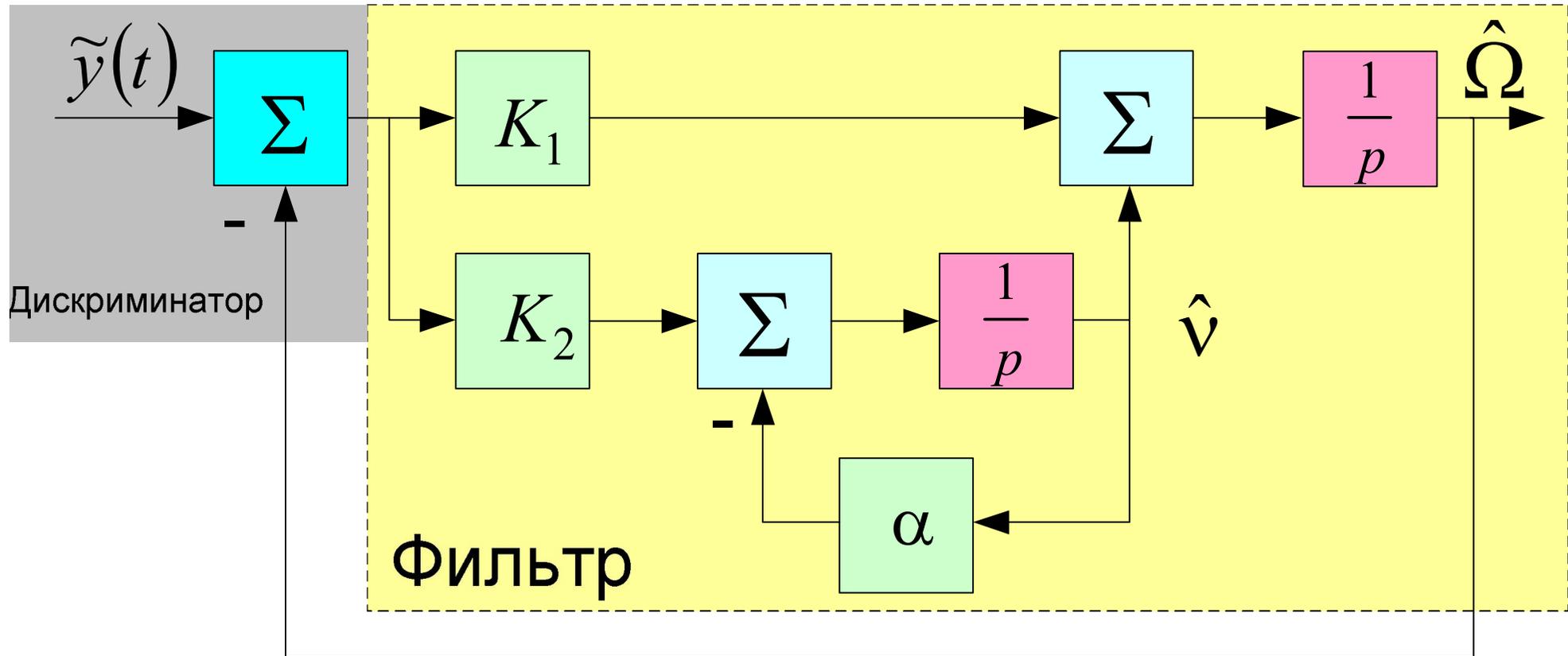
$$\frac{d\hat{\Omega}}{dt} = \hat{v} + \frac{2D_{11}}{\tilde{N}_0} (y(t) - \hat{\Omega}), \quad \frac{d\hat{v}}{dt} = -\alpha\hat{v} + \frac{2D_{12}}{\tilde{N}_0} (y(t) - \hat{\Omega})$$

Уравнения для дисперсий:

$$\mathbf{D}_x = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{vmatrix}; \quad \frac{dD_{11}}{dt} = 2D_{12} - \frac{2D_{11}^2}{\tilde{N}_0}, \quad (10.25)$$

$$\frac{dD_{12}}{dt} = D_{22} - \alpha D_{12} - \frac{2D_{11}D_{12}}{\tilde{N}_0}, \quad \frac{dD_{22}}{dt} = -2\alpha D_{22} + \frac{\alpha^2 S_\xi}{2} - \frac{2D_{12}^2}{\tilde{N}_0}$$

# Схема оптимальной ЧАП



$$K_1 = 2D_{11}/\tilde{N}_0$$
$$K_2 = 2D_{12}/\tilde{N}_0$$

- коэффициенты фильтра, определяющие полосу

# Установившийся режим

В установившемся режиме, т.е. при  $t \rightarrow \infty$

$$\mathbf{D}_x = \mathbf{const} \Rightarrow \frac{dD_{ij}}{dt} = 0$$

Следовательно, приравниваем правые части (10.25) к нулю и получаем:

$$D_{11} = \frac{\alpha \tilde{N}_0}{2} \left( \sqrt{1 + 2\sqrt{S_\xi / (\alpha^2 \tilde{N}_0)}} - 1 \right), \quad D_{12} = D_{11}^2 / \tilde{N}_0,$$

$$D_{22} = \frac{1}{2\alpha} \left( \alpha^2 S_\xi / 2 - 2D_{12}^2 / \tilde{N}_0 \right) \Rightarrow$$

$$K_1 = \alpha \left( \sqrt{1 + 2\sqrt{S_\xi / (\alpha^2 \tilde{N}_0)}} - 1 \right), \quad K_2 = K_1^2 / 2,$$

$$K_\phi(p) = \frac{1}{p} \left( K_1 + \frac{K_2}{p + \alpha} \right) \text{ - коэффициент передачи фильтра}$$

# Зачем это всё было нужно?

1. Чтобы найти дисперсию ошибки фильтрации частоты в установившемся режиме –  $D_{11}$
2. Чтобы найти полосу ЧАП:

$$\Delta F_{\text{ЧАП}} = \frac{1}{2\pi |K_{y\Omega}(0)|^2} \int_0^{\infty} |K_{y\Omega}(j\omega)|^2 d\omega$$

$$K_{y\Omega}(p) = \frac{K_{\phi}(p)}{1 + K_{\phi}(p)}$$

(С.В. Первачёв «Радиоавтоматика». Стр. 111, 107)

# Домашнее задание

## Анализ и моделирование рассмотренной системы ЧАП.

Ширина спектра флуктуаций ускорения  $\alpha=1 \text{ с}^{-1}$

Флуктуационная характеристика частотного дискриминатора определяется выражением

$$\tilde{N}_0(q_{c/n_0}) = \frac{2}{q_{c/n_0} T^2} \left( 1 + \frac{1}{2q_{c/n_0} T} \right), \quad T = 10 \text{ мс},$$

$q_{c/n_0} = 10^{0,1 \cdot (14 \dots 50 \text{ дБГц})}$  [Гц] - отношение мощности сигнала к спектральной плотности шума на входе приёмника;

$\omega_0 = 2\pi \cdot (1602 \text{ МГц})$  – несущая частота

# Домашнее задание

1. Найти аналитически и построить на графиках зависимости среднеквадратической ошибки фильтрации частоты и оптимальной полосы ЧАП от отношения с/ш:

$$\sigma_{\Omega}(q_{c/n_0}) = \sqrt{D_{11}}(q_{c/n_0}); \Delta F_{\text{ЧАП}}(q_{c/n_0}) \text{ при } \sigma_a = 10 \text{ м/с}^2 \text{ -- ???}$$

2. Найти аналитически и построить на графиках зависимости среднеквадратической ошибки фильтрации частоты и оптимальной полосы ЧАП от среднеквадратического ускорения:

$$\sigma_{\Omega}(\sigma_a) = \sqrt{D_{11}}(\sigma_a); \Delta F_{\text{ЧАП}}(\sigma_a) \text{ при } q_{c/n_0} = 10^{0,1 \cdot (30 \text{ дБГц})} \text{ -- ???}$$

\*  $\sigma_a = 1 \dots 30 \text{ м/с}^2$

\*\* при построении графиков от  $q_{c/n_0}$  по оси X откладывать значения

$$q_{c/n_0} \text{ в дБГц: } q_{c/n_0} [\text{дБГц}] = 10 \lg(q_{c/n_0} [\text{Гц}])$$

# Домашнее задание

Решить аналогичную задачу в дискретном времени:

$$\Omega_k = \Omega_{k-1} + v_{k-1}T, \quad T = 10 \text{ мс},$$

$$v_k = v_{k-1} \cdot (1 - \alpha T) + \alpha T \cdot \xi_{k-1}, \quad \sigma_\xi^2 = \frac{S_\xi}{2T},$$

$$\tilde{y}_k = \Omega_k + \tilde{n}_k, \quad \tilde{n}_k - \text{ДБГШ с дисперсией } \sigma_n^2 = \frac{\tilde{N}_0(q_{c/n_0})}{2T}$$

3. Записать уравнения оптимальной фильтрации для дискретного времени:  $\hat{\Omega}_k = \dots, \hat{v}_k = \dots$

4. Смоделировать входное воздействие и оптимальную систему ЧАП в дискретном времени при следующих параметрах:

$$q_{c/n_0} = 10^{0,1 \cdot (30 \text{ дБГц})}, \quad \sigma_a = 10 \text{ м/с}^2, \quad \mathbf{D}_0 = \begin{vmatrix} (34 \text{ рад/с})^2 & 0 \\ 0 & (340 \text{ рад/с}^2)^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \Omega_0 \\ v_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 \\ 100 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \hat{\Omega}_0 \\ \hat{v}_0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

# Домашнее задание

5. Построить график зависимости истинной доплеровской частоты от времени:  $\Omega_k(t_k)$ ,  $t = 0 \dots 1000$  с

6. Построить график зависимости среднеквадратической ошибки фильтрации частоты от времени:

$$\sqrt{D_{11}}(t_k), \quad t = 0 \dots 1 \text{ с}$$

(До установившегося режима, когда  $D_{11} \approx const$  )

7. Построить мгновенную ошибку фильтрации частоты в зависимости от времени:

$$\varepsilon_{\Omega}(t_k) = \hat{\Omega}_k - \Omega_k, \quad t = 0 \dots 10 \text{ с}$$

8. Для установившегося режима сравнить  $D_{11}$  и дисперсию ошибки, рассчитанную по графику  $\varepsilon_{\Omega}(t_k)$ , сделать вывод.