

# Адаптивная система слежения за фазой сигналов ГНСС

## Постановка задачи

На вход приемника в дискретном времени поступает реализация наблюдений сигнала, Входной сигнал меняется существенно быстрее информативных процессов. В этом случае целесообразно описывать входной сигнал в более частой шкале времени с шагом дискретизации  $T_d \ll T$ , как описано в [1], стр. 524. Для этого введем двойную шкалу времени

$$t_{k,i} = kT + (i-1)T_d, \quad (1)$$

где  $k=0,1,\dots$ - индексы моментов редкой шкалы времени (с шагом  $T$ ), в которой описаны информативные параметры;  $i = \overline{0, N-1}$  - индексы моментов частой шкалы времени (с шагом  $T_d$ ), для описания наблюдений;  $N = \frac{T}{T_d}$ .

В интересах упрощения синтеза будем полагать сигнал гармоническим (код снят благодаря работе системы слежения за задержкой). С учетом введенной двойной шкалы времени (1) опишем наблюдения входного сигнала в виде

$$y_{k,i} = A_k \cos \left\{ 2\pi f_0 t_{k,i} + \varphi_k + \omega_k i T_d + \nu_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\} + n_{k,i} \quad (2)$$

$$\mathbf{y}_k = [y_{k,0} \dots y_{k,N-1}], \quad \mathbf{Y}_0^k = [y_0 \dots y_k],$$

где  $y_{k,i}$  — наблюдения входного сигнала;  $n_{k,i}$  — дискретный белый гауссовский шум (ДБГШ) с нулевым мат. ожиданием и дисперсией  $\sigma_n^2$ ;  $A_k$  — амплитуда сигнала;  $f_0$  — несущая частота радионавигационного сигнала;  $\varphi_k$  — фаза [рад];  $\omega_k$  — частота [рад/с];  $\nu_k$  — ускорение фазы [рад/с<sup>2</sup>];  $\mathbf{y}_k$  — вектор сгруппированных наблюдений на интервале  $\overline{t_{k,0}, t_{k,N-1}}$ ;  $\mathbf{Y}_0^k$  — реализация наблюдений от начального момента времени  $t_{0,0}$  до текущего момента времени  $t_{k,N-1}$ .

На практике амплитуда сигнала неизвестна и меняется со временем. В принципе, эта проблема могла бы решаться путем включения амплитуды в вектор состояния фильтра, но, к сожалению, амплитуду нельзя описать гауссовским Марковским процессом, (она распределена по закону Райса и не принимает значений меньше нуля). Однако гауссовским Марковским процессом можно описать отношение с/ш, выраженное в дБ.

В спутниковой навигации в качестве отношения с/ш принимается  $q_{c/n_0} = P_s/N_0$  — отношение мощности сигнала  $P_s$  к односторонней спектральной плотности внутреннего шума приемника  $N_0$ . Для описания параметрической неопределенности мощности сигнала введем параметр  $q = 10 \cdot \log_{10}(q_{c/n_0})$ , имеющий размерность дБГц.

Выразим амплитуду сигнала  $A_k$  через отношение с/ш в дБГц.

$$A_k = \sqrt{4\sigma_n^2 T 10^{0.1q_k}}, \quad (3)$$

На практике уровень шума в ПРМ известен и поддерживается адаптивным квантователем, поэтому оценить амплитуду сигнала — это тоже самое, что оценить отношение с/ш в дБГц. Поэтому вместо амплитуды сигнала оцениваться будет именно отношение с/ш принимаемого навигационного сигнала, выраженное в дБГц. Логарифмическая шкала допускает возможность появления значений в отрицательной области, в случае, когда аргумент десятичного логарифма меньше единицы.

Рассмотрим задачу фильтрации фазы навигационного сигнала при априорной неопределенности мощности принимаемого сигнала и интенсивности динамики изменения фазы.

Примем модель изменения параметра  $q$  во времени в виде винеровского процесса.

$$q_k = q_{k-1} + \zeta_{k-1} T, \quad (4)$$

где  $\zeta_{k-1}$  — ДБГцШ с нулевым математическим ожиданием (МО) и известным среднеквадратическим отклонением (СКО)  $\sigma_\zeta$ .

Модель изменения фазы зададим марковским процессом третьего порядка

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \varphi_{k-1} + \omega_{k-1} T + \frac{\nu_{k-1} T^2}{2}, \\ \omega_k &= \omega_{k-1} + \nu_{k-1} T + \xi_{\omega, k-1}, \\ \nu_k &= \nu_{k-1} \cdot e^{-\beta T} + \xi_{\nu, k-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\xi_\omega$  — ДБГцШ с нулевым МО и известным СКО  $\sigma_\omega$  — формирующий шум, описывающий нестабильность частоты опорного генератора потребителя и спутника;  $\xi_\nu$  — ДБГцШ с нулевыми МО и СКО  $\sqrt{1 - e^{-2\beta T}} \sigma_{\nu, k-1}$ ;

$\beta$  [1/c] — ширина спектра флуктуаций компоненты  $v_k$ , которая полагается известной.

Представим  $\sigma_{v,k-1}$  как

$$\sigma_{v,k-1} = \frac{2\pi f_0}{c} \alpha_{k-1}, \quad (6)$$

где  $c$  — скорость света;  $\alpha_{k-1}$  — неизвестный переменный параметр интенсивности динамических флуктуаций процесса фазы, который имеет физический смысл среднеквадратического ускорения между передатчиком и приемником и выражен в  $\text{м/с}^2$ . Из-за изменений  $\alpha_{k-1}$  процесс фазы будет нестационарным.

Будем считать, что величина  $\alpha_{k-1}$  принимает дискретный набор значений  $\alpha_{k-1} = \alpha^j, j = \overline{1, M}$  из заданной области  $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ . При этом задано распределение вероятностей  $P(\alpha_{k-1}^j | \alpha_{k-2}^l)$  для переходов от значения  $\alpha_{k-2}^l$  в момент времени  $k-2$  к значению  $\alpha_{k-1}^j$  в момент времени  $k-1$ .

Воспользуемся разложением экспоненты в ряд и вычислим значения экспонент ограничившись первыми двумя членами разложения.

$$e^{-p} \approx 1 - p. \quad (7)$$

Модель изменения фазы с учетом приближения (7) и уравнения (6).

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \varphi_{k-1} + \omega_{k-1}T + \frac{v_{k-1}T^2}{2}, \\ \omega_k &= \omega_{k-1} + v_{k-1}T + \sigma_\omega, \\ v_k &= v_{k-1}(1 - \beta T) + \sqrt{2\beta T} \frac{2\pi f_0}{c} \alpha_{k-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Задача синтеза оптимальной системы фильтрации заключается в нахождении оценки информативных процессов  $q_k, \varphi_k, \omega_k, v_k$  по критерию минимума дисперсии ошибки (Байесовская оценка) с учетом неизвестного неинформативного параметра динамики фазы  $\alpha_{k-1}$ , меняющегося со временем.

### Синтез алгоритма слежения за фазой

Введем вектор

$$\mathbf{x}_k = |q_k \ \varphi_k \ \omega_k \ v_k|^T, \quad (9)$$

который будем называть вектором *информативных* параметров. Параметр  $\alpha_{k-1}$  (интенсивность динамических флуктуаций фазы) не представляет интереса, поэтому будем его называть *неинформативным* параметром.

В литературе известно общее байесовское решение задачи оптимальной адаптивной фильтрации векторного марковского процесса  $\mathbf{x}$  при наличии вектора случайных неинформативных параметров  $\boldsymbol{\alpha}$  не изменяющихся за время наблюдений, т.е.  $\boldsymbol{\alpha}_{k-1} = \boldsymbol{\alpha}_k$  (напр. [1], раздел 15.4). Решение выведено для дискретного времени при квадратичной функции потерь и минимизирует средний риск, с учетом усреднения по плотности вероятности неинформативных параметров. Представим решение данной задачи в случае скалярного случайного постоянного неинформативного параметра  $\alpha$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \int_{\alpha} \hat{\mathbf{x}}_k(\alpha) p(\alpha | \mathbf{Y}_0^k) d\alpha, \quad (10)$$

где,  $\hat{\mathbf{x}}_k(\alpha)$  — условная оптимальная оценка вектора  $\mathbf{x}$  при фиксированном значении  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k(\alpha) &= \int_{\mathbf{x}_k} \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \alpha, \mathbf{Y}_0^k) d\mathbf{x}_k, \\ p(\mathbf{x}_k | \alpha, \mathbf{Y}_0^k) &= C p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k(\alpha)) \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \alpha) p(\mathbf{x}_{k-1} | \alpha, \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\mathbf{y}_k$  - вектор наблюдений на текущем шаге;  $C$  — нормировочная константа,  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k(\alpha))$  — одношаговая функция правдоподобия;  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \alpha)$  — плотность вероятности (ПВ) перехода марковского процесса  $\mathbf{x}$  при фиксированном  $\alpha$ .

Выражения (11) описывают работу байесовского фильтра при фиксированном значении векторного параметра  $\alpha$ . В случае гауссовской ПВ  $p(\mathbf{x}_k | \alpha, \mathbf{Y}_0^k)$  выражения (11) сводятся к уравнениям линейного или расширенного фильтра Калмана (РФК), который является оптимальным только для конкретного выбранного  $\alpha$ .

Выражение для плотности вероятности  $p(\alpha | \mathbf{Y}_0^k)$  дается в виде, [1] стр. 469.

$$p(\alpha | \mathbf{Y}_0^k) = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha) p(\alpha | \mathbf{Y}_0^{k-1})}{\int_{\alpha} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha) p(\alpha | \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\alpha} \quad (12)$$

В [1] выведено уравнение для эволюции  $p(\alpha | \mathbf{Y}_0^k)$  при постоянном  $\alpha$ . Для случая, когда  $\alpha$  изменяется во времени ( $\alpha_{k-1} \neq \alpha_k$ ), предлагается подход, в котором изменение во времени параметра  $\alpha$  учитывается в уравнении (12) для эволюции апостериорной плотности вероятности (АПВ)  $p(\alpha | \mathbf{Y}_0^k)$ . Т.е. АПВ формируется с учетом того, что  $\alpha_{k-1} \neq \alpha_k$  ( $p(\alpha | \mathbf{Y}_0^k) \rightarrow p(\alpha_{k-1} | \mathbf{Y}_0^k)$ ), а условные фильтрационные оценки  $\hat{\mathbf{x}}_k(\alpha)$  формируются при постоянных значениях  $\alpha$ . Тогда квазиоптимальное решение задачи адаптивной фильтрации векторного марковского процесса  $\mathbf{x}_k$  при наличии случайного неинформативного параметра  $\alpha_{k-1}$ , изменяющегося во времени ( $\alpha_{k-1} \neq \alpha_k$ ) имеет вид

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \int_{\alpha} \hat{\mathbf{x}}_k(\alpha) p(\alpha_{k-1} | \mathbf{Y}_0^k) d\alpha_{k-1}. \quad (13)$$

Выражение для плотности вероятности  $p(\alpha_{k-1} | \mathbf{Y}_0^k)$  в этом случае примет вид

$$p(\alpha_{k-1} | \mathbf{Y}_0^k) = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha) p(\alpha_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1})}{\int_{\alpha} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha) p(\alpha_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\alpha}. \quad (14)$$

Выведем уравнение для ПВ  $p(\alpha_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1})$  в случае изменяющегося параметра  $\alpha_k$ .

$$\begin{aligned} p(\alpha_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) &= \int_{\alpha_{k-2}} p(\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\alpha_{k-2} = \\ &= \int_{\alpha_{k-2}} p(\alpha_{k-1} | \alpha_{k-2}, \mathbf{Y}_0^{k-1}) p(\alpha_{k-2} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\alpha_{k-2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Допустим, что  $\alpha_{k-1}$ , является марковской последовательностью, тогда  $\alpha_{k-1}$  не зависит от выборки  $\mathbf{Y}_0^{k-1}$  если известно  $\alpha_{k-2}$ , то есть

$$\begin{aligned} p(\alpha_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) &= \int_{\alpha_{k-2}} p(\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\alpha_{k-2} = \\ &= \int_{\alpha_{k-2}} p(\alpha_{k-1} | \alpha_{k-2}) p(\alpha_{k-2} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\alpha_{k-2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставим полученное уравнение (16) в уравнение (12) и получим рекуррентное уравнение для эволюции апостериорной плотности вероятности (АПВ) процесса  $\alpha_{k-1}$

$$p(\alpha_{k-1} | \mathbf{Y}_0^k) = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha) \int_{\alpha_{k-2}} p(\alpha_{k-1} | \alpha_{k-2}) p(\alpha_{k-2} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\alpha_{k-2}}{\int_{\alpha} \left( p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha) \int_{\alpha_{k-2}} p(\alpha_{k-1} | \alpha_{k-2}) p(\alpha_{k-2} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\alpha_{k-2} \right) d\alpha}. \quad (17)$$

Решение задачи оптимальной адаптивной фильтрации в виде (13) имеет физически реализуемое решение только в случае, когда  $\alpha_{k-1}$  принимает дискретные значения  $\alpha_{k-1} = \alpha^j, j = \overline{1, M}$  из заданной области, что как правило приемлемо для практических применений. Такое решение получило название многоканальной адаптивной фильтрации, ([1], стр. 745), где каждому дискретному значению  $\alpha^j$  соответствует свой канал фильтрации.

Дискретизация значений  $\alpha_{k-1}$  приводит к тому, что процесс  $\alpha_{k-1}$  становится марковской цепью, с распределением вероятностей перехода от значения  $l$  в момент времени  $k-2$  к значению  $j$  в момент времени  $k-1$   $P(\alpha_{k-1}^j | \alpha_{k-2}^l)$ . Учитывая дискретность  $\alpha_{k-1}$ , в уравнениях (13) и (17) интегрирование заменяется на операцию суммирования, а соответствующие плотности вероятностей – на распределения вероятностей. Таким образом,

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{j=1}^M \hat{\mathbf{x}}_k(\alpha^j) P(\alpha_{k-1}^j | \mathbf{Y}_0^k),$$

$$\tilde{P}(\alpha_{k-1}^j | \mathbf{Y}_0^k) = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha^j) \sum_{l=1}^M P(\alpha_{k-1}^j | \alpha_{k-2}^l) P(\alpha_{k-2}^l | \mathbf{Y}_0^{k-1}), \quad (18)$$

$$P(\alpha_{k-1}^j | \mathbf{Y}_0^k) = \frac{\tilde{P}(\alpha_{k-1}^j | \mathbf{Y}_0^k)}{\sum_{j=1}^M \tilde{P}(\alpha_{k-1}^j | \mathbf{Y}_0^k)}.$$

Уравнения (11) и (18) полностью описывают общий алгоритм многоканальной адаптивной фильтрации процесса  $\mathbf{x}_k$ . Применим их для решения поставленной задачи адаптивной фильтрации фазы.

### Алгоритм фильтрации в одном канале

Учитывая (4), (5) и (9) оцениваемый процесс, описывается следующим линейным разностным уравнением.

$$\mathbf{x}_k(\alpha^j) = \mathbf{F} \mathbf{x}_{k-1}(\alpha^j) + \mathbf{G}(\alpha^j) \xi_{k-1}, \quad (19)$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{ap},$$

где  $\xi_{k-1}$  — векторный ДБГШ с нулевым МО и единичной матрицей дисперсий  $\mathbf{D}_\xi = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ .  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  — известные матрицы

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \beta T) \end{bmatrix}, \mathbf{G}(\alpha_k) = \begin{bmatrix} T\sigma_\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\omega & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\beta T} \frac{2\pi f_0}{c} \alpha^j \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Введем вектор наблюдений, сгруппированных на интервале  $\overline{t_{k,0}, t_{k,N-1}}$  с учетом введенной двойной шкалы времени (1).

$$\mathbf{y}_k = [y_{k,0}, y_{k,2}, \dots, y_{k,N-1}]^T = \mathbf{s}_k(\mathbf{x}_k(\alpha^j)) + \mathbf{n}_k, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_k(\mathbf{x}_k(\alpha^j)) &= [s_{k,0}(\mathbf{x}_k(\alpha^j)), \dots, s_{k,N-1}(\mathbf{x}_k(\alpha^j))]^T = \\ &= \sqrt{4\sigma_n^2 T_d 10^{0.1q_k}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \left\{ 2\pi f_0 t_{k,0} + \varphi_k + \omega_k 0T_d + \nu_k \frac{(0T_d)^2}{2} \right\} \\ \vdots \\ \cos \left\{ 2\pi f_0 t_{k,N-1} + \varphi_k + \omega_k (N-1)T_d + \nu_k \frac{((N-1)T_d)^2}{2} \right\} \end{bmatrix}, \quad (22) \\ \mathbf{n}_k &= [n_{k,0}, \dots, n_{k,N-1}], \end{aligned}$$

где  $\mathbf{n}_k$  — векторный дискретный белый гауссовский шум с нулевым МО и диагональной матрицей дисперсий  $\mathbf{D}_n$ , на диагонали которой лежат значения  $\sigma_n^2$ .

Выведем алгоритм для формирования условной оценки  $\hat{\mathbf{x}}_k(\alpha^j)$  при фиксированном  $\alpha^j$ , которая соответствует АПВ  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha^j)$ . Описание наблюдений вида (22) и динамики вектора состояний в виде (19), (20) позволяет записать искомый алгоритм в виде расширенного фильтра Калмана [1].

Этап экстраполяции:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j) &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}(\alpha^j), \\ \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}(\alpha^j) &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k-1}(\alpha^j)\mathbf{F}^T + \mathbf{G}(\alpha^j)\mathbf{D}_\xi\mathbf{G}(\alpha^j)^T. \end{aligned} \quad (23)$$

Этап коррекции:

$$\hat{\mathbf{D}}_{x,k}(\alpha^j) = \left( \tilde{\mathbf{D}}_{x,k}(\alpha^j)^{-1} + \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1}, \quad (24)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k(\alpha^j) = \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j) + \hat{\mathbf{D}}_{x,k}(\alpha^j) \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))).$$

В расширенном фильтре Калмана можно выделить векторный дискриминатор, который по определению является производной логарифма одношаговой функции правдоподобия по вектору информативных параметров. В уравнениях (24)

$$\mathbf{u}_{d,k} = \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))). \quad (25)$$

Уравнение (25) содержит отсчеты наблюдений, поступающие с высоким темпом. Т.к. информационный процесс меняется гораздо медленнее, то можно сказать, что на интервале  $\overline{t_k, t_{k+1}}$  значения оценок  $\hat{\mathbf{x}}_k(\alpha^j)$  и матрицы  $\hat{\mathbf{D}}_{x,k}(\alpha^j)$  не меняются, то есть выходной сигнал дискриминатора формируется в «редкой» шкале времени. Раскроем (25) с учетом подстановки выражений (21), (22):

$$\mathbf{u}_{d,k} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}} \right)^T (y_{k,i} - s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))). \quad (26)$$

Получим выражение для элементов вектора  $\mathbf{u}_{d,k}$ .

$$(u_{d,p})_k = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial x_p} (y_k - s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))), \quad (27)$$

где  $p = \overline{1, L}$  ( $L$  – размерность вектора информативных параметров  $\mathbf{x}_k$ ).

С учетом (27) и (9) векторный дискриминатор имеет вид



$$\mathbf{u}_{d,k} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial q} \right)^T (y_{k,i} - s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))) \\ \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \phi} \right)^T (y_{k,i} - s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))) \\ \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \omega} \right)^T (y_{k,i} - s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))) \\ \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \nu} \right)^T (y_{k,i} - s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{q,k} \\ u_{\phi,k} \\ u_{\omega,k} \\ u_{\nu,k} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Найдем выражение для дискриминатора по отношению с/ш в дБГц.

$$u_{q,k} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial \sqrt{4\sigma_n^2 T_d 10^{0.1\tilde{q}_k}}}{\partial q} \times \\ \times \cos \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k i T_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\} \times \\ \times \left( y_{k,i} - \tilde{A}_k \cos \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k i T_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\} \right) \quad , \quad (29)$$

где  $\tilde{A}_k = \sqrt{4\sigma_n^2 T_d 10^{0.1\tilde{q}_k}}$ .

Найдем производную  $\frac{\partial \sqrt{4\sigma_n^2 T_d 10^{0.1\tilde{q}_k}}}{\partial q}$ .

$$\frac{\partial \sqrt{4\sigma_n^2 T_d 10^{0.1\tilde{q}_k}}}{\partial q} = \frac{\sqrt{4\sigma_n^2 T_d}}{2} \frac{1}{\sqrt{10^{0.1\tilde{q}_k}}} 10^{0.1\tilde{q}_k} \ln(10^{0.1}) = \\ = \frac{1}{2} \tilde{A}_k \ln(10^{0.1}) \quad . \quad (30)$$

Подставим выражение (30) в (29).

$$u_{q,k} = \frac{\ln(10^{0.1})}{2\sigma_n^2} \tilde{A}_k \left[ I_k - \frac{\tilde{A}_k N}{2} \right], \quad (31)$$

где  $I_k = \sum_{i=0}^{N-1} y_{k,i} \cos \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k i T_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\}$ .

Найдем выражение для дискриминатора по фазе.

$$u_{\phi,k} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{A}_k \frac{\partial \cos \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k i T_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\}}{\partial \varphi} \times \left( y_{k,i} - \tilde{A}_k \cos \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k i T_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\} \right) \quad (32)$$

Найдем производную  $\frac{\partial \cos \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k i T_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\}}{\partial \varphi}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cos \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k i T_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\}}{\partial \varphi} &= \\ &= -\sin \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k i T_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

Подставим выражение (33) в (32).

$$u_{\phi,k} = -\frac{\tilde{A}_k}{\sigma_n^2} Q_k \quad (34)$$

где  $Q_k = \sum_{i=0}^{N-1} y_{k,i} \sin \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k i T_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\}$ .

Найдем выражение для дискриминатора по  $\omega$ .

$$u_{\omega,k} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{A}_k \frac{\partial \cos \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k i T_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\}}{\partial \omega} \times \left( y_{k,i} - \tilde{A}_k \cos \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k i T_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\} \right) \quad (35)$$

Найдем производную  $\frac{\partial \cos \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k i T_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\}}{\partial \omega}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cos \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k i T_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\}}{\partial \omega} &= \\ &= -iT_d \sin \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k i T_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\} \end{aligned} \quad (36)$$

Подставим выражение (36) в (35).

$$u_{\omega,k} = -\frac{\tilde{A}_k}{\sigma_n^2} Q'_k. \quad (37)$$

где  $Q'_k = \sum_{i=0}^{N-1} iT_d y_{k,i} \sin \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k iT_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\}$ .

Найдем выражение для дискриминатора по  $\nu$ .

$$u_{\nu,k} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{A}_k \frac{\partial \cos \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k iT_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\}}{\partial \nu} \times \left( y_{k,i} - \tilde{A}_k \cos \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k iT_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\} \right). \quad (38)$$

Найдем производную  $\frac{\partial \cos \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k iT_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\}}{\partial \nu}$ .

$$\frac{\partial \cos \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k iT_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\}}{\partial \nu} = -\frac{(iT_d)^2}{2} \sin \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k iT_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\}. \quad (39)$$

Подставим выражение (39) в (38).

$$u_{\nu,k} = -\frac{\tilde{A}_k}{\sigma_n^2} Q''_k. \quad (40)$$

где  $Q''_k = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^2}{2} y_{k,i} \sin \left\{ 2\pi f_o t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k + \tilde{\omega}_k iT_d + \tilde{\nu}_k \frac{(iT_d)^2}{2} \right\}$ .

Представим векторный дискриминатор, учитывая полученные выражения (31), (34), (37), (40).

$$\mathbf{u}_{d,k} = \begin{bmatrix} u_{q,k} \\ u_{\phi,k} \\ u_{\omega,k} \\ u_{\nu,k} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma_n^2} \begin{bmatrix} \frac{\ln(10^{0.1})}{2} \tilde{A}_k \left[ I_k - \frac{\tilde{A}_k N}{2} \right] \\ -\tilde{A}_k Q_k \\ -\tilde{A}_k Q'_k \\ -\tilde{A}_k Q''_k \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Найдем элементы матрицы  $\mathbf{W}_k = \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}}$ ,

входящей в (24). Для определенности будем называть матрицу  $\mathbf{W}_k$  эквивалентной матрицей весов наблюдений  $\mathbf{W}_k$ , поскольку она отвечает за вклад наблюдений в уточнение оценки вектора состояний.

$$\mathbf{W}_k = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}}. \quad (42)$$

Получим выражение для элементов матрицы  $\mathbf{W}_k$ .

$$(W_{p,q})_k = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial x_p} \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial x_q}, \quad (43)$$

где  $p = q = \overline{1, L}$  ( $L$  – размерность вектора информативных параметров  $\mathbf{x}_k$ ).

Учитывая уравнение (30) выражение для элемента  $W_{1,1}$  эквивалентной матрицы весов наблюдений имеет вид

$$(W_{1,1})_k = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial q} \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial q} = \frac{N}{2 \cdot \sigma_n^2} \frac{(\tilde{A}_k \ln(10^{0.1}))^2}{4}. \quad (44)$$

$$(W_{1,2,4})_k = (W_{2,4,1})_k = 0. \quad (45)$$

Учитывая уравнение (33) выражение для элемента  $W_{2,2}$  эквивалентной матрицы весов наблюдений имеет вид

$$(W_{2,2})_k = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \varphi} \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \varphi} = \frac{N \tilde{A}_k^2}{2 \sigma_n^2}. \quad (46)$$

Учитывая уравнения (33) и (36) выражение для элементов  $W_{2,3}$  и  $W_{3,2}$  эквивалентной матрицы весов наблюдений имеет вид

$$(W_{2,3})_k = (W_{3,2})_k = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \varphi} \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \omega} = \frac{\tilde{A}_k^2}{2 \sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} iT_d. \quad (47)$$

Учитывая уравнения (33) и (39) выражение для элементов  $W_{2,4}$  и  $W_{4,2}$  эквивалентной матрицы весов наблюдений имеет вид

$$(W_{2,4})_k = (W_{4,2})_k = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \varphi} \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \nu} = \frac{\tilde{A}_k^2}{2 \sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^2}{2}. \quad (48)$$

Учитывая уравнение (36) выражение для элемента  $W_{3,3}$  эквивалентной матрицы весов наблюдений имеет вид

$$(W_{3,3})_k = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \omega} \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \omega} = \frac{\tilde{A}_k^2}{2\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} (iT_d)^2. \quad (49)$$

Учитывая уравнения (36) и (39) выражение для элементов  $W_{3,4}$  и  $W_{4,3}$  эквивалентной матрицы весов наблюдений имеет вид

$$(W_{3,4})_k = (W_{4,3})_k = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \omega} \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \nu} = \frac{\tilde{A}_k^2}{2\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^3}{2}. \quad (50)$$

Учитывая уравнение (39) выражение для элемента  $W_{4,4}$  эквивалентной матрицы весов наблюдений имеет вид

$$(W_{4,4})_k = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \nu} \frac{\partial s_{k,i}(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \nu} = \frac{\tilde{A}_k^2}{2\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^4}{4}. \quad (51)$$

Представим эквивалентную матрицу весов наблюдений.

$$\mathbf{W}_k = \frac{\tilde{A}_k^2}{2\sigma_n^2} \begin{pmatrix} \frac{N(\ln(10^{0.1}))^2}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & \sum_{i=0}^{N-1} iT_d & \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^2}{2} \\ 0 & \sum_{i=0}^{N-1} iT_d & \sum_{i=0}^{N-1} (iT_d)^2 & \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^3}{2} \\ 0 & \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^2}{2} & \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^3}{2} & \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^4}{4} \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Представим алгоритм формирования условной оценки  $\hat{\mathbf{x}}_k(\alpha^j)$  при фиксированном  $\alpha^j$ .

Этап экстраполяции:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j) &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}(\alpha^j), \\ \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}(\alpha^j) &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k-1}(\alpha^j)\mathbf{F}^T + \mathbf{G}(\alpha^j)\mathbf{D}_\xi\mathbf{G}(\alpha^j)^T. \end{aligned} \quad (53)$$

Этап коррекции:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}(\alpha^j) &= \left( \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}(\alpha^j)^{-1} + \mathbf{W}_k \right)^{-1}, \\ \hat{\mathbf{x}}_k(\alpha^j) &= \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j) + \hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}(\alpha^j)\mathbf{u}_{d,k}, \end{aligned} \quad (54)$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_\xi = \mathbf{I}_{3 \times 3}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \beta T) \end{pmatrix}, \mathbf{G}_{k-1} = \begin{pmatrix} T\sigma_\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\omega & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\beta T} \cdot \frac{2\pi \cdot f_0}{c} \alpha^j \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{u}_{d,k} = \begin{pmatrix} u_{q,k} \\ u_{\phi,k} \\ u_{\omega,k} \\ u_{v,k} \end{pmatrix} = \frac{\tilde{A}_k}{\sigma_n^2} \begin{pmatrix} \frac{\ln(10^{0.1})}{2} \cdot \left[ I_k - \frac{\tilde{A}_k N}{2} \right] \\ -Q_k \\ -Q'_k \\ -Q'' \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{W}_k = \frac{\tilde{A}_k^2}{2\sigma_n^2} \begin{pmatrix} \frac{N(\ln(10^{0.1}))^2}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & \sum_{i=0}^{N-1} iT_d & \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^2}{2} \\ 0 & \sum_{i=0}^{N-1} iT_d & \sum_{i=0}^{N-1} (iT_d)^2 & \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^3}{2} \\ 0 & \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^2}{2} & \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^3}{2} & \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(iT_d)^4}{4} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{55}$$

Выражения (53)-(55) описывают работу фильтра в одном канале, который настроен на формирование оценки  $\hat{\mathbf{x}}_k(\alpha^j)$  при заданном параметре интенсивности динамики фазы  $\alpha^j$ . При этом величина ошибки фильтрации будет, в том числе, зависеть от того, насколько истинная динамика фазы соответствует выбранному значению  $\alpha^j$ .

### Расчет канальных весов

Как следует из (18), исходной информацией для взвешивания оценок из разных каналов является плотность вероятности  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha^j)$ , играющая ту же роль, что одношаговая функция правдоподобия в уравнении Стратоновича для дискретного времени. Физический смысл этой ПВ заключается в том, что она показывает насколько правдоподобно наблюдение  $\mathbf{y}_k$  исходя из прогноза по предыдущим наблюдениям  $\mathbf{Y}_0^{k-1}$  при выбранном значении параметра динамики  $\alpha^j$ . Наблюдения  $\mathbf{y}_k$  в

соответствии с (21) не зависят явным образом от  $\mathbf{Y}_0^{k-1}$ , а зависят только от текущего значения информативного процесса  $\mathbf{x}_k$  (через сигнальную функцию). Но в отличие от одношаговой функции правдоподобия здесь значение информативного процесса  $\mathbf{x}_k$  неизвестно. Тем не менее, по наблюдениям на предыдущих шагах  $\mathbf{Y}_0^{k-1}$  и в предположении, что параметр динамики  $\alpha^j$  принимает конкретное значение, можно сформировать экстраполированную оценку информативного процесса  $\mathbf{x}_k$ , которая определена в (53), то есть,  $\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j) \equiv (\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha^j)$ . А по экстраполированной оценке  $\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j)$ , вобравшей в себя всю информацию о предыдущих наблюдениях  $\mathbf{Y}_0^{k-1}$ , можно спрогнозировать  $\mathbf{y}_k$  через  $\mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))$ . Поэтому ПВ  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha^j)$  эквивалентна ПВ  $p(\mathbf{y}_k | \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))$ , которую можно найти следующим образом.

Экстраполированную оценку  $\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j)$  можно представить как сумму истинного значения информативного параметра и ошибки, зависящей от параметра  $\alpha$ .

$$\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j) = \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\delta}_k(\alpha^j). \quad (56)$$

Тогда  $\mathbf{s}_k(\mathbf{x}_k) = \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j) - \boldsymbol{\delta}_k(\alpha^j))$ , а вектор наблюдений на шаге  $k$  равен

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j) - \boldsymbol{\delta}_k(\alpha^j)) + \mathbf{n}_k. \quad (57)$$

Будем считать ошибку  $\boldsymbol{\delta}_k(\alpha^j) = \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j) - \mathbf{x}_k$  распределенной по гауссовскому закону. Однако,  $\mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j) - \boldsymbol{\delta}_k(\alpha^j))$  — нелинейная функция и соответственно отсчеты сигнальной функции уже не распределены по нормальному закону, и ПВ  $p(\mathbf{y}_k | \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))$  не будет гауссовской. Однако, по аналогии с гауссовской аппроксимацией АПВ, можно применить гауссовскую аппроксимацию и к ПВ  $p(\mathbf{y}_k | \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))$ . Для этого разложим функцию  $\mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j) - \boldsymbol{\delta}_k(\alpha^j))$  в ряд Тейлора в точке  $\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j)$ . Ограничимся первыми двумя членами

$$\begin{aligned}
& \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j) - \delta_k(\alpha^j)) \approx \\
& \approx \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j)) + \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}_k} \left( (\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j) - \delta_k(\alpha^j)) - \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j) \right) = \\
& = \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j)) + \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}_k} (-\delta_k(\alpha^j)).
\end{aligned} \tag{58}$$

Запишем модель наблюдений на шаге  $k$  учитывая (58)

$$\mathbf{y}_k \approx \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j)) + \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}_k} (-\delta_k(\alpha^j)) + \mathbf{n}_k. \tag{59}$$

$\frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}_k} (-\delta_k(\alpha^j)) = \boldsymbol{\zeta}_k(\alpha^j)$  — векторный ДБГШ с нулевым МО и матрицей дисперсий  $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\zeta},k}(\alpha^j)$ ;  $\mathbf{n}_k$  — это вектор столбец, содержащий отсчеты ДБГШ с нулевым МО и диагональной матрицей дисперсий  $\mathbf{D}_n$ , на диагонали которой лежат значения  $\sigma_n^2$ .

В соответствии с (59),  $\mathbf{y}_k$  представляет собой векторную случайную величину с МО  $\mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))$ . Матрицу дисперсий векторной случайной величины  $\mathbf{y}_k$  обозначим как  $\mathbf{D}_{\mathbf{y},k}(\alpha^j)$ . Матрица дисперсий  $\mathbf{D}_{\mathbf{y},k}(\alpha^j)$  будет определяться суммой дисперсий слагаемых  $\boldsymbol{\zeta}_k(\alpha^j)$  и  $\mathbf{n}_k$ , так как эти слагаемые независимы. Учитывая это, запишем матрицу дисперсий  $\mathbf{D}_{\mathbf{y},k}(\alpha^j)$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{y},k}(\alpha^j) = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\zeta},k}(\alpha^j) + \mathbf{D}_n. \tag{60}$$

Найдём матрицу  $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\zeta}}$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{\boldsymbol{\zeta},k}(\alpha^j) &= \mathbf{M} \left[ \boldsymbol{\zeta}_k(\alpha^j) (\boldsymbol{\zeta}_k(\alpha^j))^T \right] = \\
&= \mathbf{M} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}_k} (-\delta_k(\alpha^j)) \right) \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}_k} (-\delta_k(\alpha^j)) \right)^T \right] = \\
&= \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}_k} \mathbf{M} \left[ \delta_k(\alpha^j) (\delta_k(\alpha^j))^T \right] \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T.
\end{aligned} \tag{61}$$

По определению,  $\mathbf{M} \left[ \delta_k(\alpha^j) (\delta_k(\alpha^j))^T \right] = \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}(\alpha^j)$ , следовательно



$$\mathbf{D}_{\varsigma,k} = \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}_k} \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}(\alpha^j) \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T. \quad (62)$$

С учетом (59) ПВ  $p(\mathbf{y}_k | \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))$ , при фиксированном значении  $\alpha^j$ , можно представить в виде гауссовской ПВ, с математическим ожиданием  $\mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))$  и матрицей дисперсий  $\mathbf{D}_{\mathbf{y},k}(\alpha^j)$ .

$$p(\mathbf{y}_k | \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j)) = \frac{1}{(2\pi \det(\mathbf{D}_{\mathbf{y},k}(\alpha^j)))^{N/2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}_k - \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j)))^T \mathbf{D}_{\mathbf{y},k}(\alpha^j)^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))) \right\}, \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{y},k}(\alpha^j) &= \mathbf{D}_{\varsigma,k}(\alpha^j) + \mathbf{D}_n = \\ &= \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}_k} \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k} \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T + \mathbf{D}_n. \end{aligned} \quad (64)$$

Уравнения (18), (21), (22), (53)-(55), (63), (64) полностью представляют оптимальный алгоритм многоканальной адаптивной системы слежения за фазой сигнала (МАССФ).

### Упрощение расчета канальных весов

В выражениях в (63), (64) размерность вектора наблюдений  $\mathbf{y}_k$  равна  $N$ , а размерность матрицы  $\mathbf{D}_{\mathbf{y},k}(\alpha^j)$  составляет  $N \times N$ . На практике размерность матрицы  $N$  равна десяткам тысяч. Это ведет к серьезным сложностям при практической реализации алгоритма. Данную проблему можно преодолеть, перейдя к эквивалентной линеаризованной системе фильтрации [2].

На рисунке 1 представлена структурная схема нелинейного канального фильтра  $j$ , определяемого уравнениями (53)-(55), а на рисунке 2 представлена эквивалентная схема линеаризованной системы  $j$ -го канального фильтра, на вход которого поступают эквивалентные наблюдения вида

$$\mathbf{y}_{\text{эkv},k} = \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_{\text{эkv},k}, \quad (65)$$

где  $\mathbf{n}_{\text{эkv},k}$  — вектор эквивалентных ДБГШ с нулевым МО и матрицей дисперсий  $\mathbf{D}_{\mathbf{n}_{\text{эkv},k}}$ .

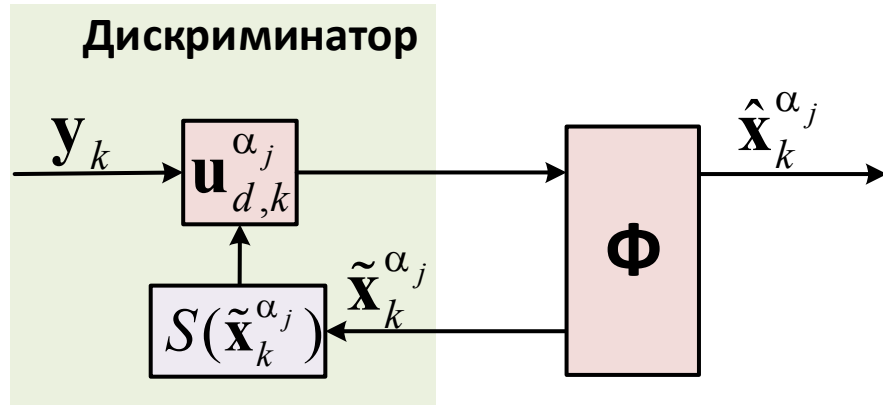


Рисунок 1. Структурная схема  $j$ -го канального фильтра

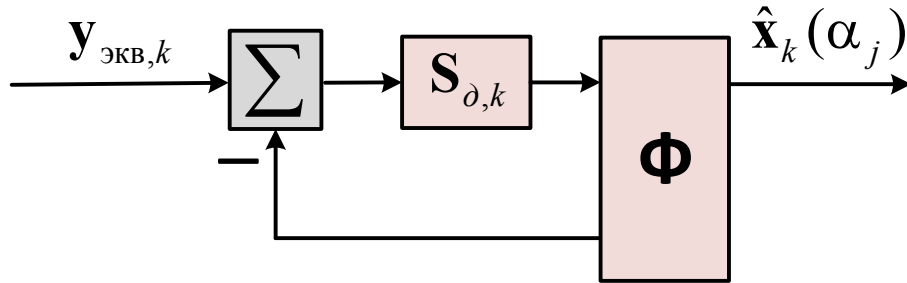


Рисунок 2. Эквивалентная схема линеаризованной системы  $j$ -го канального фильтра

В эквивалентной линеаризованной системе плотности вероятности  $p(\mathbf{y}_k | \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))$  будет соответствовать плотность вероятности  $p(\mathbf{y}_{\text{эKB},k} | \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))$ . Другими словами, если бы постановка решаемой задачи адаптивной многоканальной фильтрации фазы включала бы модель наблюдений вида (65) вместо (21), то при формировании оптимальной взвешенной оценки  $\hat{\mathbf{x}}_k$  в (18) вместо  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha^j)$  использовалась бы  $p(\mathbf{y}_{\text{эKB},k} | \mathbf{Y}_{\text{эKB},0}^{k-1}, \alpha^j)$ . То есть, эти плотности вероятности эквивалентны, и вместо  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha^j)$  в (18) можно подставлять  $p(\mathbf{y}_{\text{эKB},k} | \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))$ . По аналогии с (63) можно записать

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{y}_{\text{эKB},k} | \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j)) &= \\
 &= \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot \det(\mathbf{D}_{\text{эKB},k}(\alpha^j)))^{n/2}} \times \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}_{\text{эKB},k} - \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))^T \mathbf{D}_{\text{эKB},k}^{-1}(\alpha^j) (\mathbf{y}_{\text{эKB},k} - \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j)) \right\}
 \end{aligned} \tag{66}$$

Размерность вектора эквивалентных наблюдений  $\mathbf{y}_{\text{экв},k}$  равна 4, а размерность матрицы дисперсий  $\mathbf{D}_{\text{экв},k}(\alpha^j)$  равна  $4 \times 4$ , поэтому гораздо проще рассчитать  $p(\mathbf{y}_{\text{экв},k} | \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))$  вместо  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha^j)$ .

Для расчета  $p(\mathbf{y}_{\text{экв},k} | \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))$  найдем  $(\mathbf{y}_{\text{экв},k} - \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))$  и  $\mathbf{D}_{\text{экв},k}(\alpha^j)$ . Для этого представим процесс на выходе дискриминатора в виде

$$\mathbf{u}_{d,k} = \mathbf{U}_{d,k}(\boldsymbol{\delta}_k(\alpha^j)) + \boldsymbol{\psi}_k, \quad (67)$$

где  $\mathbf{U}_{d,k}(\boldsymbol{\delta}_k(\alpha^j)) = \mathbf{M}[\mathbf{u}_{d,k}]$  — сигнал ошибки;  $\boldsymbol{\psi}_k$  — флуктуационная составляющая процесса на выходе векторного дискриминатора.

Сигнал ошибки процесса на выходе  $\mathbf{u}_{d,k}$  описывается векторной дискриминационной характеристикой и зависит только от рассогласования оценки информационного параметра и его истинного значения. Полагая ошибку слежения  $\boldsymbol{\delta}_k(\alpha^j) = \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j) - \mathbf{x}_k$  малой, можно представить процесс на выходе векторного дискриминатора как

$$\mathbf{u}_{d,k} \approx \mathbf{S}_{\partial,k} \boldsymbol{\delta}_k(\alpha^j) + \boldsymbol{\psi}_k, \quad (68)$$

где  $\mathbf{S}_{\partial}$  — матрица крутизна векторной дискриминационной характеристики, которую можно получить взяв матожидание от (25) и выполнив дифференцирование по  $\boldsymbol{\delta}(\alpha^j)$ .

$$\mathbf{S}_{\partial,k} = \left. \frac{\partial \mathbf{U}_{d,k}(\boldsymbol{\delta}_k(\alpha^j))}{\partial \boldsymbol{\delta}(\alpha^j)} \right|_{\boldsymbol{\delta}(\alpha^j)=0} = \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}}. \quad (69)$$

Сопоставляя (69) и (42) можно заключить, что  $\mathbf{S}_{\partial,k} = \mathbf{W}_k$ .

Флуктуационная составляющая на выходе дискриминатора, как следует из (25), равна

$$\boldsymbol{\psi}_k = \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{n}_k. \quad (70)$$

Отсчеты флуктуационной составляющей на выходе дискриминатора представляют собой векторную гауссовскую СВ с нулевым МО и матрицей ковариаций  $\mathbf{C}_{\psi}$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_\psi &= \mathbf{M} \left[ \boldsymbol{\Psi}_k (\boldsymbol{\Psi}_k)^T \right] = \\
&= \mathbf{M} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{n}_k \left( \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{n}_k \right)^T \right] = \\
&= \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{M} \left[ \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_k^T \right] \mathbf{D}_n^{-1} \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}} = \\
&= \left( \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \frac{\partial \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{W}_k.
\end{aligned} \tag{71}$$

Тогда представим процесс на выходе дискриминатора как

$$\mathbf{u}_{d,k} \approx \mathbf{S}_{\partial,k} (\boldsymbol{\delta}_k(\alpha^j) + \mathbf{S}_{\partial,k}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_k) = \mathbf{S}_{\partial,k} (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j) + \mathbf{S}_{\partial,k}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_k). \tag{72}$$

Полагая шум эквивалентных наблюдений в (65)  $\mathbf{n}_{\text{эКВ},k}$  равным  $\mathbf{S}_{\partial,k}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_k$  перепишем (65) в виде

$$\mathbf{y}_{\text{эКВ},k} = \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_{\text{эКВ},k} = \mathbf{x}_k + \mathbf{S}_{\partial,k}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_k. \tag{73}$$

Подставляя (73) в (72) получим  $\mathbf{u}_{d,k} \approx \mathbf{S}_{\partial,k} (\mathbf{y}_{\text{эКВ},k} - \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))$ , отсюда

$$(\mathbf{y}_{\text{эКВ},k} - \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j)) \approx \mathbf{S}_{\partial,k}^{-1} \mathbf{u}_{d,k}. \tag{74}$$

Найдем  $\mathbf{D}_{\text{эКВ},k}(\alpha^j)$ . Согласно (66)  $\mathbf{D}_{\text{эКВ},k}(\alpha^j)$  является дисперсией несмещенной векторной случайной величины  $(\mathbf{y}_{\text{эКВ},k} - \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j)) = (\mathbf{x}_k + \mathbf{n}_{\text{эКВ},k} - \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j)) = \mathbf{n}_{\text{эКВ},k} - \boldsymbol{\delta}_k(\alpha^j)$ . Шум эквивалентных наблюдений на шаге  $k$   $\mathbf{n}_{\text{эКВ},k}$  не коррелирован с ошибкой экстраполированной оценки  $\boldsymbol{\delta}_k(\alpha^j)$ , поскольку в эту ошибку вошли только шумы с предыдущих шагов  $0, \overline{(k-1)}$ , а по условию задачи шум наблюдений в различные моменты времени не коррелирован. Поэтому

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{\text{эКВ},k}(\alpha^j) &= \mathbf{M} \left[ (\mathbf{y}_{\text{эКВ},k} - \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j)) (\mathbf{y}_{\text{эКВ},k} - \tilde{\mathbf{x}}_k(\alpha^j))^T \right] = \\
&= \mathbf{M} \left[ (\mathbf{n}_{\text{эКВ},k} - \boldsymbol{\delta}_k(\alpha^j)) (\mathbf{n}_{\text{эКВ},k} - \boldsymbol{\delta}_k(\alpha^j))^T \right] = \\
&= \mathbf{M} \left[ \mathbf{n}_{\text{эКВ},k} (\mathbf{n}_{\text{эКВ},k})^T \right] + \mathbf{M} \left[ \boldsymbol{\delta}_k(\alpha^j) (\boldsymbol{\delta}_k(\alpha^j))^T \right].
\end{aligned} \tag{75}$$

По определению  $M\left[\delta_k(\alpha^j) \cdot (\delta_k(\alpha^j))^T\right] = \tilde{\mathbf{D}}_{x,k}(\alpha^j)$ , алгоритм вычисления этой матрицы задан в (53). Матрица дисперсий шума эквивалентных наблюдений  $\mathbf{D}_{\text{нэ},k}$  определяется следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\text{нэ},k} &= M\left[\mathbf{n}_{\text{экв},k} (\mathbf{n}_{\text{экв},k})^T\right] = M\left[(\mathbf{S}_{\partial,k}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_k)(\mathbf{S}_{\partial,k}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_k)^T\right] = \\ &= \mathbf{S}_{\partial,k}^{-1} M\left[\boldsymbol{\Psi}_k \cdot (\boldsymbol{\Psi}_k)^T\right] (\mathbf{S}_{\partial,k}^{-1})^T = \mathbf{S}_{\partial,k}^{-1} \mathbf{S}_{\partial,k} (\mathbf{S}_{\partial,k}^{-1})^T = \mathbf{S}_{\partial,k}^{-1} = \mathbf{W}_k^{-1}. \end{aligned} \quad (76)$$

Отсюда матрица дисперсий  $\mathbf{D}_{\text{экв},k}(\alpha^j)$  равна

$$\mathbf{D}_{\text{экв},k}(\alpha^j) = \mathbf{D}_{\text{нэ},k} + \tilde{\mathbf{D}}_{x,k}(\alpha^j) = \mathbf{W}_k^{-1} + \tilde{\mathbf{D}}_{x,k}(\alpha^j). \quad (77)$$

Подставляя (74) и (77) в (66) получим

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_{\text{экв},k} | \mathbf{Y}_{\text{экв},0}^{k-1}, \alpha^j) &= \frac{1}{\left(2\pi \det(\mathbf{W}_k^{-1} + \tilde{\mathbf{D}}_{x,k}(\alpha^j))\right)^{n/2}} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{u}_{d,k})^T (\mathbf{W}_k^{-1} + \tilde{\mathbf{D}}_{x,k}(\alpha^j))^{-1} (\mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{u}_{d,k})\right\}. \end{aligned} \quad (78)$$

Выражения (18), (21), (22), (53)-(55), (78) полностью определяют оптимальный алгоритм многоканальной адаптивной системы слежения за фазой сигнала, с учетом сделанного приближения  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}, \alpha^j) \approx p(\mathbf{y}_{\text{экв},k} | \mathbf{Y}_{\text{экв},0}^{k-1}, \alpha^j)$ . Структурная схема этой системы представлена на рисунке 3.

Помимо самой взвешенной оценки  $\hat{\mathbf{x}}_k$  интерес также представляет апостериорная дисперсия этой оценки, которую обозначим как  $\mathbf{D}_{\mathbf{x},k}$ . Ввиду существенной корреляции как оценок на выходах канальных фильтров  $\hat{\mathbf{x}}_k(\alpha^j)$ , так и их дисперсий  $\hat{\mathbf{D}}_{x,k}(\alpha^j)$ , будем приближенно формировать  $\mathbf{D}_{\mathbf{x},k}$  как результат взвешивания дисперсий на выходах канальных фильтров (54) с теми же весами, что и при формировании  $\hat{\mathbf{x}}_k$  в выражении (18), то есть

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x},k} = \sum_{j=1}^M \hat{\mathbf{D}}_{x,k}(\alpha^j) P(\alpha_k^j | \mathbf{Y}_0^k), \quad (79)$$

где  $\hat{\mathbf{D}}_{x,k}(\alpha^j)$  – дисперсии, формирующиеся в канальных фильтрах с номерами  $j = \overline{1, M}$  в соответствии с выражением (54).

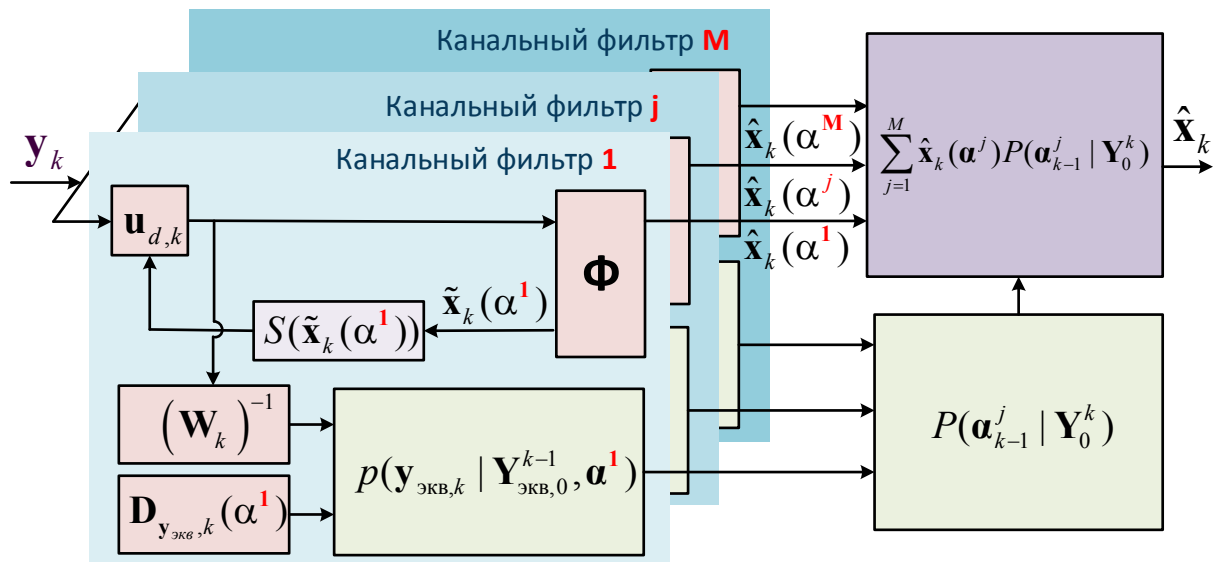


Рисунок 3. Структурная схема многоканальной адаптивной системы слежения за фазой сигнал

## Список источников

1. Перов. А.И. Статистическая теория радиотехнических систем. Учебное пособие. Изд. 2-е, перераб. и доп. - М.: Радиотехника, 2022. - 840 с.
2. Перов А. И., Замолодчиков В. Н., Чиликин В. М. Радиоавтоматика: Учебник для вузов. \_ М.: Радиотехника, 2014. – 320 с.
3. Understanding GPS: Principles and Applications/ Ed. by E.D. Kaplan.— С. 86-92. Artech House, Inc., Norwood, Massachusetts, 1996
4. Шатилов А.Ю. Использование критерия срыва слежения при оценке помехоустойчивости следящих систем. // Радионавигационные технологии. — М.: Радиотехника, 2010. — № 11. — С. 25-33.
5. Шатилов, А. Ю. Исследование кратковременных нестабильностей кварцевых опорных генераторов для применения в НАП // Радионавигационные технологии. — М.: Радиотехника, 2013. — № 3. — С. 86-92.
6. Jong-Hoon Won and Bernd Eissfeller. A Tuning Method Based on Signal-to-Noise Power Ratio for Adaptive PLL and its Relationship with Equivalent Noise Bandwidth. IEEE Communications Letters, VOL. 17, NO. 2, FEBRUARY 2013, pp 393-396.
7. Jong-Hoon Won. A Novel Adaptive Digital Phase-Lock-Loop for Modern Digital GNSS Receivers. IEEE Communications Letters, VOL. 18, NO. 1, JANUARY 2014, pp. 46-49.
8. Dah-Jing Jwo and Sheng-Hung Wang. Adaptive Fuzzy Strong Tracking Extended Kalman Filtering for GPS Navigation. IEEE Sensors Journal, VOL. 7, NO. 5, MAY 2007, pp 778-789.
9. Jordi Vilà-Valls, Pau Closas, Carles Fernández-Prades, Jose A. López-Salcedo, and Gonzalo Seco-Granados. Adaptive GNSS Carrier Tracking Under Ionospheric Scintillation: Estimation vs. Mitigation. IEEE Communications letters, VOL. 19, NO. 6, JUNE 2015, pp 961-964
10. Emanuela Falletti, Marco Pini, Letizia Lo Presti. Low Complexity Carrier-to-Noise Ratio Estimators for GNSS Digital Receivers. IEEE Transactions on aerospace and electronic systems VOL. 47, NO. 1 JANUARY 2011, pp. 420-437.