Лекция 8. Обнаружение радионавигационных сигналов

Постановка задачи обнаружения.

Наблюдается реализация y(t) на интервале [0,T]:

$$y(t) = \begin{cases} S(t,\lambda) + n(t), & \text{если сигнал присутствует,} \\ n(t), & \text{если сигнал отсутствует.} \end{cases}$$

или

$$y(t) = \vartheta S(t,\lambda) + n(t), \quad t \in [0,T]$$

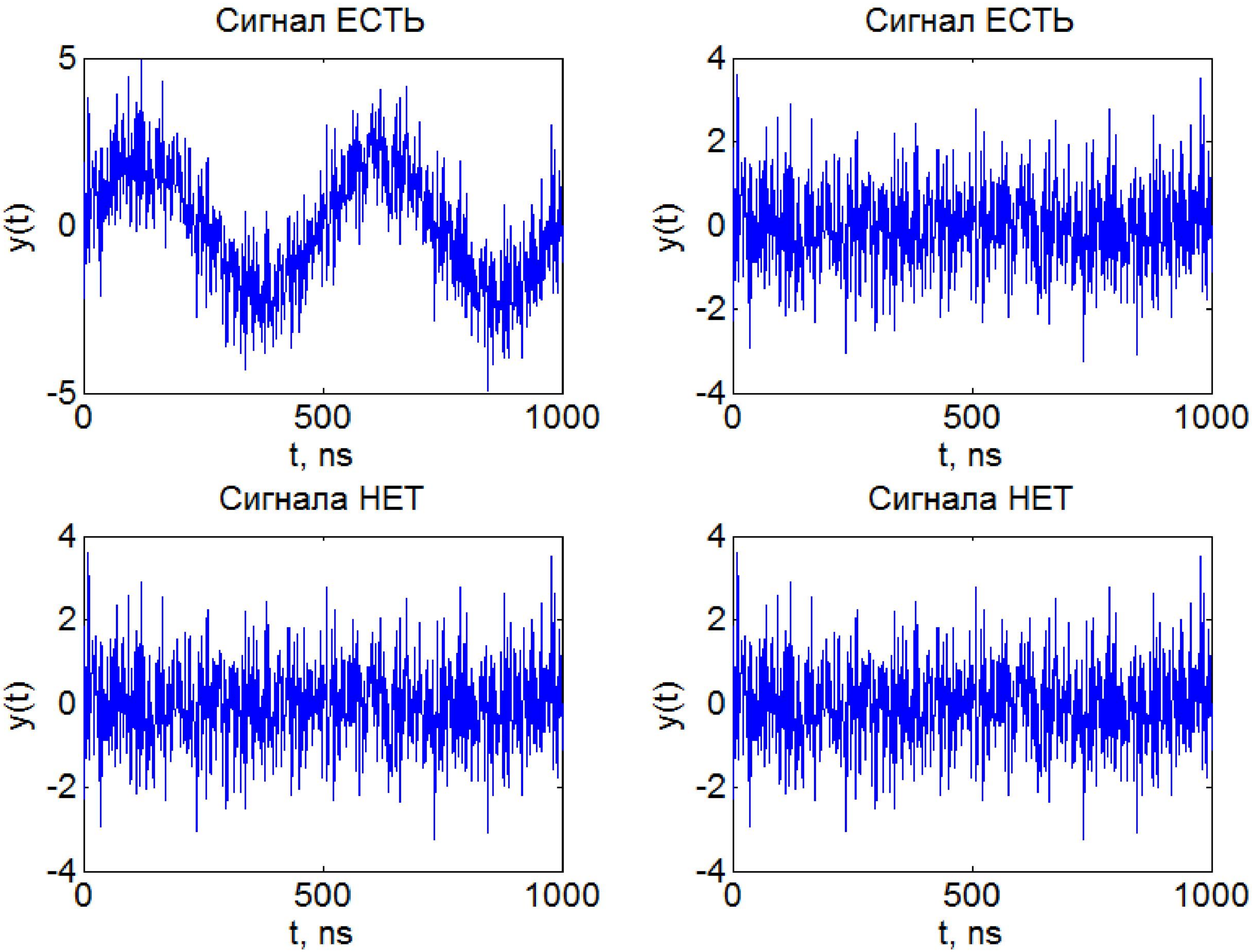
$$\vartheta = \{0,1\},$$

$$P(\vartheta = 1) = P_{ap}(1)$$

Требуется оценить ϑ

Зачем это нужно

Примеры: радиовещание радионавигация



Обнаружение детерминированного сигнала

Байесовское решение. Простая функция потерь:

Истинное значение ϑ	Оценка $\hat{\vartheta}$	Функция потерь $c\left(\vartheta,\hat{\vartheta}\right)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Средний риск:

$$r\left(\mathrm{u},t\right)=\iint c\left(\mathrm{x}\left(t\right),\mathrm{u}\left(Y_0^t\right)\right)p\left(\mathrm{x}\left(t\right),\mathbf{Y}_0^t\right)d\mathrm{x}\left(t\right)d\mathbf{Y}_0^t=$$

$$=\iint c\left(\mathrm{x}\left(t\right),\mathrm{u}\left(Y_0^t\right)\right)p\left(\mathrm{x}\left(t\right)\mid\mathbf{Y}_0^t\right)d\mathrm{x}\left(t\right)p\left(\mathbf{Y}_0^t\right)d\mathbf{Y}_0^t$$

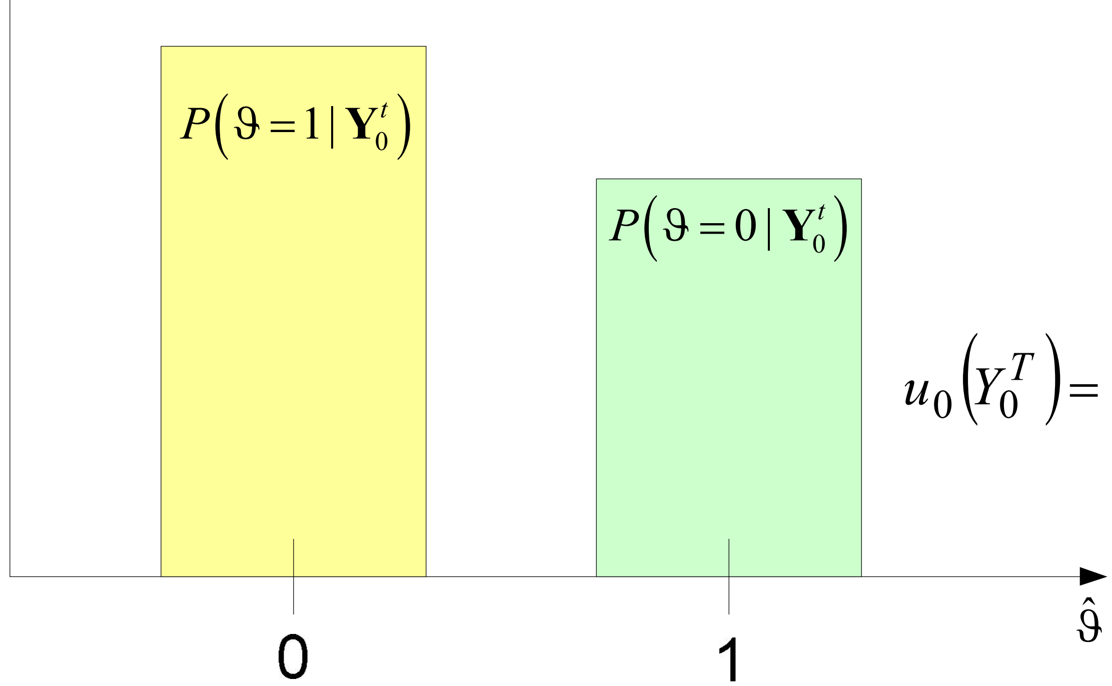
$$\Leftrightarrow r\left(\mathrm{u}\equiv\hat{\vartheta}\right)=\int\left(\sum_{\vartheta=0}^{1}c\left(\vartheta,\hat{\vartheta}\right)P\left(\vartheta\mid\mathbf{Y}_0^t\right)\right)p\left(\mathbf{Y}_0^t\right)d\mathbf{Y}_0^t\to\min$$

Обнаружение детерминированного сигнала

Оценка $\hat{\vartheta}$ такая что: $r_{ps}\left(\hat{\vartheta}, \mathbf{Y}_0^t\right) = \left(\sum_{\vartheta=0}^{1} c\left(\vartheta, \hat{\vartheta}\right) P\left(\vartheta \mid \mathbf{Y}_0^t\right)\right) \to \min,$

т.е. $\hat{\vartheta} = \arg\min\left(\sum_{\vartheta=0}^{1} c\left(\vartheta, \hat{\vartheta}\right) P\left(\vartheta \mid \mathbf{Y}_0^t\right)\right)$

$$r_{ps}\left(\hat{\vartheta} \mid \mathbf{Y}_0^t\right) = \left(\sum_{\vartheta=0}^{1} c\left(\vartheta, \hat{\vartheta}\right) P\left(\vartheta \mid \mathbf{Y}_0^t\right)\right) = P\left(\vartheta \neq \hat{\vartheta} \mid \mathbf{Y}_0^t\right)$$



Решающее правило:

$$u_0\left(Y_0^T\right) = \begin{cases} \hat{\vartheta} = 1, & \text{при } P\left(\vartheta = 1 \middle| Y_0^T\right) \geq P\left(\vartheta = 0 \middle| Y_0^T\right), \\ \hat{\vartheta} = 0, & \text{при } P\left(\vartheta = 1 \middle| Y_0^T\right) < P\left(\vartheta = 0, Y_0^T\right). \end{cases}$$

Как из решающего правила получается алгоритм обработки

По формуле Байеса

$$P\left(\vartheta \middle| Y_0^T\right) = kP_{ap}(\vartheta)P\left(Y_0^T|\vartheta\right) \qquad \left(k = 1/P\left(Y_0^T\right) = const\right)$$

Если $$\frac{P\left(Y_0^T|\vartheta=1\right)}{P\left(Y_0^T|\vartheta=0\right)} \geq \frac{P_{ap}(0)}{P_{ap}(1)},$$ то $\hat{\vartheta} = 1$

$$\rho\left(Y_0^T\right) = \frac{P\left(Y_0^T|\vartheta=1\right)}{P\left(Y_0^T|\vartheta=0\right)}$$ - отношение правдоподобия

$$h = \frac{P_{ap}(0)}{P_{ap}(1)}$$ - порог сравнения

Отношение правдоподобия

Рассмотрим дискретный сигнал: $y_k = S_k(\lambda) + n_k, \quad k = \overline{1,m}$

$$p\left(Y_1^m \middle| S_k(\lambda), k = \overline{1,m}\right) = p\left(y_1 \middle| S_1(\lambda)\right) \cdot p\left(y_2 \middle| S_2(\lambda)\right) \cdots p\left(y_m \middle| S_m(\lambda)\right)$$

$$p\left(y_k \middle| S_k(\lambda)\right) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\left(y_k - S_k(\lambda)\right)^2\right\}$$

$$p\left(y_1, y_2, \ldots, y_m \middle| S_k(\lambda), k = \overline{1,m}\right) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{m/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m}\left(y_k - S_k(\lambda)\right)^2\right\} \Rightarrow$$

$$\rho\left(Y_1^m\right) = \frac{p\left(Y_1^m \middle| S_k(\lambda), k = \overline{1,m}\right)}{p\left(Y_1^m \middle| 0, k = \overline{1,m}\right)} = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m}\left(y_k - S_k(\lambda)\right)^2\right\} \Big/ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m} y_k^2\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m} S_k(\lambda)\left(y_k - \frac{1}{2}S_k(\lambda)\right)\right\}$$

Отношение правдоподобия

Отношение правдоподобия для непрерывного времени:

$$\rho\left(Y_0^T\right) = \exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T S(t,\lambda)\left(y(t) - \frac{1}{2}S(t,\lambda)\right)dt\right\}$$

Отношение правдоподобия для векторных сигналов и сообщений:

$$\rho\left(\mathbf{Y}_0^T\right) = \exp\left\{\int_0^T \mathbf{S}^{\mathrm{T}}(t,\lambda) 2\mathbf{N}_n^{-1}\left(\mathbf{y}(t) - \frac{1}{2}\mathbf{S}(t,\lambda)\right)dt\right\}$$

Алгортм обработки сигнала

$$\hat{\vartheta} = \left\{\rho\left(Y_0^T\right) \geq h\right\}$$

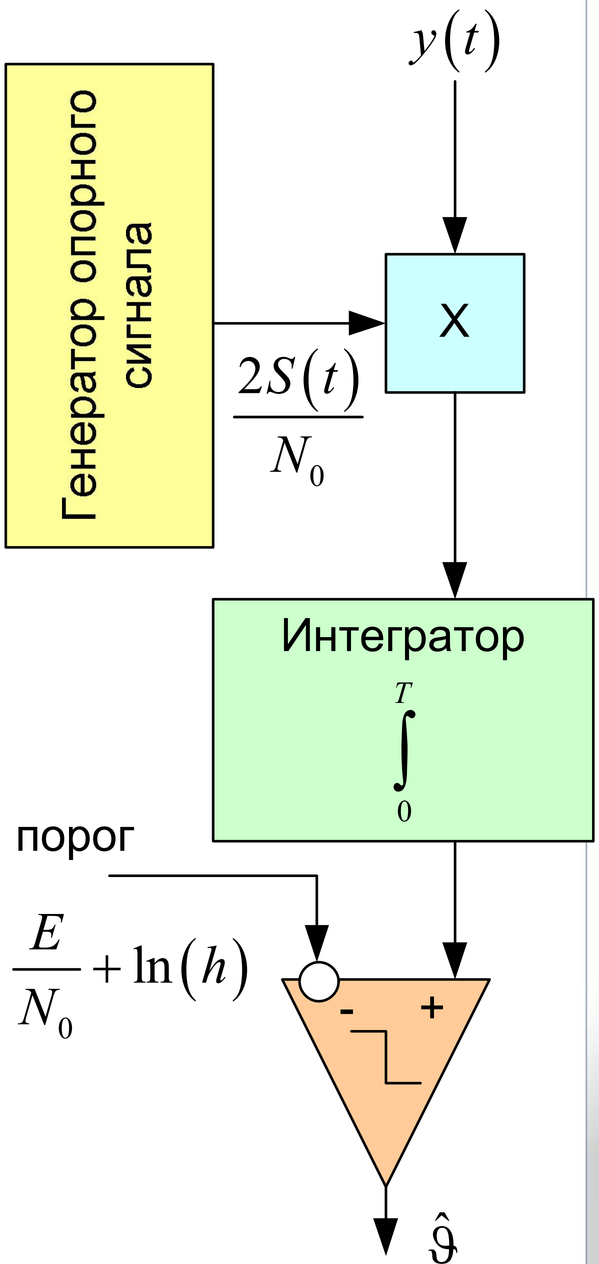
$$\exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T S(t,\lambda)\left(y(t) - \frac{1}{2}S(t,\lambda)\right)dt\right\} \geq h$$

$$\frac{2}{N_0}\int_0^T S(t,\lambda)\left(y(t) - \frac{1}{2}S(t,\lambda)\right)dt \geq \ln(h)$$

$$\frac{2}{N_0}\int_0^T S(t,\lambda)y(t)dt - \frac{1}{N_0}\int_0^T S^2(t,\lambda)dt \geq \ln(h),$$

$\int_0^T S^2(t,\lambda)dt = E$ - энергия сигнала

$$\boxed{\frac{2}{N_0}\int_0^T S(t,\lambda)y(t)dt \geq \ln(h) + \frac{E}{N_0}}$$



Критерий Неймана-Пирсона

Истинное значение ϑ	Оценка $\hat{\vartheta}$	Функция потерь $c\left(\vartheta,\hat{\vartheta}\right)$	
0	0	0	
0	1	c_{01}	- ложная тревога
1	0	c_{10}	- пропуск сигнала
1	1	0	

По критерию Неймана-Пирсона оптимальным решением считается такое, которое обеспечивает максимум вероятности правильного обнаружения (или, что тоже самое, минимум вероятности пропуска сигнала) при заданной вероятности ложной тревоги.

Решающее правило отличается только значением порога:

$$\hat{\vartheta} = \left\{\rho\left(Y_0^T\right) \geq \tilde{h}\right\}$$

Критерий Неймана-Пирсона

Порог обнаружения выбирается исходя из условия:

$$P\left(\rho\left(Y_0^T\right) \geq \tilde{h} \middle| \vartheta = 0\right) = P_{F_{\text{доп}}}$$

$P_{F_{\text{доп}}}$ – вероятность ложной тревоги (задана)