ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНОГО ЗАДАНИЯ

Расчетное задание
«Расчет статистического эквивалента корреляционной суммы»

Постановка задачи

Для решения своей задачи навигационный приемник должен производить оценивание параметров приходящих радиосигналов: грубо, но быстро - на этапе поиска; максимально точно на этапе слежения. Объединим, для наглядности, набор параметров: доплеровскую частоту ω_d, задержку τ, фазу φ, амплитуду A и т.д. в один вектор

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{vmatrix} \tau \\ \omega_d \\ \ldots \\ \varphi \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

Ось времени разобьем на интервалы, на которых параметры сигнала можно считать неизменными. Считаем, что интервалы одинаковой длительности – T (см. рисунок 1):

$$\begin{aligned} t_{k,0} &= t_k, \\ t_{k,l} &= t_{k,0} + l \cdot T_d, \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$t_{k+1,0} = t_{k,0} + L \cdot T_d = t_{k,0} + T. \tag{1.3}$$

На каждом интервале T параметры, подлежащие оцениванию, неизменны, т.е.:

- зависят от индекса *k*,
- не зависят от внутреннего индекса *l*

Смена значений происходит при смене интервала, т.е. в момент $t_{k,0} = t_{k-1,L}$.

Воспользуемся моделью для выходных отсчетов АЦП в виде аддитивной смеси шума и радионавигационного сигнала:

$$y_{k,l} = S_{k,l}\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right) + n_{k,l} \tag{1.4}$$

где $S_{k,l}\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)$ - полезный сигнал промежуточной частоты, $n_{k,l}$ - аддитивный дискретный белый гауссовский шум с дисперсией σ_n^2.

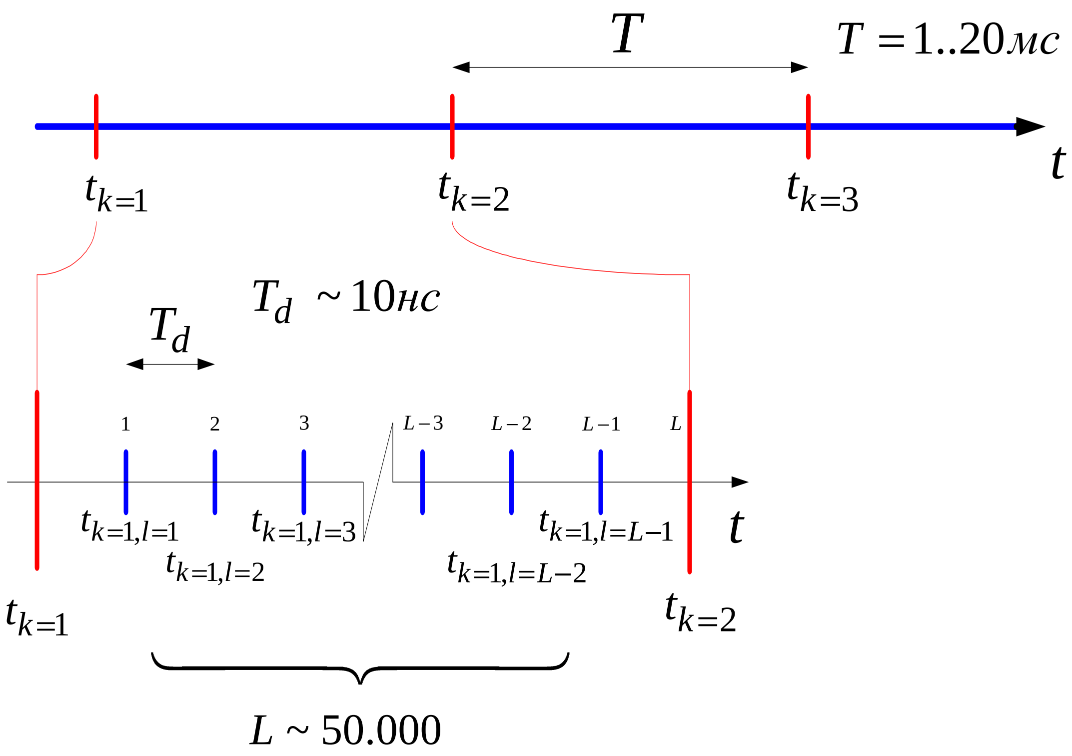

Рисунок 1 – Шкала времени приемника

Модель полезного сигнала

$$S_{k,l} = A_k \cdot G_c\left(t_{k,l} - \tau_k\right) \cdot G_{nd,k} \cdot \cos\left(\Phi_{k,l}\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)\right) \tag{1.5}$$

где

$$\Phi_{k,l}\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right) = \omega_{if} t_{k,l} + \omega_{d,k} l T_d + \varphi_k \tag{1.6}$$

- полная фаза, $A_k \in \left[0; A_{\max}\right]$ - амплитуда, $G_c\left(x\right) \in \left\{-1;+1\right\}$ - функция модуляции дальномерным кодом, $\tau_k \in \left(-\infty;+\infty\right)$ - задержка дальномерного кода, $G_{nd,k} \in \left\{-1;+1\right\}$ - символ модуляции навигационным сообщением, $\omega_{d,k} \in 2\pi \cdot \left(-10;+10\right) kHz$ - сдвиг частоты, $\varphi_k \in \left(-\infty;+\infty\right)$ - начальная фаза на интервале (см. рисунок 2).

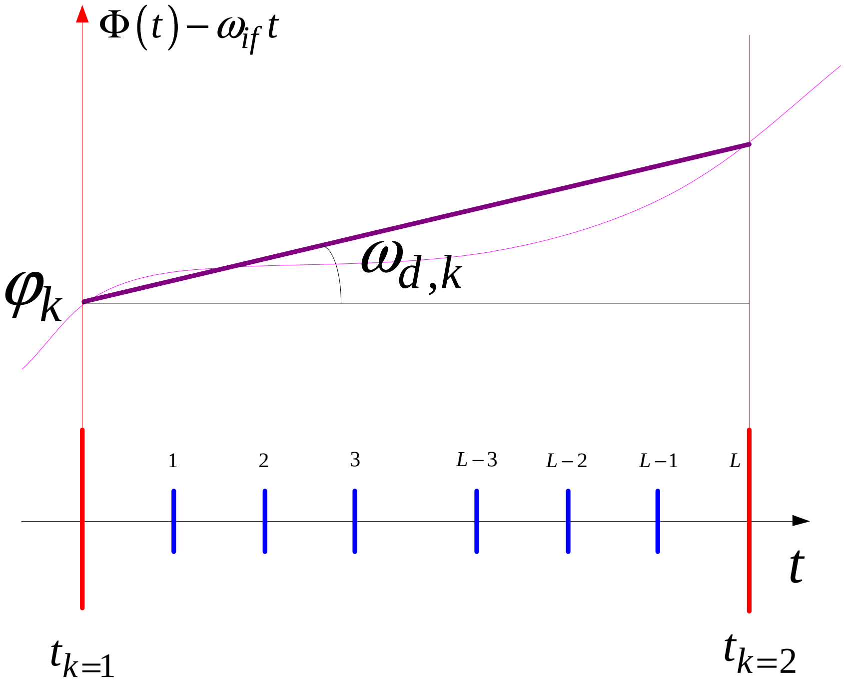

Рисунок 2 – Кусочно-линейная аппроксимация фазы

Синфазная корреляционная сумма задается выражением:

$$I_k=\sum_{l=1}^{L}y_{k,l}\cdot G_c\left(t_{k,l}-\tilde{\tau}_k\right)\cos\left(\omega_{if}t_{k,l}+\tilde{\omega}_{d,k}lT_d+\tilde{\varphi}_k\right). \qquad (1.7)$$

Требуется определить закон распределения I_k.

<u>Решение</u>

Представим синфазную корреляционную сумму в виде:

$$I_k=\bar{I}_k+n_{I,k}, \qquad (1.8)$$

где

$$\bar{I}_k=\sum_{l=1}^{L}S_{k,l}\cdot G_c\left(t_{k,l}-\tilde{\tau}_k\right)\cos\left(\omega_{if}t_{k,l}+\tilde{\omega}_{d,k}lT_d+\tilde{\varphi}_k\right), \qquad (1.9)$$

$$n_{I,k}=\sum_{l=1}^{L}n_{k,l}\cdot G_c\left(t_{k,l}-\tilde{\tau}_k\right)\cos\left(\omega_{if}t_{k,l}+\tilde{\omega}_{d,k}lT_d+\tilde{\varphi}_k\right). \qquad (1.10)$$

Величина $n_{I,k}$ является случайной с нормальным распределением, нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_{IQ}^2 (см. рисунок 3):

$$n_{I,k} = n_{k,1}\cos\left(\zeta_1\right) + n_{k,2}\cos\left(\zeta_2\right) + n_{k,3}\cos\left(\zeta_3\right) + \ldots \sim N\left(0, \sigma_{IQ}^2\right) \qquad (1.11)$$

$$\sigma_{IQ}^2 = \frac{\sigma_n^2 L}{2}. \qquad (1.12)$$

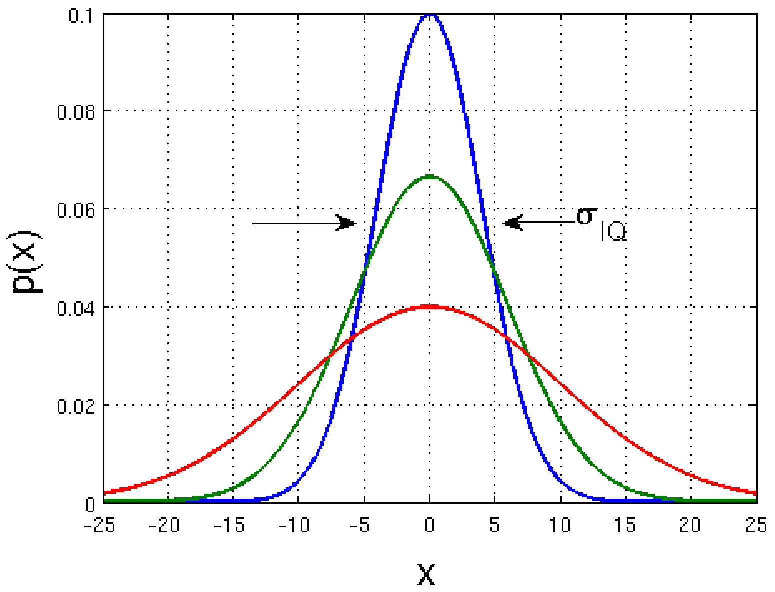

Рисунок 3 – Нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием

Величина $\bar{I}_k$ является детерминированной функцией от параметров опорного сигнала и параметров навигационного сигнала:

$$\begin{aligned}\bar{I}_k &= \sum_{l=1}^{L} S_{k,l} \cdot G_c\left(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k\right)\cos\left(\omega_{if} t_{k,l} + \tilde{\omega}_{d,k} l T_d + \tilde{\varphi}_k\right) = \\ &= A\sum_{l=1}^{L} G_c\left(t_{k,l} - \tau_k\right) G_c\left(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k\right) G_{nd,k}\cos\left(\omega_{if} t_{k,l} + \omega_{d,k} l T_d + \varphi_k\right) \times \\ &\quad \times \cos\left(\omega_{if} t_{k,l} + \tilde{\omega}_{d,k} l T_d + \tilde{\varphi}_k\right).\end{aligned} \qquad (1.13)$$

Откуда

$$\bar{I}_k \approx \frac{1}{2} A G_{nd,k} \sum_{l=1}^{L} G_c\left(t_{k,l} - \tau_k\right) G_c\left(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k\right)\cos\left(\delta\omega_{d,k} l T_d + \delta\varphi_k\right), \qquad (1.14)$$

$$
\begin{aligned}
&\delta\tau_k = \tau_k - \tilde{\tau}_k, \\
&\delta\omega_{d,k} = \omega_{d,k} - \tilde{\omega}_{d,k}, \\
&\delta\varphi_k = \varphi_k - \tilde{\varphi}_k.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

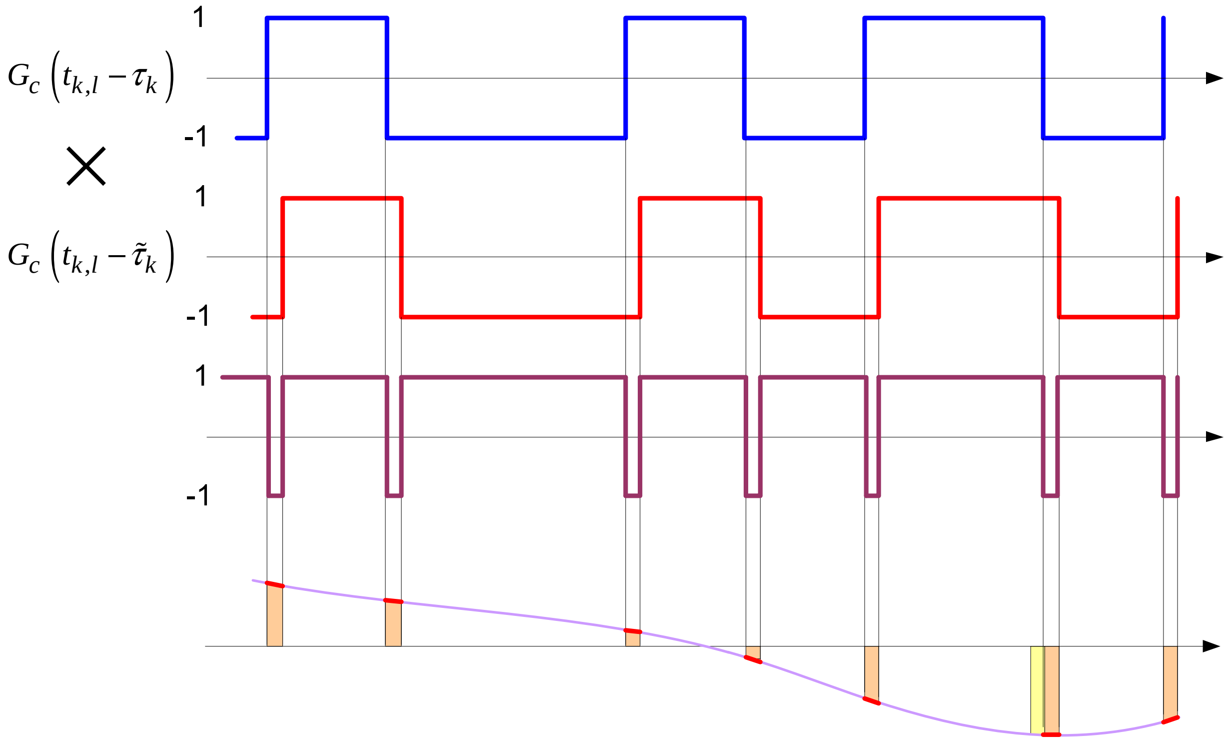

Рисунок 4 – Перемножение функций в (1.14)

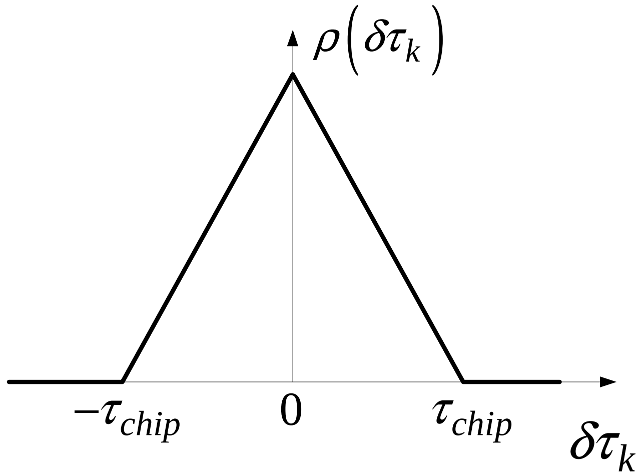

Рисунок 5 – Вид функции $\rho\left(\delta\tau_k\right)$ при использовании случайных последовательностей в качестве дальномерного кода

Введем функцию (см. рисунок 5)

$$
\rho\left(\delta\tau_k\right) = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} G_c\left(t_{k,l}-\tau_k\right) G_c\left(t_{k,l}-\tilde{\tau}_k\right). \tag{1.16}
$$

При малых ошибка подстройки частоты справедливо приближение

$$\bar{I}_k \approx \frac{1}{2} A G_{nd,k} \rho\left(\delta\tau_k\right) \sum_{l=1}^{L} \cos\left(\delta\omega_{d,k} l T_d + \delta\varphi_k\right). \tag{1.17}$$

Проведем ряд преобразований

$$\sum_{l=1}^{L} \cos\left(\delta\omega_{d,k} l T_d + \delta\varphi_k\right) = \\ = \frac{1}{T_d} \sum_{l=1}^{L} \cos\left(\delta\omega_{d,k} l T_d + \delta\varphi_k\right) T_d \approx \frac{1}{T_d} \int_0^T \cos\left(\delta\omega_{d,k} t + \delta\varphi_k\right) dt, \tag{1.18}$$

$$\cos\left(\delta\omega_{d,k} t + \delta\varphi_k\right) = \cos\left(\delta\omega_{d,k} t\right) \cos\left(\delta\varphi_k\right) - \sin\left(\delta\omega_{d,k} t\right) \sin\left(\delta\varphi_k\right), \tag{1.19}$$

$$\cos\left(\delta\varphi_k\right) \int_0^T \cos\left(\delta\omega_{d,k} t\right) dt = \cos\left(\delta\varphi_k\right) \frac{1}{\delta\omega_{d,k}} \sin\left(\delta\omega_{d,k} t\right) \Big|_0^T \\ = \cos\left(\delta\varphi_k\right) \frac{1}{\delta\omega_{d,k}} \sin\left(\delta\omega_{d,k} T\right), \tag{1.20}$$

$$\sin\left(\delta\varphi_k\right) \int_0^T \sin\left(\delta\omega_{d,k} t\right) dt = -\sin\left(\delta\varphi_k\right) \frac{1}{\delta\omega_{d,k}} \cos\left(\delta\omega_{d,k} t\right) \Big|_0^T = \\ = -\sin\left(\delta\varphi_k\right) \frac{1}{\delta\omega_{d,k}} \left(\cos\left(\delta\omega_{d,k} T\right) - 1\right) \tag{1.21}$$

$$\int_0^T \cos\left(\delta\omega_{d,k} t + \delta\varphi_k\right) dt = \\ = \frac{\sin\left(\delta\omega_{d,k} T\right) \cos\left(\delta\varphi_k\right) + \cos\left(\delta\omega_{d,k} T\right) \sin\left(\delta\varphi_k\right) - \sin\left(\delta\varphi_k\right)}{\delta\omega_{d,k}}, \tag{1.22}$$

$$\int_0^T \cos\left(\delta\omega_{d,k} t + \delta\varphi_k\right) dt = \frac{\sin\left(\delta\omega_{d,k} T + \delta\varphi_k\right) - \sin\left(\delta\varphi_k\right)}{\delta\omega_{d,k}}, \tag{1.23}$$

$$\int_0^T \cos\left(\delta\omega_{d,k} t + \delta\varphi_k\right) dt = \frac{2 \sin\left(\dfrac{\delta\omega_{d,k} T}{2}\right) \cos\left(\delta\varphi_k + \dfrac{\delta\omega_{d,k} T}{2}\right)}{\delta\omega_{d,k}}, \tag{1.24}$$

Объединяя результаты получаем искомое выражение для $\overline{I}_k$:

$$\overline{I}_k \approx \frac{1}{2} A G_{nd,k} \rho\left(\delta\tau_k\right) \frac{2\sin\left(\frac{\delta\omega_{d,k}T}{2}\right)\cos\left(\delta\varphi_k + \frac{\delta\omega_{d,k}T}{2}\right)}{\delta\omega_{d,k}T_d}, \tag{1.25}$$

$$\overline{I}_k \approx \frac{AL}{2} G_{nd,k} \rho\left(\delta\tau_k\right) \frac{\sin\left(\frac{\delta\omega_{d,k}T}{2}\right)\cos\left(\delta\varphi_k + \frac{\delta\omega_{d,k}T}{2}\right)}{\frac{\delta\omega_{d,k}T_d L}{2}}, \tag{1.26}$$

$$\overline{I}_k \approx \frac{AL}{2} G_{nd,k} \rho\left(\delta\tau_k\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\delta\omega_{d,k}T}{2}\right)\cos\left(\delta\varphi_k + \frac{\delta\omega_{d,k}T}{2}\right). \tag{1.27}$$

Выражения (1.8), (1.11), (1.12), (1.27) задают искомый статистический эквивалент синфазной корреляционной суммы.