Лекция 5. Различение сигналов

Различение 2-х детерминированных сигналов

Постановка задачи:

$$y(t) = \vartheta S_1(t) + (1-\vartheta) S_2(t) + n(t), \quad t \in [0,T], \quad \vartheta = \{0,1\}$$

Заданы сигналы $S_1(t)$, $S_2(t)$, и априорная вероятность приема сигнала $S_1(t)$: $P(\vartheta = 1) = P_{ap}(1)$. $n(t)$ - БГШ с СПМ N_0

Задача сводится к задаче оценивания бинарного параметра ϑ и решается аналогично задаче обнаружения сигнала. Решающее правило --------→

$$\boxed{\rho\left(Y_0^T\right) > \left(\frac{P_{ap}(0)}{P_{ap}(1)} = h\right)}$$

Отношение правдоподобия для задачи различения 2-х сигналов

$$P\left(Y_0^T|\vartheta=1\right)=k\exp\left\{-\frac{E_1}{N_0}+\frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)S_1(t)dt\right\},\quad E_1=\int_0^T S_1^2(t)dt \longleftarrow$$

$$P\left(Y_0^T|\vartheta=0\right)=k\exp\left\{-\frac{E_2}{N_0}+\frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)S_2(t)dt\right\},\quad E_2=\int_0^T S_2^2(t)dt \longleftarrow$$

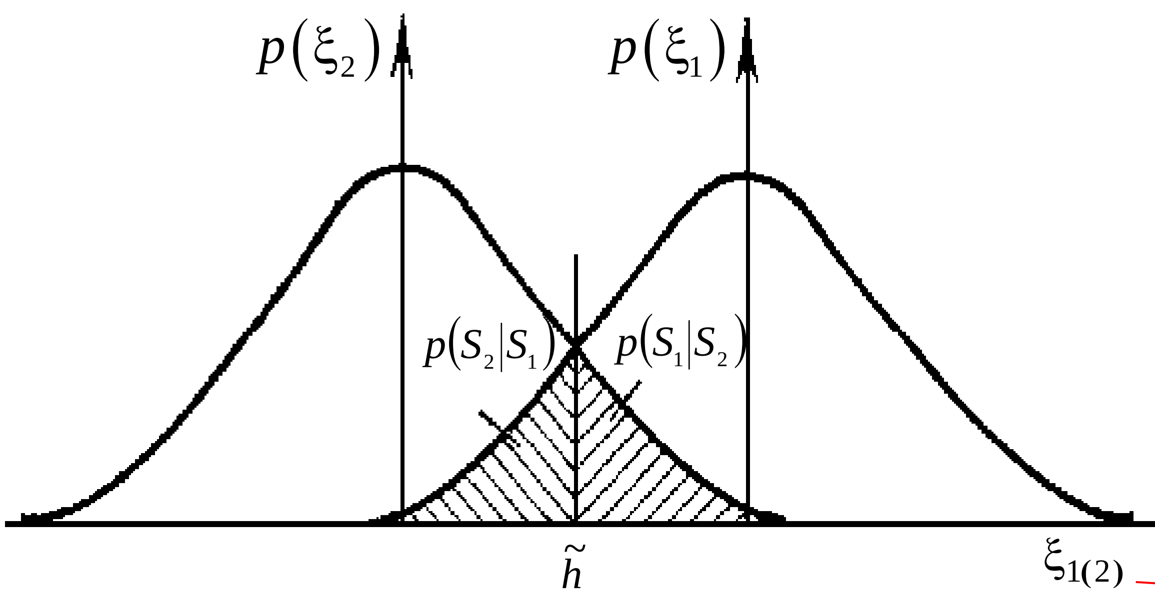
Энергии сигналов

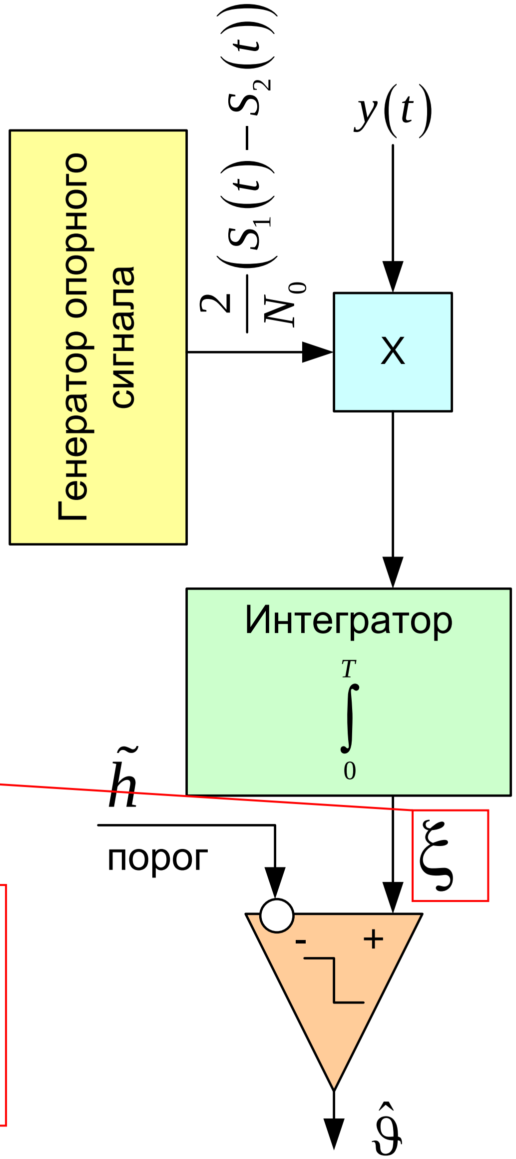
$$\boxed{\rho\left(Y_0^T\right)=\frac{P\left(Y_0^T|\vartheta=1\right)}{P\left(Y_0^T|\vartheta=0\right)}=\exp\left\{-\frac{E_1-E_2}{N_0}+\frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)\left(S_1(t)-S_2(t)\right)dt\right\}}$$

Решающее правило (алгоритм) после логарифмирования:

$$\frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)(S_1(t)-S_2(t))dt>\ln\frac{P_{ap}(0)}{P_{ap}(1)}+\frac{E_1-E_2}{N_0}=\tilde{h}$$

Вероятность суммарной ошибки различения





$$P_{\text{ош}} = P_{ap}(1)\int_{-\infty}^{\tilde{h}} p(\xi_1)d\xi_1 + P_{ap}(0)\int_{\tilde{h}}^{\infty} p(\xi_2)d\xi_2$$

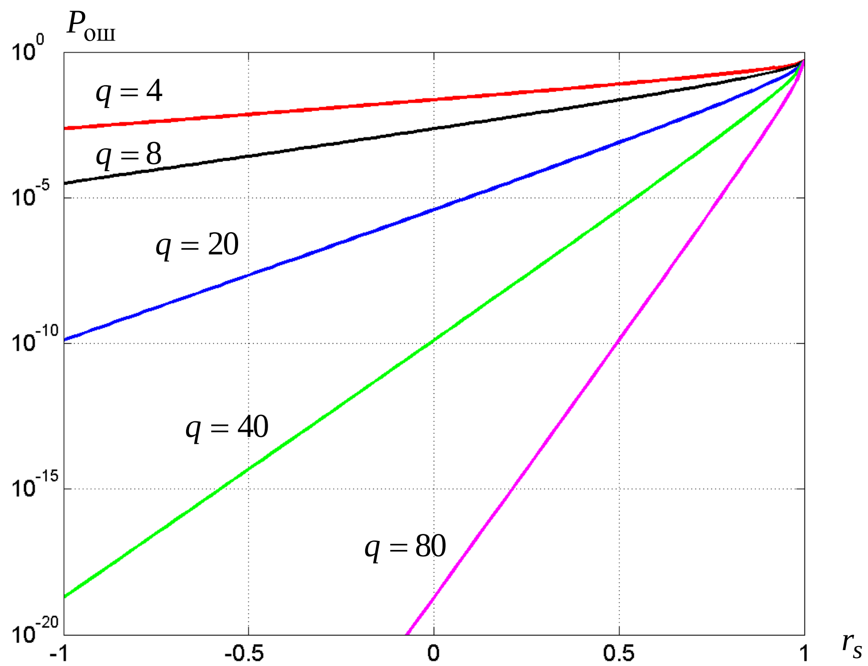
Вероятность суммарной ошибки различения

Частный случай: $E_1 = E_2 = E, \quad P_{ap}(1) = P_{ap}(0) = 0,5,$

$q = E / N_0$ - отношение с/ш

$r_s = \dfrac{1}{E}\int\limits_0^T S_1(\tau) S_2(\tau) d\tau$ - взаимная энергия между сигналами

$$\boxed{P_{\text{ош}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{q(1 - r_s)}\right)}$$



Вероятности ошибки для разных видов модуляции

ФМ2: $S_1(t) = A\cos(\omega t),\quad S_2(t) = -A\cos(\omega t),\quad r_s = -1,\ P_{\text{ош}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{2q}\right)$

ЧМ: $S_1(t) = A\cos(\omega_1 t),\quad S_2(t) = A\cos(\omega_2 t),\quad r_s \approx 0$ при $(\omega_2 - \omega_1)T >> 1,$

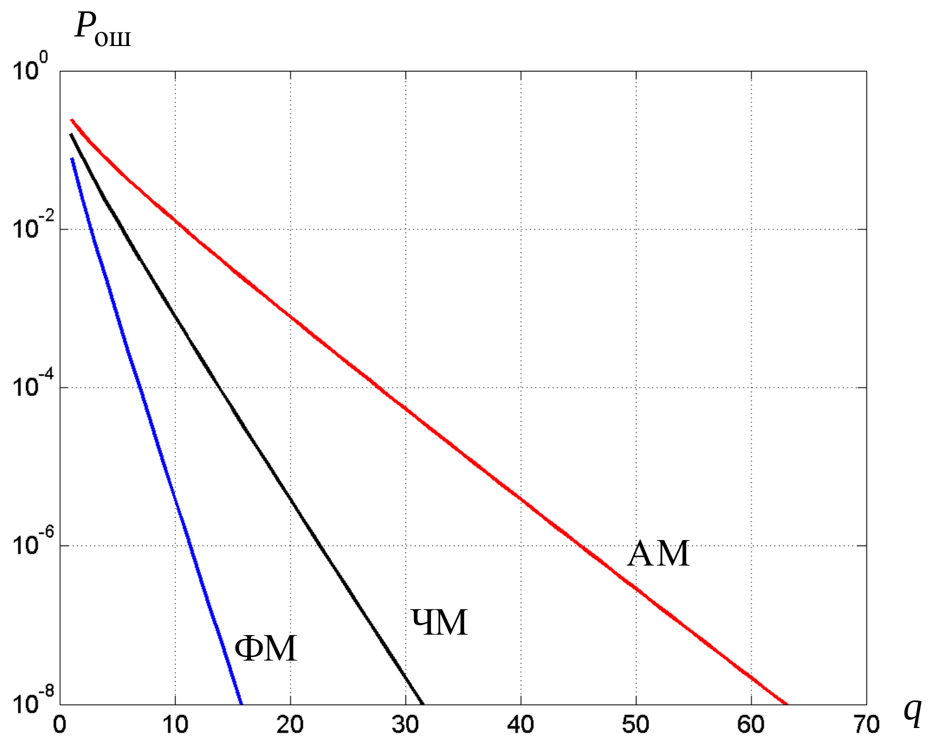
$$P_{\text{ош}} = 1 - \Phi\left(\sqrt{q}\right)$$

АМ:

$$S_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

$$S_2(t) = 0,\quad (E_2 = 0) \neq \left(E_1 = \frac{A^2 T}{2}\right)$$

$$P_{\text{ош}} = 1 - \Phi\left(0{,}5\sqrt{2q}\right)$$



Жизненный пример:

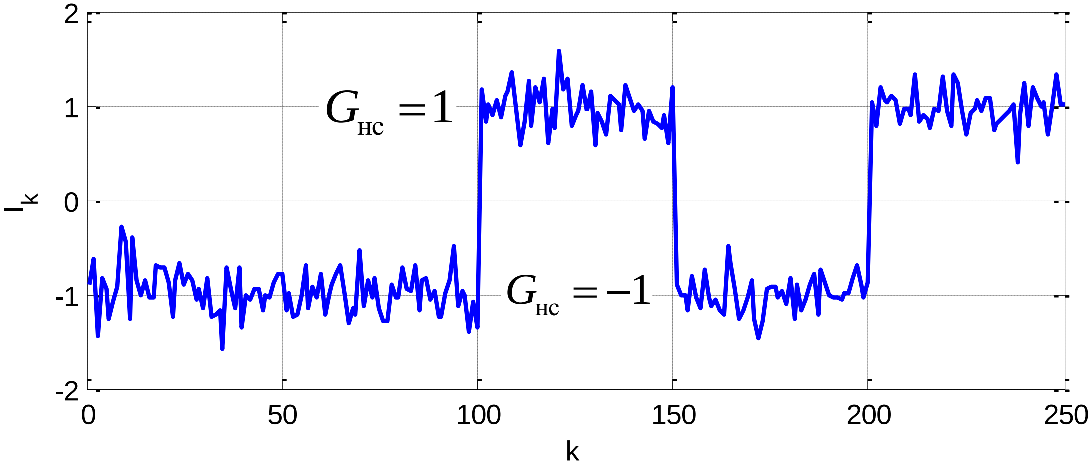
Выделение бит навигационного сообщения сигнала СРНС

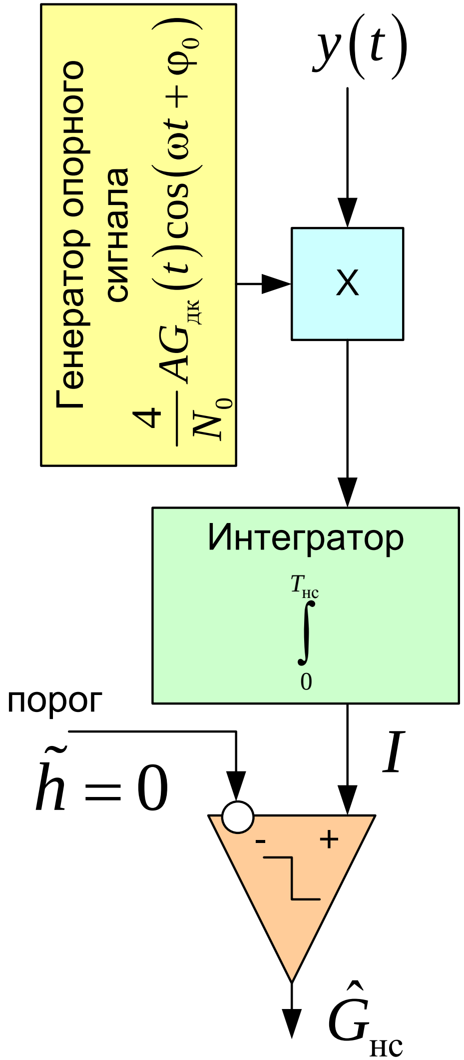
$$S(t) = AG_{\text{нс}} \cdot G_{\text{дк}}(t)\cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$t \in [0, T_{\text{НС}}], \quad G_{\text{нс}} = \{+1, -1\} - ?$$

$$S_1(t) = AG_{\text{дк}}(t)\cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$S_2(t) = -AG_{\text{дк}}(t)\cos(\omega t + \varphi_0)$$





Различение m детерминированных сигналов

$$y(t) = S_i(t) + n(t), \quad i = \overline{1,m}, \quad t \in [0, T]$$

i – случайный дискретный параметр, принимающий значения 1…m

Априорные вероятности приема заданы для каждого i-го сигнала:

$$P_{ap}\left(S_i(t)\right) = P_{ap,i}$$

$$\sum_{i=1}^{m} P_{ap,i} = 1$$

Требуется найти i, а точнее решающее правило для оценивания i.

Решающее правило

Примем байесовское решающее правило для простой функции потерь: максимум апостериорной вероятности (см. занятие 3).

$$\boxed{\hat{i} = \arg\max_{i} \left(P\left(i \middle| Y_0^T\right)\right)}$$

По формуле Байеса: $P\left(i \middle| Y_0^T\right) p\left(Y_0^T\right) = p\left(Y_0^T \middle| i\right) P(i)$

$$P\left(i \middle| Y_0^T\right) = c_1 \cdot \rho\left(Y_0^T \middle| i\right) P_{ap,i} = c_1 \cdot P_{ap,i} \cdot \exp\left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T S_i(t)\left(y(t) - 0{,}5 S_i(t)\right) dt \right\}$$

$$\hat{i} = \arg\max_{i} P\left(i \middle| Y_0^T\right) = \arg\max_{i} \left(\ln\left(P\left(i \middle| Y_0^T\right)\right)\right)$$

$$\ln\left(P\left(i \middle| Y_0^T\right)\right) = \ln(c_1) + \ln\left(P_{ap,i}\right) + \frac{2}{N_0} \int_0^T S_i(t)\left(y(t) - 0{,}5 S_i(t)\right) dt$$

Алгоритм различения

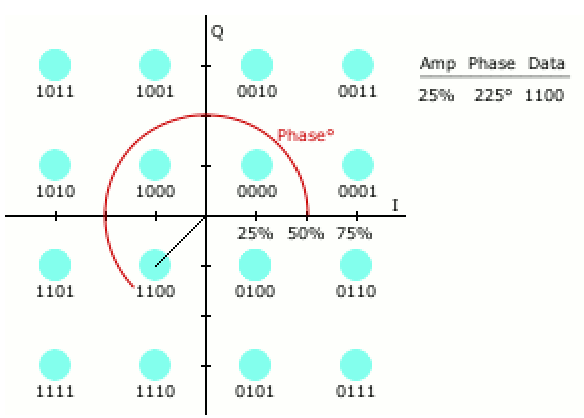
$$\frac{2}{N_0}\int_0^T S_i(t)\left(y(t)-0{,}5S_i(t)\right)dt=\frac{2}{N_0}\int_0^T S_i(t)y(t)dt-\frac{1}{N_0}\int_0^T S_i^2(t)dt=$$

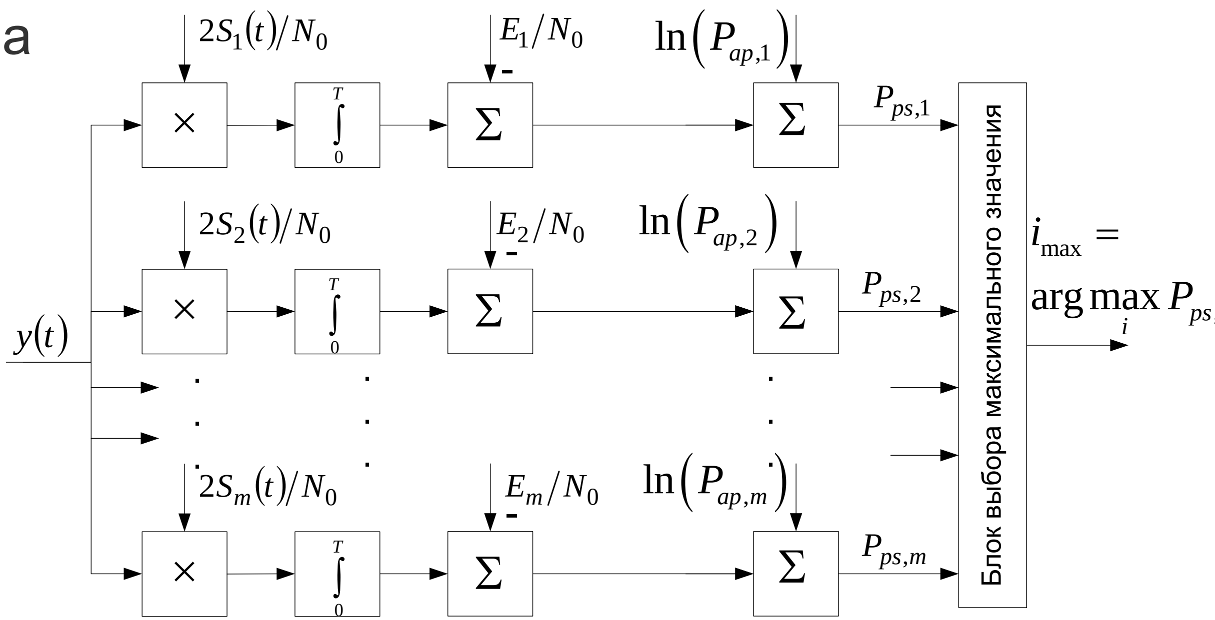
$$=\frac{2}{N_0}\int_0^T S_i(t)y(t)dt-\frac{E_i}{N_0}=u_{\text{к}i}$$

$$\hat{i}=\arg\max_i\left(\cancel{\ln(c_1)}+\ln\left(P_{ap,i}\right)+\frac{2}{N_0}\int_0^T S_i(t)y(t)dt-\frac{E_i}{N_0}\right)$$

Пример: приём сигнала

КАМ16 (QAM16)





Разрешение сигналов

«Разрешение – обнаружение» сигналов

- задача обнаружения сигнала $S_1(t)$ на фоне мешающих сигналов $S_i(t),\ i=\overline{2,m}$ и аддитивного шума $n(t)$

Рассмотрим задачу с двумя сигналами:

$$y(t)=\vartheta S_1(t)+S_2(t)+n(t),\qquad t\in[0,T],$$

$$P(\vartheta=1)=P_{ap}(1),\quad P(\vartheta=0)=P_{ap}(0),$$

$S_1(t),S_2(t)$ - известны, $n(t)$ - БГШ с СПМ N_0

Общее решение двухальтернативной задачи обнаружения известно:

$$\boxed{\hat{\vartheta}=\left\{\rho\left(Y_0^T\right)\geq\left(\frac{P_{ap}(0)}{P_{ap}(1)}\equiv h_0\right)\right\}}$$

«Разрешение-обнаружение» сигналов. Отношение правдоподобия

$$\rho\left(Y_0^T\right)=\frac{P\left(Y_0^T\,|\,\vartheta=1\right)}{P\left(Y_0^T\,|\,\vartheta=0\right)}$$

$$P\left(Y_0^T\,|\,\vartheta=1\right)=k\exp\left\{-\frac{2}{N_0}\int_0^T\left(S_1(t)+S_2(t)\right)\left(y(t)-0{,}5\left(S_1(t)+S_2(t)\right)\right)dt\right\}$$

$$P\left(Y_0^T\,|\,\vartheta=0\right)=k\exp\left\{-\frac{2}{N_0}\int_0^T S_2(t)\left(y(t)-0{,}5S_2(t)\right)dt\right\}$$

$$\rho\left(Y_0^T\right)=\exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T S_1(t)\left(y(t)-0{,}5S_1(t)\right)dt-\frac{2}{N_0}\int_0^T S_1(t)S_2(t)dt\right\}$$

$$\hat{\vartheta}=\left\{\rho\left(Y_0^T\right)\geq h_0\right\}$$ - отсюда алгоритм оптимального обнаружителя:

$$\boxed{\frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)S_1(t)dt\geq\frac{E_1}{N_0}+\ln\left(h_0\right)+\frac{2E_{12}}{N_0}}$$

- по сравнению с обычным обнаружителем изменился только порог обнаружения

«Разрешение-измерение» сигналов.

- задача оценки параметров λ сигнала $S(t,\lambda)$ на фоне аддитивного шума $n(t)$ и мешающего сигнала $S(t,\lambda')$

Рассмотрим наблюдение:

$$y(t) = S(t,\lambda) + S(t,\lambda') + n(t), \quad t \in [0,T],$$

структура $S(t)$ известна, $n(t)$ - БГШ с СПМ N_0

требуется оценить λ

Пример: многолучёвость