**Функция Бесселя**

Определение

$$I_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x\cos(u)}\,du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{x\cos(u)}\,du\,.$$

Рассмотрим задачу усреднения отношения правдоподобия по случайной начальной фазе сигнала.

На вход системы обработки (приемника) поступают $N$ отсчетов

$$y(t)=s(t,\tilde{\varphi})+n(t), \tag{1}$$

где $s(t,\tilde{\varphi})$ — сигнал со случайной начальной фазой $\tilde{\varphi}$, $n(t)$ — белый гауссовский шум со спектральной $N_0/2$.

Отношение правдоподобия описывается соотношением

$$\rho\left(Y_1^N|\tilde{\varphi}\right)=\frac{p\left(Y_1^N|\tilde{\varphi}\right)}{p\left(Y_1^N|s=0\right)}=\exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T s(t,\tilde{\varphi})\left(y(t)-0{,}5s(t,\tilde{\varphi})\right)dt\right\} \tag{2}$$

Усредним (2) по $\tilde{\varphi}$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\rho\left(Y_1^N|\tilde{\varphi}\right)p_{ap}(\tilde{\varphi})\,d\tilde{\varphi}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T s(t,\tilde{\varphi})\left(y(t)-0{,}5s(t,\tilde{\varphi})\right)dt\right\}d\tilde{\varphi}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{1}{N_0}\int_0^T s^2(t,\tilde{\varphi})\,dt\right\}d\tilde{\varphi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T s(t,\tilde{\varphi})\,y(t)\,dt\right\}d\tilde{\varphi}=$$

$$=\exp\left(-\frac{E}{N_0}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T s(t,\tilde{\varphi})\,y(t)\,dt\right\}d\tilde{\varphi}\,. \tag{3}$$

Рассмотрим сигнал $s(t,\tilde{\varphi})=A\cos(\omega t+\tilde{\varphi})$ и подставим данное выражение во второй сомножитель (3) (3)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T s(t,\tilde{\varphi})\,y(t)\,dt\right\}d\tilde{\varphi}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{2A}{N_0}\int_0^T \cos(\omega t+\tilde{\varphi})\,y(t)\,dt\right\}d\tilde{\varphi}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{2A}{N_0}\int_0^T\left[\cos(\omega t)\cos(\tilde{\varphi})-\sin(\omega t)\sin(\tilde{\varphi})\right]y(t)\,dt\right\}d\tilde{\varphi}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{2A}{N_0}\int_0^T\left[y(t)\cos(\omega t)\cos(\tilde{\varphi})-y(t)\sin(\omega t)\sin(\tilde{\varphi})\right]dt\right\}d\tilde{\varphi}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{2A}{N_0}\int_0^T y(t)\cos(\omega t)\,dt\cos(\tilde{\varphi})-\frac{2A}{N_0}\int_0^T y(t)\sin(\omega t)\,dt\sin(\tilde{\varphi})\right\}d\tilde{\varphi}\,. \tag{4}$$

Обозначим

$$I = \frac{2A}{N_0}\int_0^T y(t)\cos(\omega t)\,dt\,, \quad Q = \frac{2A}{N_0}\int_0^T y(t)\sin(\omega t)\,dt \tag{5}$$

и рассмотрим

$$I\cos(\tilde{\varphi}) - Q\sin(\tilde{\varphi}) =$$

$$= \sqrt{I^2+Q^2}\left(\frac{I}{\sqrt{I^2+Q^2}}\cos(\tilde{\varphi}) - \frac{Q}{\sqrt{I^2+Q^2}}\sin(\tilde{\varphi})\right). \tag{6}$$

Введем

$$\cos(\psi) = \frac{I}{\sqrt{I^2+Q^2}}\,,\ \sin(\psi) = \frac{Q}{\sqrt{I^2+Q^2}}\,,$$

что допустимо, т.к. $\cos^2(\psi)+\sin^2(\psi)=1$.

Тогда (6) можно записать в виде

$$I\cos(\tilde{\varphi}) - Q\sin(\tilde{\varphi}) = \sqrt{I^2+Q^2}\left[\cos(\psi)\cos(\tilde{\varphi}) - \sin(\psi)\sin(\tilde{\varphi})\right] =$$

$$= \sqrt{I^2+Q^2}\cos(\psi+\tilde{\varphi}) = X\cos(\psi+\tilde{\varphi})\,, \tag{7}$$

где

$$X = \sqrt{I^2+Q^2}\ . \tag{8}$$

С учетом (7) формула (4) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T s(t,\tilde{\varphi})\,y(t)\,dt\right\}d\tilde{\varphi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{X\cos(\psi+\tilde{\varphi})}\,d\tilde{\varphi}. \tag{9}$$

Введем $u = \psi + \tilde{\varphi}$. Тогда $du = d\tilde{\varphi}$ и учитывая периодичность функции $\cos(u)$, запишем (88) в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T s(t,\tilde{\varphi})\,y(t)\,dt\right\}d\tilde{\varphi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{X\cos(\psi+\tilde{\varphi})}\,d\tilde{\varphi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{X\cos(u)}\,du = I_0(X)\,. \tag{10}$$

Отметим, что здесь $X$ определено в соответствии с (8), в котором $I$ и $Q$ определены в соответствии с (5), т.е. с включением множителя $\frac{2A}{N_0}$.