# Лекция 4.
# Обнаружение сигналов

Постановка задачи обнаружения.

Наблюдается реализация y(t) на интервале [0,T] ($\mathbf{Y}_0^T$):

$$y_k(t_k) = \begin{cases} S(t_k, \lambda_k) + n(t_k), & \text{если сигнал присутствует,} \\ n(t_k), & \text{если сигнал отсутствует.} \end{cases}$$

или сокращённо:

$$\boxed{y_k = \vartheta S_k(\lambda_k) + n_k}$$

$\vartheta = \{0,1\}, \quad P(\vartheta = 1) = P_{ap}(1)$

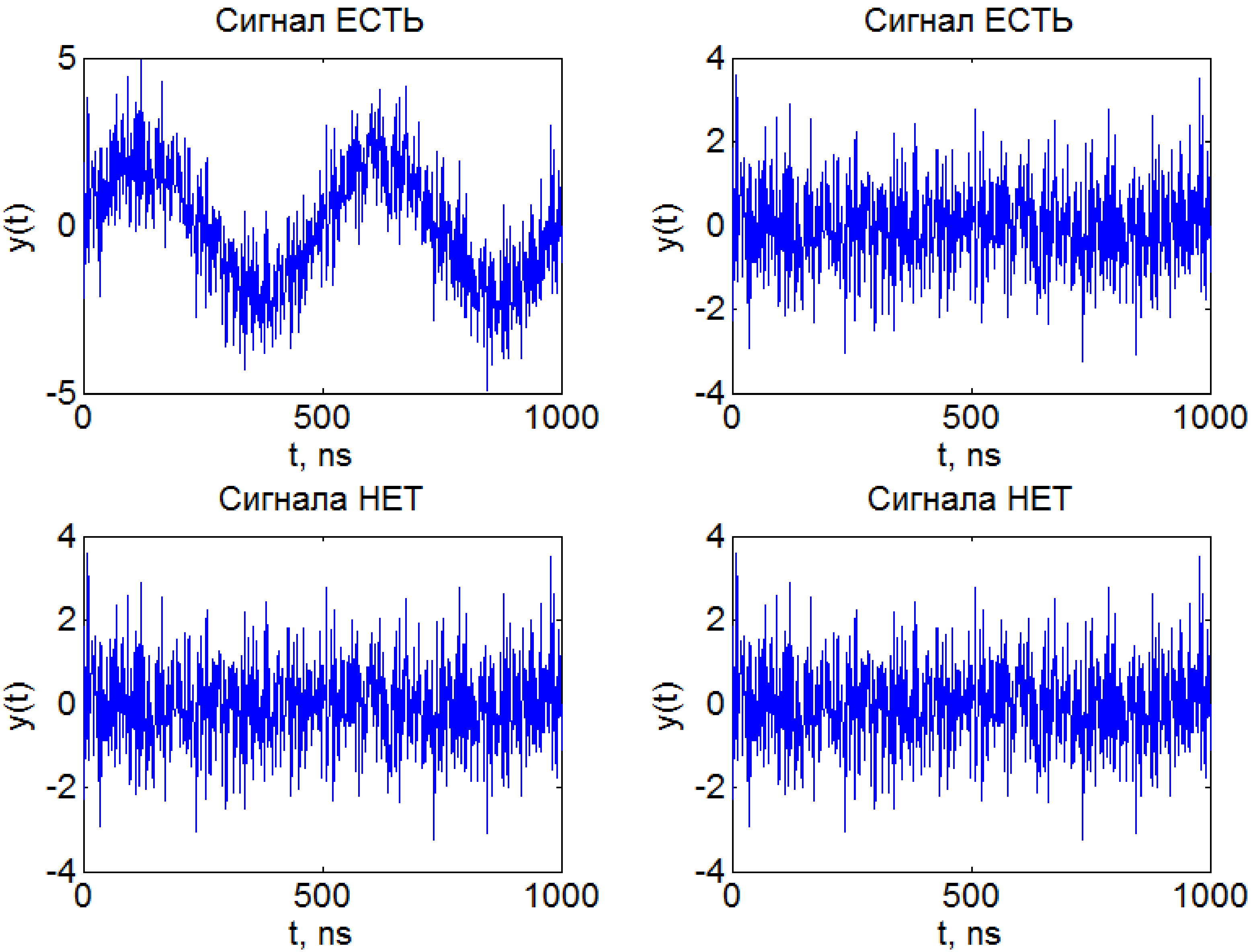
$S_k(\lambda_k)$ – известная ф-ция

$M\left[n_k^2\right] = \sigma_n^2$ – известна

**Требуется оценить** $\vartheta$

# Зачем это нужно

Примеры: радиовещание СРНС



# Обнаружение детерминированного сигнала

Байесовское решение. Простая функция потерь:

| Истинное значение $\vartheta$ | Оценка $\hat{\vartheta}$ | Функция потерь $c\left(\vartheta,\hat{\vartheta}\right)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Средний риск:

$$r\left(\mathbf{u},t\right)=\iint c\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}\left(\mathbf{Y}_0^T\right)\right)p\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{Y}_0^T\right)d\mathbf{x}(t)\,d\mathbf{Y}_0^T=$$

$$=\iint c\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}\left(\mathbf{Y}_0^T\right)\right)p\left(\mathbf{x}(t)\,|\,\mathbf{Y}_0^T\right)d\mathbf{x}(t)\,p\left(\mathbf{Y}_0^T\right)d\mathbf{Y}_0^T$$

$$\Leftrightarrow r\left(\mathrm{u}\equiv\hat{\vartheta}\right)=\int\left(\sum_{\vartheta=0}^{1}c\left(\vartheta,\hat{\vartheta}\right)P\left(\vartheta\,|\,\mathbf{Y}_0^T\right)\right)p\left(\mathbf{Y}_0^T\right)d\mathbf{Y}_0^T\rightarrow\min$$

# Обнаружение детерминированного сигнала

Оценка $\hat{\vartheta}$ такая что:

$$\hat{\vartheta} = \arg\min_{\hat{\vartheta}} \left[ r\left(\hat{\vartheta}\right) \right] = \arg\min_{\hat{\vartheta}} \left[ \int \left( \sum_{\vartheta=0}^{1} c\left(\vartheta, \hat{\vartheta}\right) P\left(\vartheta \mid \mathbf{Y}_0^T\right) \right) p\left(\mathbf{Y}_0^T\right) d\mathbf{Y}_0^T \right] =$$

$$= (\text{т.к. } p\left(\mathbf{Y}_0^T\right) \text{ не зависит от } \vartheta) = \arg\min_{\hat{\vartheta}} \left( \sum_{\vartheta=0}^{1} c\left(\vartheta, \hat{\vartheta}\right) P\left(\vartheta \mid \mathbf{Y}_0^T\right) \right) =$$

$$= \arg\min_{\hat{\vartheta}} \left( c\left(0, \hat{\vartheta}\right) P\left(0 \mid \mathbf{Y}_0^T\right) + c\left(1, \hat{\vartheta}\right) P\left(1 \mid \mathbf{Y}_0^T\right) \right)$$

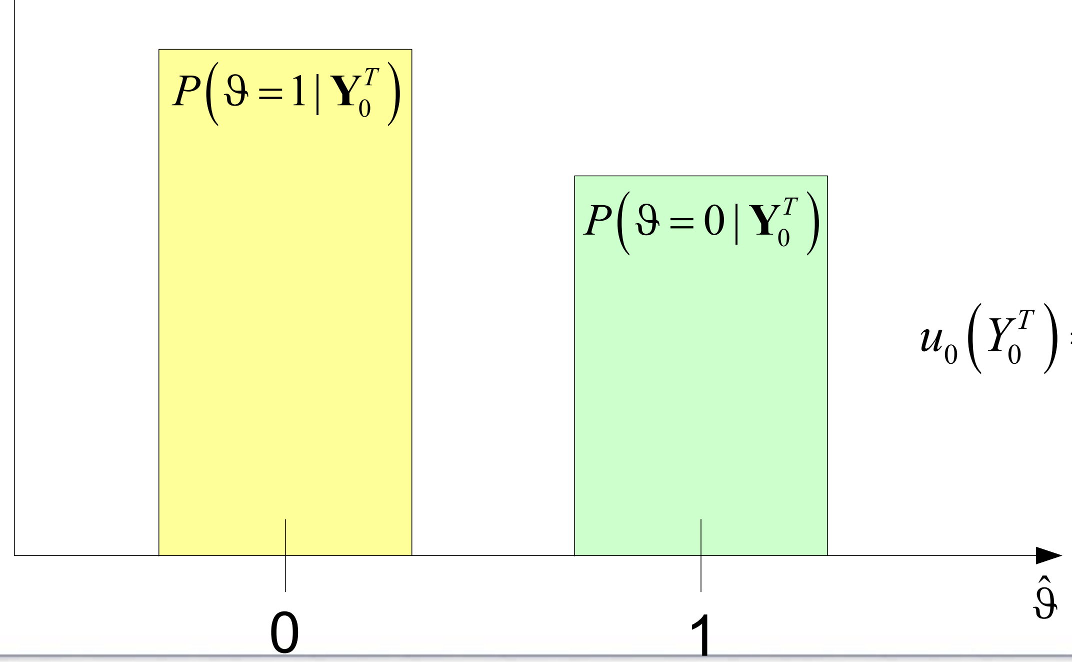
Находим $\hat{\vartheta}$ простым перебором:

| | | |
|---|---|---|
| $\hat{\vartheta} = 0$ | $c\left(0,\hat{\vartheta}\right) = 0,\ c\left(1,\hat{\vartheta}\right) = 1$ | $c\left(0,\hat{\vartheta}\right) P\left(0 \mid \mathbf{Y}_0^T\right) + c\left(1,\hat{\vartheta}\right) P\left(1 \mid \mathbf{Y}_0^T\right) = P\left(1 \mid \mathbf{Y}_0^T\right)$ |
| $\hat{\vartheta} = 1$ | $c\left(0,\hat{\vartheta}\right) = 1,\ c\left(1,\hat{\vartheta}\right) = 0$ | $c\left(0,\hat{\vartheta}\right) P\left(0 \mid \mathbf{Y}_0^T\right) + c\left(1,\hat{\vartheta}\right) P\left(1 \mid \mathbf{Y}_0^T\right) = P\left(0 \mid \mathbf{Y}_0^T\right)$ |

# Обнаружение детерминированного сигнала

| |
|---|
| Если выберем $\hat{\vartheta}=0$, то риск пропорционален $P\left(\vartheta=1 \mid \mathbf{Y}_0^T\right)$ |
| Если выберем $\hat{\vartheta}=1$, то риск пропорционален $P\left(\vartheta=0 \mid \mathbf{Y}_0^T\right)$ |

$$r_{ps}\left(\hat{\vartheta} \mid \mathbf{Y}_0^T\right)=\left(\sum_{\vartheta=0}^{1} c\left(\vartheta,\hat{\vartheta}\right)P\left(\vartheta \mid \mathbf{Y}_0^T\right)\right)=P\left(\vartheta\neq\hat{\vartheta} \mid \mathbf{Y}_0^T\right)$$




Отсюда следует решающее правило:

$$u_0\left(Y_0^T\right)=\begin{cases}\hat{\vartheta}=1, & \text{при } P\left(\vartheta=1\middle|\mathbf{Y}_0^T\right)\geq P\left(\vartheta=0\middle|\mathbf{Y}_0^T\right),\\ \hat{\vartheta}=0, & \text{при } P\left(\vartheta=1\middle|\mathbf{Y}_0^T\right)< P\left(\vartheta=0\middle|\mathbf{Y}_0^T\right).\end{cases}$$

# Как из решающего правила получается алгоритм обработки

По формуле Байеса

$$P\left(\vartheta \middle| \mathbf{Y}_0^T\right) = p\left(\mathbf{Y}_0^T \middle| \vartheta\right) P_{ap}(\vartheta) / p\left(\mathbf{Y}_0^T\right) = k P_{ap}(\vartheta)\, p\left(\mathbf{Y}_0^T \middle| \vartheta\right)$$

Если $\dfrac{p\left(\mathbf{Y}_0^T \middle| \vartheta = 1\right)}{p\left(\mathbf{Y}_0^T \middle| \vartheta = 0\right)} \geq \dfrac{P_{ap}(0)}{P_{ap}(1)}$, то $\hat{\vartheta} = 1$

$$\rho\left(\mathbf{Y}_0^T\right) = \frac{p\left(\mathbf{Y}_0^T \middle| \vartheta = 1\right)}{p\left(\mathbf{Y}_0^T \middle| \vartheta = 0\right)}$$ - отношение правдоподобия

$$h = \frac{P_{ap}(0)}{P_{ap}(1)}$$ - порог сравнения

# Отношение правдоподобия

Рассмотрим дискретный сигнал: $y_k = S_k(\lambda) + n_k, \quad k = \overline{1,m}$

$$p\left(\mathbf{Y}_1^m \middle| S_k(\lambda), k = \overline{1,m}\right) = p\left(y_1 \middle| S_1(\lambda)\right) \cdot p\left(y_2 \middle| S_2(\lambda)\right) \cdots p\left(y_m \middle| S_m(\lambda)\right)$$

$$p\left(y_k \middle| S_k(\lambda)\right) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\left(y_k - S_k(\lambda)\right)^2\right\}$$

$$p\left(y_1, y_2, \ldots, y_m \middle| S_k(\lambda), k = \overline{1,m}\right) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{m/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m}\left(y_k - S_k(\lambda)\right)^2\right\} \Rightarrow$$

$$\rho\left(\mathbf{Y}_1^m\right) = \frac{p\left(\mathbf{Y}_1^m \middle| S_k(\lambda), k = \overline{1,m}\right)}{p\left(\mathbf{Y}_1^m \middle| 0, k = \overline{1,m}\right)} = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m}\left(y_k - S_k(\lambda)\right)^2\right\} \Big/ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m} y_k^2\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m} S_k(\lambda)\left(y_k - \frac{1}{2} S_k(\lambda)\right)\right\}$$

# Отношение правдоподобия

Отношение правдоподобия для непрерывного времени:

$$\rho\left(\mathbf{Y}_0^T\right) = \exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T S(t,\lambda)\left(y(t) - \frac{1}{2}S(t,\lambda)\right)dt\right\}$$

Отношение правдоподобия для векторных сигналов и сообщений:

$$\rho\left(\mathbf{Y}_0^M\right) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{M}\mathbf{S}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{D}_n^{-1}\left(\mathbf{y}_k - \frac{1}{2}\mathbf{S}_k(\boldsymbol{\lambda})\right)\right\}$$

$$\rho\left(\mathbf{Y}_0^T\right) = \exp\left\{\int_0^T \mathbf{S}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{\lambda})2\mathbf{N}_n^{-1}\left(\mathbf{y}(t) - \frac{1}{2}\mathbf{S}(t,\boldsymbol{\lambda})\right)dt\right\}$$

# Алгоритм обработки сигнала

$$\hat{\vartheta} = \left\{ \rho\left(\mathbf{Y}_0^T\right) \geq h \right\}$$

$$\exp\left\{ \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{m} S_k(\lambda)\left( y_k - \frac{1}{2} S_k(\lambda) \right) \right\} \geq h$$

$$\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{m} S_k(\lambda)\left( y_k - \frac{1}{2} S_k(\lambda) \right) \geq \ln(h)$$

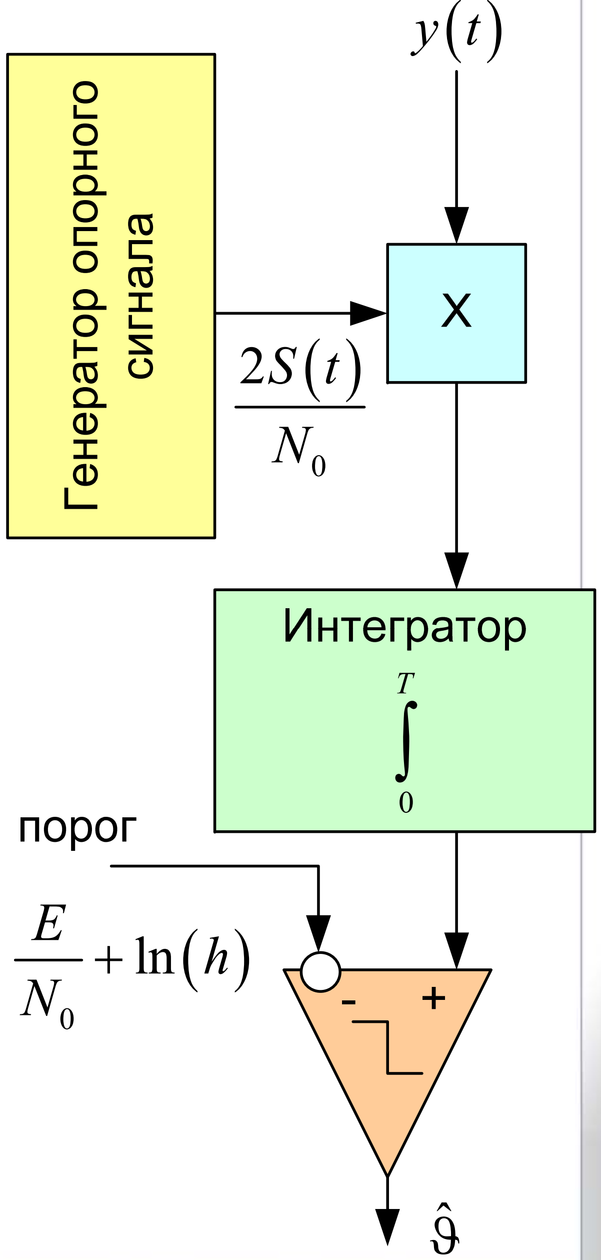
$$\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{m} y_k S_k(\lambda) - \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{m} S_k^2(\lambda) \geq \ln(h),$$

$\sum_{k=1}^{m} S_k^2(\lambda) dt = E$ - энергия сигнала

$$\boxed{\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{m} y_k S_k(\lambda) \geq \ln(h) + \frac{E}{N_0}}$$

$dt = t_k - t_{k-1}$ - шаг дискретизации

$N_0 = 2\sigma_n^2 dt$- спектральная плотность шума $n_k$



# Критерий Неймана-Пирсона

| Истинное значение $\vartheta$ | Оценка $\hat{\vartheta}$ | Функция потерь $c\left(\vartheta, \hat{\vartheta}\right)$ | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | $c_{01}$ | - ложная тревога |
| 1 | 0 | $c_{10}$ | - пропуск сигнала |
| 1 | 1 | 0 | |

По <u>критерию Неймана-Пирсона</u> оптимальным решением считается такое, которое обеспечивает максимум вероятности правильного обнаружения (или, что тоже самое, минимум вероятности пропуска сигнала) при заданной вероятности ложной тревоги.

Решающее правило отличается только значением порога:

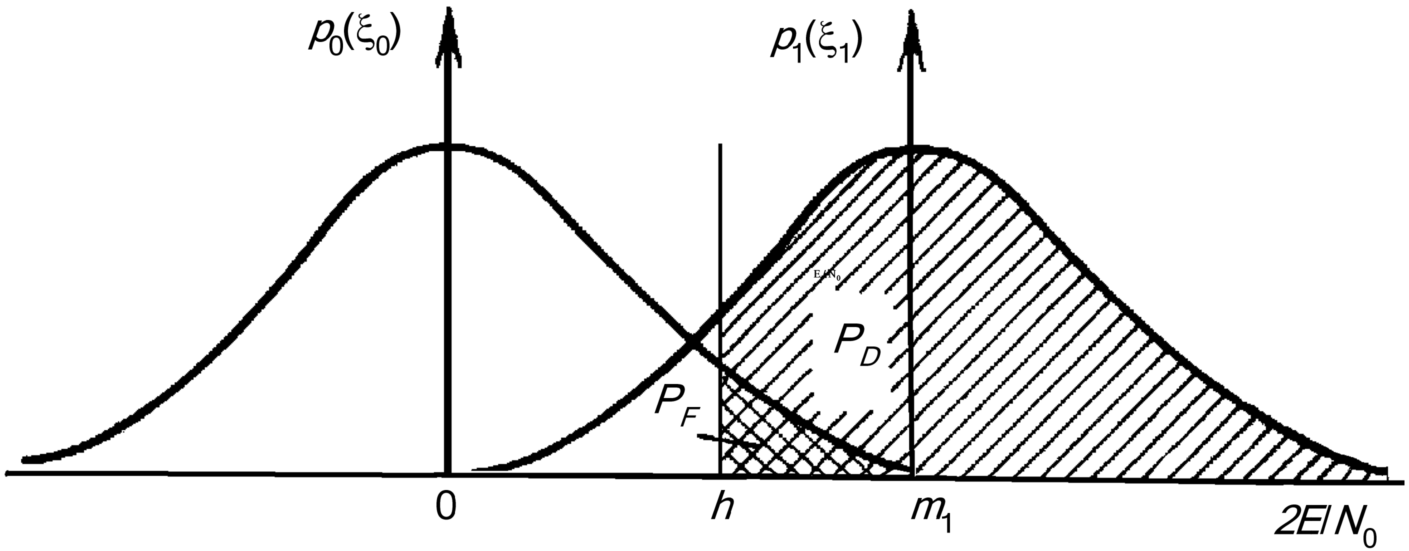
$$\hat{\vartheta} = \left\{ \rho\left( \mathbf{Y}_0^T \right) \geq \tilde{h} \right\}$$

# Критерий Неймана-Пирсона

Порог обнаружения выбирается исходя из условия:

$$P\left(\rho\left(\mathbf{Y}_0^T\right) \geq \tilde{h} \,\middle|\, \vartheta = 0\right) = P_{F_{\text{доп}}}$$

$P_{F_{\text{доп}}}$ – вероятность ложной тревоги (задана)



# Характеристики обнаружения сигналов

Вероятность правильного обнаружения – $P_D$

Вероятность ложной тревоги - $P_F$

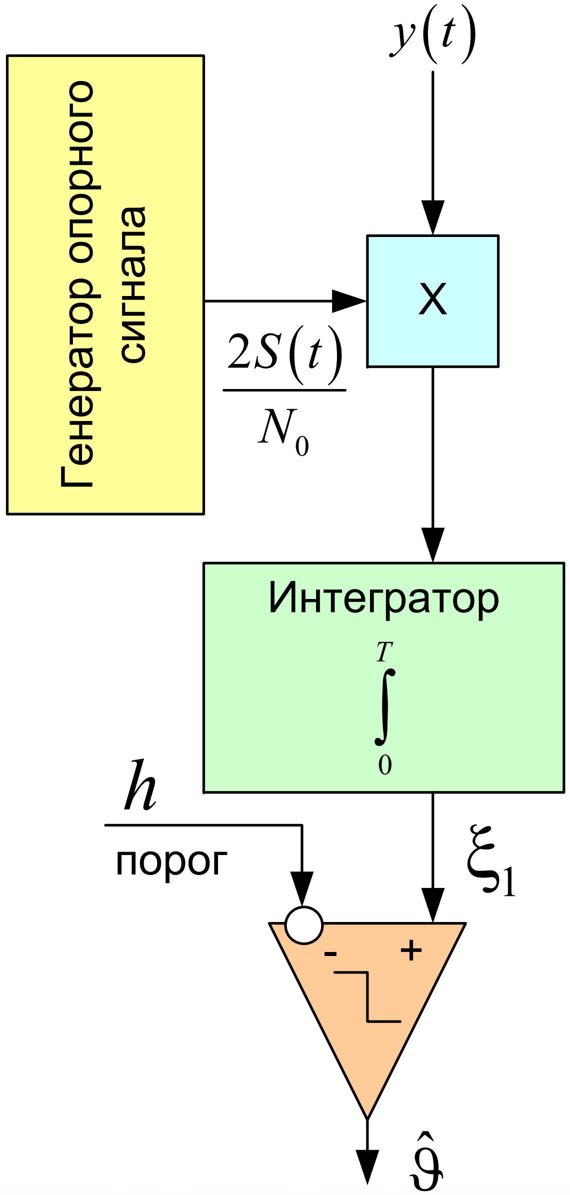
Сигнал на выходе оптимального приемника:

$$\xi_1 = \frac{2}{N_0}\int_0^T y(\tau)S(\tau)d\tau = \frac{2}{N_0}\int_0^T \left(S(\tau)+n(\tau)\right)S(\tau)d\tau$$

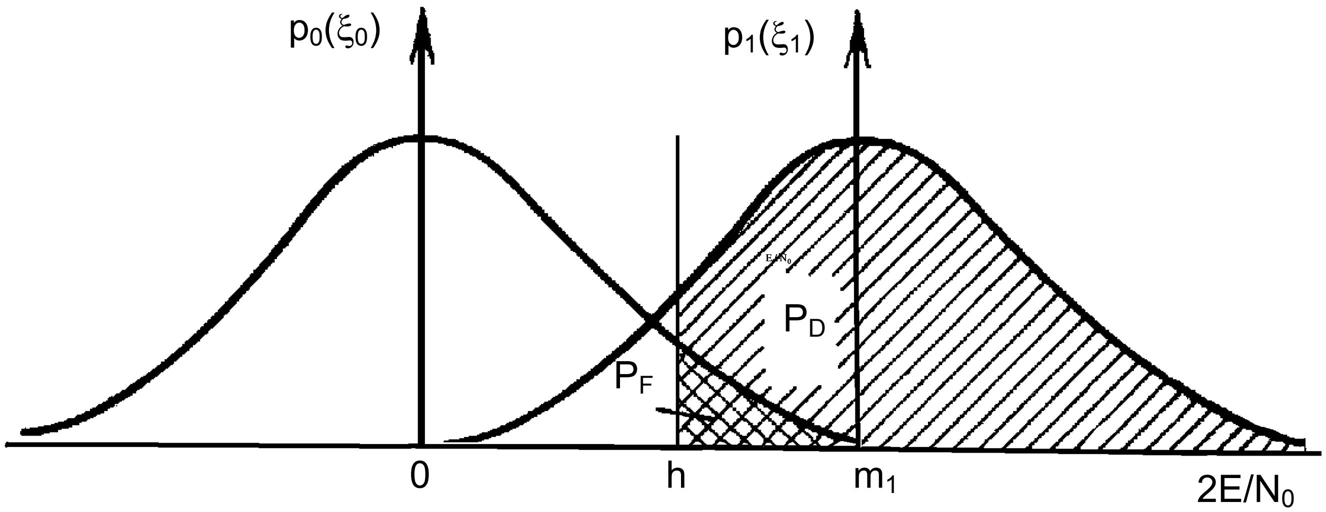
# Характеристики обнаружения

$$m_1 = M[\xi_1] = M\left[\frac{2}{N_0}\int_0^T y(\tau)S(\tau)d\tau\right] = M\left[\frac{2}{N_0}\int_0^T (S(\tau)+n(\tau))S(\tau)d\tau\right] = \frac{2E}{N_0}$$

$$D_1 = M\left[(\xi_1 - m_1)^2\right] = M\left[\left(\frac{2}{N_0}\int_0^T n(\tau)S(\tau)d\tau\right)^2\right] = \frac{2E}{N_0}$$




## Гауссовские ПВ при наличии и отсутствии сигнала



# Характеристики обнаружения

$$P_F = \int_h^{\infty} p_0(\xi)d\xi = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sqrt{2E/N_0}}\right)$$

$$P_D = \int_h^{\infty} p_1(\xi)d\xi = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sqrt{2E/N_0}} - \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

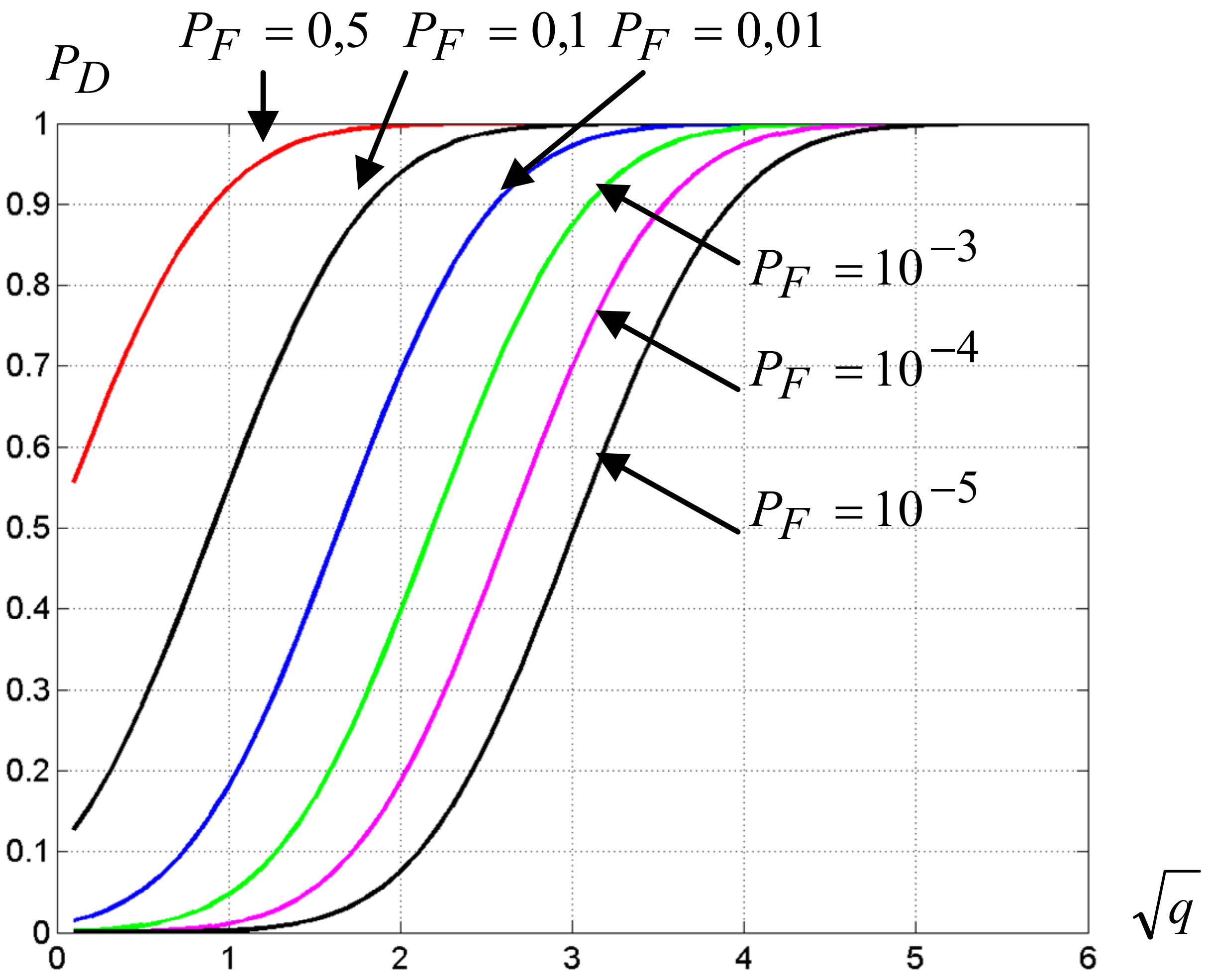
где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$ - интеграл вероятности

$h$ - порог сравнения

$E$ - энергия сигнала

$N_0$ - спектральная плотность шума

# Кривые обнаружения детерминированного сигнала




$$q = E / N_0$$

# Обнаружение сигнала со случайными параметрами

Наблюдается реализация

$$y(t) = \vartheta S(t, \boldsymbol{\mu}) + n(t), \quad 0 \le t \le T$$

$\boldsymbol{\mu}$ – случайные неинформативные параметры сигнала с априорной плотностью вероятностей $p_{ap}(\boldsymbol{\mu})$.

По свойству согласованности ПВ

$$p\left(\mathbf{Y}_0^T \middle| \vartheta\right) = \int p\left(\mathbf{Y}_0^T, \boldsymbol{\mu} \middle| \vartheta\right) d\boldsymbol{\mu} = \int p\left(\mathbf{Y}_0^T \middle| \vartheta, \boldsymbol{\mu}\right) p_{ap}(\boldsymbol{\mu}) d\boldsymbol{\mu}$$

# Отношение правдоподобия

$$\rho\left(\mathbf{Y}_0^T\right)=\frac{p\left(\mathbf{Y}_0^T\middle|\vartheta=1\right)}{p\left(\mathbf{Y}_0^T\middle|\vartheta=0\right)}=\frac{\int p\left(\mathbf{Y}_0^T\middle|\vartheta=1,\mu\right)p_{ap}(\mu)\,d\mu}{p\left(\mathbf{Y}_0^T\middle|\vartheta=0\right)}=\int\rho\left(\mathbf{Y}_0^T\middle|\mu\right)p_{ap}(\mu)\,d\mu$$

(необходимо усреднить отношение правдоподобия по случайным параметрам)

Байесовское решение при простой функции потерь:

$$\hat{\vartheta}=\left\{\rho\left(\mathbf{Y}_0^T\right)\geq h\right\}\qquad h=\frac{P_{ap}(0)}{P_{ap}(1)}$$

Общий вид сигнала в радиотехнике:

$$S(t,\lambda,\mu)=aA(t)\cos\left(\omega_0 t+\varphi(t)+\varphi_0\right)$$

# Практический пример: Обнаружение сигнала с неизвестной фазой и амплитудой по дискретной выборке

Входная выборка:

$$y_k = \boxed{a} \cdot A(kT - \tau_k)\cos\left((\omega_0 + \omega_д)kT + \boxed{\varphi_0}\right) + n_k,$$

$$k = \overline{1, m}$$

$$p(n_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}\right)$$ -- гауссовское распределение

$$p(a) = \frac{a}{\sigma_a^2}\mathrm{e}^{-a^2/2\sigma_a^2}$$ -- рэлеевское распределение

$$p(\varphi_0) = \begin{cases} 1/(2\pi) & \varphi_0 \in (-\pi, \pi] \\ 0 & \varphi_0 \notin (-\pi, \pi] \end{cases}$$ -- равномерное распределение

# Усреднение отношения правдоподобия

$$\rho\left(\mathbf{Y}_1^m \mid a,\varphi_0\right)=\exp\left\{\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m}S_k\left(a,\varphi_0\right)\left(y_k-\frac{1}{2}S_k\left(a,\varphi_0\right)\right)\right\}=$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m}y_kS_k\left(a,\varphi_0\right)\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{a^2\alpha}{2\sigma_n^2}\right\},\quad E=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}S_k^2\left(a,\varphi_0\right)=\frac{a^2\alpha}{2}$$

$$\boxed{\rho\left(\mathbf{Y}_1^m\right)}=\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}\rho\left(\mathbf{Y}_1^m \mid a,\varphi_0\right)p\left(\varphi_0\right)p\left(a\right)d\varphi_0da=$$

$$=\int_0^\infty\exp\left\{-\frac{a^2\alpha}{2\sigma_n^2}\right\}\frac{a}{\sigma_a^2}e^{-a^2/2\sigma_a^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m}y_kS_k\left(a,\varphi_0\right)\right\}d\varphi_0da$$

# Усреднение отношения правдоподобия

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m} y_k S_k\left(a,\varphi_0\right)\right\}d\varphi_0 =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m} y_k aA\left(kT-\tau\right)\cos\left(\left(\omega_0+\omega_д\right)kT+\varphi_0\right)\right\}d\varphi_0 = I_0\left(\frac{2a}{\sigma_n^2}X\right)$$

- функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента

$$X=\sqrt{X_c^2+X_s^2},$$

$$X_c=\sum_{k=1}^{m} y_k A\left(kT-\tau\right)\cos\left(\left(\omega_0+\omega_д\right)kT\right),$$

$$X_s=\sum_{k=1}^{m} y_k A\left(kT-\tau\right)\sin\left(\left(\omega_0+\omega_д\right)kT\right).$$

Отсюда $\rho\left(\mathbf{Y}_1^m\right)=\int_0^{\infty}\frac{a}{\sigma_a^2}\exp\left\{-\frac{a^2\alpha}{2\sigma_n^2}\right\}\exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}\right\}I_0\left(\frac{2a}{\sigma_n^2}X\right)da$

# Страшный интеграл взят

$$\rho\left(\mathbf{Y}_1^m\right) = \int_0^\infty \frac{a}{\sigma_a^2} \exp\left\{-\frac{a^2\alpha}{2\sigma_n^2}\right\} \exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}\right\} I_0\left(\frac{2a}{\sigma_n^2} X\right) da =$$

$$= \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \alpha\sigma_a^2} \exp\left\{\frac{2\sigma_a^2}{\sigma_n^2\left(\sigma_n^2 + \alpha\sigma_a^2\right)} X^2\right\}, \text{ введём } q_э = \frac{\alpha\sigma_a^2}{\sigma_n^2}, \text{ тогда}$$

$$\rho\left(\mathbf{Y}_1^m\right) = \frac{1}{1+q_э} \exp\left\{\frac{2\sigma_a^2}{\sigma_n^4\left(1+q_э\right)} X^2\right\} \geq h$$

Решающее правило заключается в сравнении с порогом.
Раскрываем неравенство.

$$X^2 \geq \ln\left(\left(1+q_э\right)h\right) \frac{\sigma_n^4\left(1+q_э\right)}{2\sigma_a^2} = h_э$$

# Структура оптимального некогерентного обнаружителя