Студент Днепров В.В., аспирант Корогодин И.В.

ОБНАРУЖЕНИЕ НАВИГАЦИОННОГО РАДИОСИГНАЛА С МОДУЛЯЦИЕЙ ДАННЫМИ

Широко распространенной задачей радиотехники является обнаружение сигнала на фоне шума. Как правило, данная задача решается методами статистической радиотехники [1]. Рассмотрим следующий случай. Пусть имеется некая реализация $y(t)$, принятая за время $T_н$:

$$y(t) = S(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) + n(t), \quad (1)$$

где $S(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ - сигнал, являющийся функцией как вектора информативных параметров $\boldsymbol{\lambda}$, несущих полезную для пользователя информацию, так и вектора неинформативных параметров $\boldsymbol{\mu}$; $n(t)$ -белый аддитивный шум с нормальным законом распределения и дисперсией σ_n^2.

Необходимо установить , присутствует ли сигнал $S(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ в принятой реализации (1). Данную задачу можно трактовать как задачу оценки параметра сигнала, если представить (1) в виде:

$$y(t) = \theta \cdot S(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) + n(t), \quad (2)$$

где θ - случайная величина, которая может принять 2 значения: $\theta = 1$ с априорной вероятностью P_1, что соответствует наличию сигнала в принятой реализации; $\theta = 0$ с априорной вероятностью $P_0 = 1 - P_1$, что означает отсутствие сигнала в принятой реализации. Оценке $\hat{\theta} = 1$ соответствует принятие решения о наличии сигнала в принятой реализации, оценке $\hat{\theta} = 0$ соответствует принятие решения об отсутствии сигнала в принятой реализации.

Воспользуемся математической моделью сигнала вида:

$$S(t, \tau, \omega_д, \varphi) = A \cdot G_{дк}(t-\tau) \cdot G_{нс}(t-\tau) \times \times \cos(\omega_0 t + \omega_д t + \varphi) \quad . \quad (3)$$

В дальнейшем, в зависимости от постановки задачи, к векторам $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}$ будем относить различные параметры этого сигнала. Также будем считать известными амплитуду сигнала A, задержку распространения τ и допплеровское смещение частоты $\omega_д$.

Целью этой статьи является синтез алгоритмов обнаружения сигнала (3) для разных информативных и неинформативных параметров.

Постановка задачи синтеза

По наблюдению (2) необходимо получить оценку максимального правдоподобия параметра θ.

Рассмотрим ряд задач синтеза, отличающихся различным распределением параметров сигнала и информативным и неинформативным параметрами.

1) Синтез алгоритма обнаружения сигнала с оценкой символов навигационного сообщения (НС).

К информативным параметрам сигнала в этой задаче будем относить сам параметр θ, а также вектор НС $\mathbf{G_{нс}}$, состоящий из M бит длительностью $\tau_{символ}$. Т.е.

$$\mathbf{G_{нс,1}} = G_{нс}(t-\tau) \quad 0 < t < \tau_{символ},$$

$$\mathbf{G_{нс,2}} = G_{нс}(t-\tau) \quad \tau_{символ} < t < 2\tau_{символ},$$

....

$$\mathbf{G_{нс,M}} = G_{нс}(t-\tau) \quad (M\text{ -}1)\tau_{символ} < t < M\tau_{символ}.$$

Таким образом, вектор информативных параметров сообщения примет вид: $\boldsymbol{\lambda} = |\theta \ \mathbf{G_{нс}}|^T$.

Неинформативным параметром сигнала будем считать случайную начальную фазу, распределенную равномерно на интервале $[-\pi, \pi]$. Таким образом, $\boldsymbol{\mu} = \varphi$.

2) Синтез алгоритма обнаружения сигнала с усреднением по символам НС.

В данной задаче $\boldsymbol{\mu} = |\varphi \ \mathbf{G_{нс}}|^T$. К информативным параметрам относим только параметр θ.

3) Синтез схемы обнаружителя с некогерентным накоплением.

В этой части рассмотрим менее строгое ограничение на значение начальной фазы. Пусть теперь на каждом интервале длительности символа навигационного сообщения фаза принимает свое значение. При этом на каждом интервале она распределена равномерно на интервале $[-\pi, \pi]$.

Синтез алгоритма обнаружения сигнала с оценкой символов НС

Разобьем время наблюдения на равные интервалы T, т.е. $T_н = T \cdot M$. На k-м интервале T считаем постоянным значение символа навигационного сообщения, $k = \overline{1, M}$. Сами интервалы T разобьем на L моментов времени, в которые будем брать отсчеты принятого наблюдения. Т.е. $T = L \cdot T_d$, где T_d - интервал дискретизации. Таким образом, заменяем непрерывное время на дискретное, вводим двойную индексацию $t_{k,l} = (k-1)T + l \cdot T_d$, $l = \overline{1, L}$.

Запишем условную плотность вероятности всей совокупности отсчетов наблюдения (2) $Y_{1,1}^{M,L} = \left\{ y\left(t_{k,l}\right), l \in \overline{1, L}, \ k = \overline{1, M} \right\}$ в случае приема M символов НС:

$$p(Y_{1,1}^{M,L} \mid \theta, \mathbf{G_{нс}}, \varphi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \right)^{L \cdot M} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{\sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{L} (y(t_{k,l}) - \theta \cdot S(t_{k,l}, G_{нс,k}, \varphi))^2}{2\sigma_n^2} \right), \quad (4)$$

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2T_d}.$$

Следуя методике синтеза, изложенной в [1], перейдем к отношению правдоподобия, усредняя условную плотность вероятности по неинформативному параметру:

$$\rho(Y_{1,1}^{M,L} \mid \theta, \mathbf{G_{нс}}, \varphi) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{L}(y(t_{k,l})\cdot\theta\cdot S(t_{k,l}, G_{нс,k}, \varphi)}{\sigma_n^2} \right) \times$$
$$\times \exp\left(\frac{\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{L} -0.5\cdot\theta\cdot S(t_{k,l}, G_{нс,k}, \varphi)^2}{\sigma_n^2} \right) d\varphi \quad (5)$$

Второй сомножитель (5) подынтегрального выражения – некая константа, независящая от φ, т.к. $\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{L} S(t_{k,l}, G_{нс,k}, \varphi)^2 \cdot T_d = E$ - энергия сигнала на всем времени анализа. Таким образом, задача сводится к решению интеграла вида

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{V}(y(t_i)\cdot\theta\cdot S(t_i, \mathbf{G_{нс}}, \varphi)}{\sigma_n^2} \right) d\varphi, \qquad (6)$$

где $\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{L} = \sum_{i=1}^{V}$, $i = (k-1)\cdot L + l$.

Проведя преобразования, получаем:

$$J = I_0\left(\frac{A\cdot\theta\cdot X(\mathbf{G_{нс}})}{\sigma_n^2} \right),$$

$$\rho(Y_{1,1}^{M,L} \mid \theta, \mathbf{G_{нс}}) = \exp\left(\frac{-E\cdot\theta}{N_0} \right)\cdot I_0\left(\frac{A\cdot X(\mathbf{G_{нс}})\cdot\theta}{\sigma_n^2} \right), \quad (7)$$

где $X^2 = \left(\sum_{k=1}^{M}(G_{нс,k} I_k \cdot \theta) \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{M}(G_{нс,k} Q_k \cdot \theta) \right)^2$,

$$I_k = \sum_{l=1}^{L} y(t_{k,l})\cdot G_{дк}(t_{k,l} - \tau_k)\cos(\Phi_{k,l}),$$

$$Q_k = \sum_{l=1}^{L} y(t_{k,l})\cdot G_{дк}(t_{k,l} - \tau_k)\sin(\Phi_{k,l}),$$

$$\Phi_{k,l} = \omega t_{k,l} + \omega_{д,k} lTd.$$

Оценкой параметров θ, $\mathbf{G_{нс}}$ будут являться такие параметры, при которых записанное отношение правдоподобия (7) максимально:

$$\hat{\theta} = \max_{\theta} \ \mathbf{arg}[\rho(Y_{1,1}^{M,L} \mid \theta, \mathbf{G_{нс}})],$$

$$\widehat{\mathbf{G}}_{\mathbf{нс}} = \max_{\mathbf{G_{нс}}} \ \mathbf{arg}[\rho(Y_{1,1}^{M,L} \mid \theta, \mathbf{G_{нс}})].$$

В общем случае, мы имеем M двоичных символов навигационного сообщения, причем заранее не известно, какова будет их последовательность (комбинация) в принятой реализации. Поэтому нужно рассмотреть все возможные комбинации, число которых равняется 2^M. В свою очередь, параметр θ принимает два равновероятных значения $\theta = 1$, $\theta = 0$. Значит, нужно проверить все комбинации кода НС для $\theta = 1$ и для $\theta = 0$, и выбрать те, которые дадут максимум формулы (7). Однако, положив $\theta = 0$ в формуле (7) заметим, что

$$\rho(Y_{1,1}^{M,L} \mid \theta = 0, \mathbf{G_{нс}}) = \exp\left(\frac{-E\cdot 0}{N_0} \right) \times$$
$$\times I_0\left(\frac{A\cdot 0\cdot X(\mathbf{G_{нс}})}{\sigma_n^2} \right) = 1$$

Значит, оценке $\hat{\theta} = 1$ соответствует выполнение условия $\rho(Y_{1,1}^{M,L} \mid \theta, \mathbf{G_{нс}}) > 1$. Для обнаружения сигнала нужно вычислить значения формулы (7) для 2^M комбинаций символов НС, выбрать максимальное из них, и сравнить его с единицей.

Блок схема упрощенного алгоритма, реализующего выражение (7) приведена на рис. 1, где обозначено

$$\tilde{h} = \frac{\sigma_n^2}{A}\cdot I_0^{-1}\left(\exp\left(\frac{0.5E}{N_0} \right) \right).$$

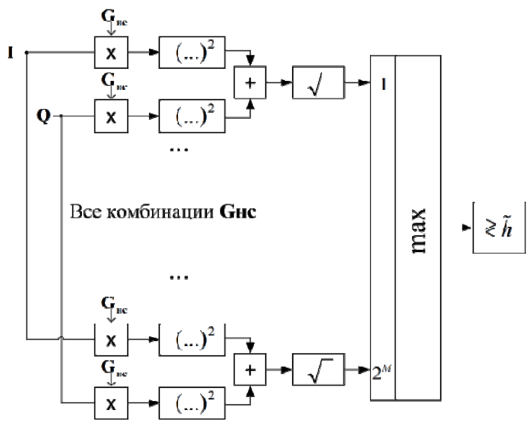

Рис. 1

Оценки интересующих нас параметров получаем следующим образом:

1) Если $\max < \tilde{h}$,

то $\hat{\theta} = 0$, $\widehat{\mathbf{G}}_{\mathbf{нс}}$ - не определена.

2) Если $\max > \tilde{h}$,

то $\hat{\theta} = 1$, $\widehat{\mathbf{G}}_{\mathbf{нс}}$ - такая комбинация, которая и дала в схеме максимальное значение.

Синтез алгоритма обнаружения сигнала с усреднением по символам НС

В данном разделе проведем синтез алгоритма обнаружения сигнала, считая навигационное сообщение неинформативным параметром: $\boldsymbol{\mu} = |\varphi \ \mathbf{G_{нс}}|^T$.

Каждый символ навигационного сообщения $G_{нс,k}$ на интервале T может принимать два значения: -1, +1 с вероятностью 0.5. Проведем дополнительное усреднение отношения правдоподобия (7) по символу навигационного сообщения.

$$\rho(Y_{1,1}^{M,L} \mid \theta, \mathbf{G}_{\mathbf{нс}}) = \frac{1}{2^M} \cdot \exp\left(\frac{-E \cdot \theta}{N_0}\right) \times \\ \times \sum_{r=1}^{N_{комб}} I_{0,r}\left(\frac{A \cdot \theta}{\sigma_n^2} \cdot X(\mathbf{G}_{\mathbf{нс},r})\right), \qquad (8)$$

где учтено, что всего возможно $N_{комб} = 2^M$ комбинаций из Мсимволов навигационного сообщения, принимающих 2 значения. $\mathbf{G}_{\mathbf{нс,r}}$ обозначает r-ю комбинацию кода.

Ввиду очень быстрого возрастания функции Бесселя, основной вклад в значение суммы вносит слагаемое с максимальным аргументом. Пренебрежем остальными слагаемыми этой суммы. Тогда выражение (8) принимает вид:

$$\rho(Y_{1,1}^{M,L} \mid \theta, \mathbf{G}_{\mathbf{нс}}) = \frac{1}{2^M} \cdot \exp\left(\frac{-E \cdot \theta}{N_0}\right) \times \\ \times I_0\left(\frac{A \cdot \theta}{\sigma_n^2} \cdot X(\mathbf{G}_{\mathbf{нс},\max})\right), \qquad (9)$$

где $\mathbf{G}_{\mathbf{нс},\max}$ - та комбинация, для которой значение аргумента функции Бесселя максимально. Т.е. та же комбинация, что и в принятом сигнале.

В случае отсутствия сигнала ($\theta = 0$) выражение (9) принимает значение $\frac{1}{2^M}$. Оценке параметра $\hat{\theta} = 1$ соотвествует выполнение неравенства

$$\frac{1}{2^M} \cdot \exp\left(\frac{-E \cdot \theta}{N_0}\right) I_0\left(\frac{A \cdot \theta}{\sigma_n^2} \cdot X(\mathbf{G}_{\mathbf{нс},\max})\right) > \frac{1}{2^M}.$$

Сократим неравенство на $\frac{1}{2^M}$.

$$\exp\left(\frac{-E \cdot \theta}{N_0}\right) I_0\left(\frac{A \cdot \theta}{\sigma_n^2} \cdot X(\mathbf{G}_{\mathbf{нс},\max})\right) > 1$$

Таким образом, нужно перебрать все возможные комбинации символов навигационного сообщения, выбрать максимальное значение формулы (9) и сравнить с $\frac{1}{2^M}$. Полученный алгоритм идентичен алгоритму, полученному ранее (7).

Синтез алгоритма обнаружения сигнала с некогерентным накоплением

В двух предыдущих задачах принималась модель сигнала с неизменным параметром начальной фазы φ на всем времени наблюдений. Ослабим это ограничение - пусть параметр φ остается неизменным лишь на отрезке времени T.

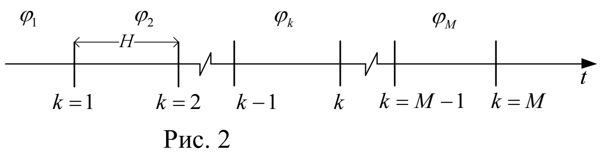

Рис. 2

При этом $p(\varphi_k)$ - равномерное распределение на интервале $[-\pi, \pi]$. Здесь мы, не теряя общности, отнесли к φ_k и изменения фазы навигационным сообщением.

Используя тот же подход, что и в предыдущем разделе, запишем условную плотность вероятности:

$$p(Y_{1,1}^{M,L} \mid \theta, \varphi_1 ... \varphi_M) = p(Y_1^{T_1} \mid \theta, \varphi_1) \times \\ \times p(Y_1^{T_2} \mid \theta, \varphi_2) \cdot ... \cdot p(Y_1^{T_M} \mid \theta, \varphi_M).$$

Перейдем к отношению правдоподобия. Запишем его для реализации, принятой на интервале T_k:

$$\rho(Y_1^{T_k} \mid \theta, \varphi_k) = \frac{p(Y_1^{T_k} \mid \theta = 1, \varphi_k)}{p(Y_1^{T_k} \mid \theta = 0, \varphi_k)} = \\ = \exp\left(\frac{\sum_{l=1}^{L} y(t_{k,l}) \cdot \theta \cdot S(t_{k,l}, \varphi_k)}{\sigma_n^2}\right) \times \\ \times \exp\left(\frac{\sum_{l=1}^{L} -0.5 \cdot \theta \cdot S(t_{k,l}, \varphi_k)^2}{\sigma_n^2}\right), \ k = \overline{1, M}$$

Как и ранее, второй сомножитель представим в виде:

$$\exp\left(\frac{\sum_{l=1}^{L} -0.5 \cdot \theta \cdot S(t_{k,l}, \varphi_k)^2}{\sigma_n^2}\right) = \exp\left(\frac{-E_k \cdot \theta}{N_0}\right),$$

где E_k - энергия сигнала на интервале T. Учитывая независимость реализаций на различных интервалах T_k, можем записать отношение правдоподобия для всего рассматриваемого промежутка времени:

$$\rho(Y_{1,1}^{M,L} \mid \theta, \varphi_1 ... \varphi_M) = \rho(Y_1^{T_1} \mid \theta, \varphi_1) \times \\ \times \rho(Y_1^{T_2} \mid \theta, \varphi_2) \cdot ... \cdot \rho(Y_1^{T_M} \mid \theta, \varphi_M).$$

Также считаем, что энергия сигнала $E_k = E$ одинакова на всех интервалах T_k. Как и ранее, необходимо усреднить отношение правдоподобия по фазе:

$$\rho(Y_{1,1}^{M,L} \mid \theta, \boldsymbol{\varphi}) = \int_{-\pi}^{\pi} \rho(Y_1^{T_1} \mid \theta, \varphi_1) p(\varphi_1) d\varphi_1 \times \\ \times \int_{-\pi}^{\pi} \rho(Y_1^{T_2} \mid \theta, \varphi_2) p(\varphi_2) d\varphi_2 \times ... \\ \times \int_{-\pi}^{\pi} \rho(Y_1^{T_M} \mid \theta, \varphi_M) p(\varphi_M) d\varphi_M = \\ = \exp\left(\frac{-M \cdot E}{N_0}\right) \times \\ \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{\sum_{l=1}^{L} y(t_{1,l}) \cdot \theta \cdot S(t_{1,l}, \varphi_1)}{\sigma_n^2}\right) d\varphi_1 \times ...$$

$$...\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left(\frac{\sum_{l=1}^{L}y(t_{M,l})\cdot\theta\cdot S(t_{M,l},\varphi_M)}{\sigma_n^2}\right)d\varphi_M.$$

После преобразований получаем следующий результат:

$$\rho(Y_{1,1}^{M,L}\mid\theta)=\exp\left(\frac{-M\cdot E\cdot\theta}{N_0}\right)\times$$
$$\times I_0\left(\frac{X_1\cdot A}{\sigma_n^2}\right)\cdot\ldots\cdot I_0\left(\frac{X_M\cdot A}{\sigma_n^2}\right) \qquad (10)$$

где $X_k^2=\left(I_k\cdot\theta\right)^2+\left(Q_k\cdot\theta\right)^2$,

$$I_k=\sum_{l=1}^{L}y(t_{k,l})\cdot G_{дк}(t_{k,l}-\tau_k)\cos(\Phi_{k,l}),$$
$$Q_k=\sum_{l=1}^{L}y(t_{k,l})\cdot G_{дк}(t_{k,l}-\tau_k)\sin(\Phi_{k,l}),\quad k=\overline{1,M}.$$

Возьмем натуральный логарифм выражения (10). Логарифм – монотонная функция, поэтому взятие натурального логарифма выражения (10) не сместит его максимума.

$$\ln(\rho(Y_{1,1}^{M,L}\mid\theta))=-\left(\frac{M\cdot E\cdot\theta}{N_0}\right)+$$
$$+\ln\left(I_0\left(\frac{X_1\cdot A}{\sigma_n^2}\right)\right)+\ldots+\ln\left(I_0\left(\frac{X_M\cdot A}{\sigma_n^2}\right)\right).$$

На рис. 3 приведен график функции $y(x)=\ln(I_0(x))$:

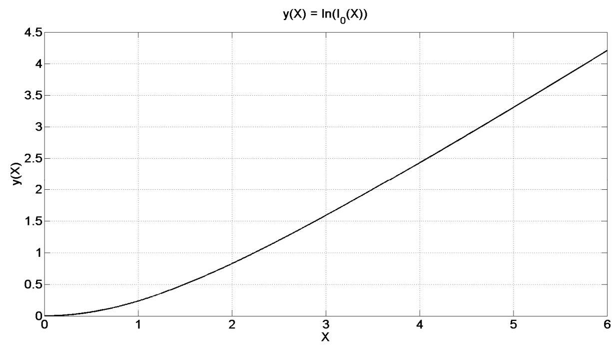

Рис. 3

Аппроксимируем $\ln(I_0(x))$ функцией вида $f(x)=C\cdot x^2$, где $C=const$.

Получаем:

$$\ln(\rho(Y_{1,1}^{M,L}\mid\theta))=-\left(\frac{M\cdot E\cdot\theta}{N_0}\right)+$$
$$+\left(\frac{X_1\cdot A}{\sigma_n^2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{X_M\cdot A}{\sigma_n^2}\right)^2. \qquad (11)$$

Проанализируем полученное выражение. В случае отсутствия сигнала $\left(\theta=0\right)$ выражение (11) равно нулю. Тогда условие вынесения решения $\hat{\theta}=1$:

$$-\left(\frac{M\cdot E}{N_0}\right)+\frac{A^2}{\sigma_n^4}\left(X_1^2+\ldots+X_M^2\right)>0.$$

Или $\left(X_1^2+\ldots+X_M^2\right)>\tilde{\tilde{h}}$, где $\tilde{\tilde{h}}=\frac{M\cdot E\cdot\sigma_n^4}{A^2\cdot N_0}$ - порог сравнения.

Полученное неравенство определяет алгоритм обнаружения.

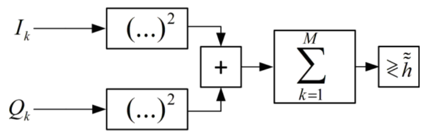

Рис. 4

Сравнение с порогом нужно проводить в конце интервала наблюдения, т.е. во время Т. В результате работы схемы получаем следующую оценку параметра θ:

1) Если значение $\sum_{k=1}^{M}(\ldots)>\tilde{\tilde{h}}$, то $\hat{\theta}=1$;

2) Если значение $\sum_{k=1}^{M}(\ldots)<\tilde{\tilde{h}}$, то $\hat{\theta}=0$.

Математическое моделирование полученных алгоритмов.

В программном пакете MATLAB получены характеристики обнаружения синтезированных алгоритмов, которые приведены на рис. 5 - 7. Работа алгоритмов рассматривалась при различных длительностях интервала наблюдения - от 2 до 10 длительностей символа навигационного сообщения.

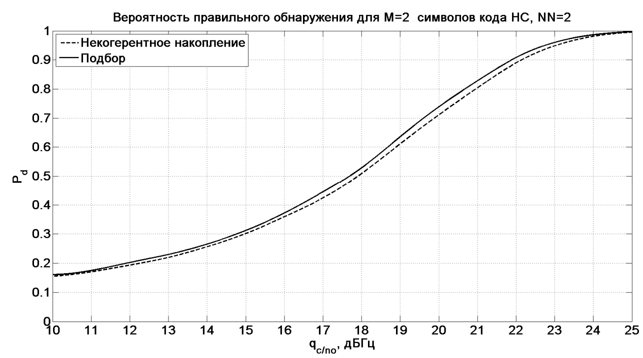

Рис. 5 Характеристики обнаружения для 2 символов навигационного сообщения

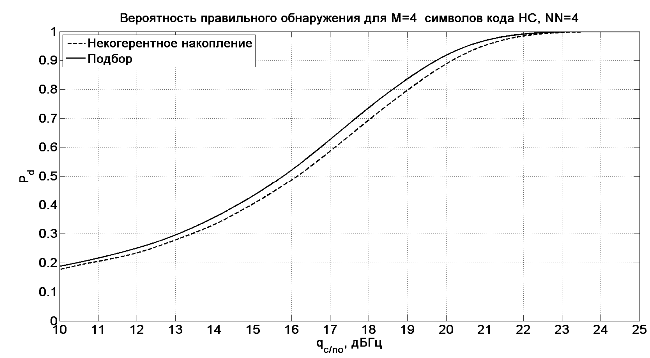

Рис. 6 Характеристики обнаружения для 4символов навигационного сообщения

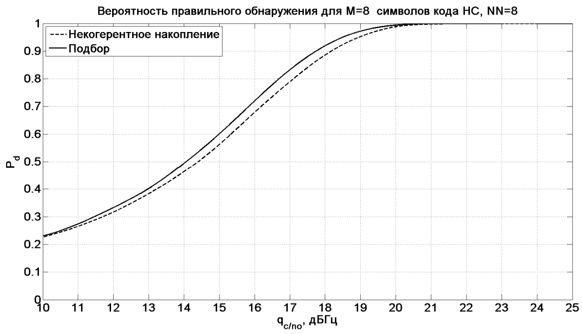

Рис. 7 Характеристики обнаружения для 8 символов навигационного сообщения

Характеристики обнаружения для алгоритма с некогерентным накоплением и алгоритма с оценкой символов навигационного сообщения практически совпадают. Выигрыш алгоритма с оценкой символов навигационного сообщения составляет в среднем (для случаев 2-10 символов навигационного сообщения) 0.4 дБ по уровню вероятности правильного обнаружения $P_D = 0.9$. Однако, этот алгоритм имеет большие вычислительные затраты, так как необходимо рассмотреть все возможные комбинации символов навигационного сообщения, которых для M символов может быть .

Заключение

В работе рассмотрена задача обнаружения сигнала на фоне аддитивного белого гауссовского шума. Был проведен синтез алгоритмов обнаружения и их имитационное моделирование. В качестве критерия оптимальности был использован критерий максимального правдоподобия.

Задача обнаружения сигнала решается полученными в работе алгоритмами. Синтезированный в работе новый алгоритм обнаружения с оценкой символов навигационного сообщения имеет малый выигрыш по сравнению со схемой с некогерентным накоплением, что, к сожалению, уменьшает его практическую значимость.

Статья подготовлена при проведении НИР в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы.

Литература.

1. Перов А. И. Статистическая теория радиотехнических систем. - М.: Радиотехника, 2003.
2. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования/Под ред. А. И. Перова, В. Н. Харисова. - М.: Радиотехника, 2010.