

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»

На правах рукописи

Корогодин Илья Владимирович

Разработка алгоритмов обработки сигналов спутниковых навигационных  
систем в аппаратуре определения угловой ориентации объектов

05.12.14 - Радиолокация и радионавигация

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель  
доктор технических наук  
Перов А. И.

Москва 2013

## Содержание

Список сокращений .....	6
Введение.....	8
Глава 1. Постановка задачи оценивания параметров сигналов промежуточной частоты и методика оценки потенциальных характеристик её решения.....	31
1.1 Модель наблюдений сигналов промежуточной частоты.....	31
1.2 Априорные модели динамики .....	40
1.3 Начальные условия .....	42
1.4 Критерий решения задачи.....	43
1.5 Уравнения Стратоновича в дискретном времени.....	45
1.6 Расчет искомых оценок путем численного решения уравнений Стратоновича.....	49
1.6.1 Квантование апостериорной плотности вероятности.....	49
1.6.2 Вычисление экстраполяционной плотности вероятности.....	52
1.6.3 Вычисление апостериорной плотности вероятности.....	54
1.6.4 Вычисление оценок .....	56
1.6.5 Программная реализация алгоритмов оценивания на основе численного решения уравнений Стратоновича .....	58
1.7 Выводы по главе .....	62
Глава 2. Синтез и анализ некогерентного алгоритма слежения за параметрами сигналов промежуточной частоты в гауссовом приближении апостериорной плотности вероятности .....	64
2.1 Моменты апостериорной плотности вероятности в гауссовом приближении .....	64
2.1.1 Моменты АПВ при разложении ЛФП в ряд Тейлора в окрестности точки, соответствующей вектору математических ожиданий ЭПВ.....	65
2.1.2 Моменты АПВ при разложении ЛФП в ряд Тейлора в окрестности заданной точки .....	67
2.1.3 Выбор вектора опорных параметров .....	69

2.1.4 Вектор математических ожиданий апостериорной ПВ как решение задачи первичной обработки.....	73
2.2 Общие выражения для функций дискриминаторов .....	74
2.3 Синтез и анализ дискриминатора разности фаз.....	79
2.3.1 Алгоритм дискриминатора разности фаз .....	79
2.3.2 Дискриминационная характеристика ДРФ .....	86
2.3.3 Флуктуационная характеристика ДРФ.....	89
2.4 Синтез и анализ дискриминатора частоты.....	93
2.4.1 Алгоритм дискриминатора частоты.....	93
2.4.2 Дискриминационная характеристика ДЧ.....	97
2.4.3 Флуктуационная характеристика ДЧ.....	100
2.5 Синтез и анализ дискриминатора задержки.....	103
2.5.1 Алгоритм дискриминатора задержки .....	103
2.5.2 Дискриминационная характеристика ДЗ.....	106
2.5.3 Флуктуационная характеристика ДЗ .....	108
2.6 Пять шагов по упрощению квазиоптимального алгоритма фильтрации .....	111
2.6.1 Снижение размерности системы фильтрации за счет пренебрежения отдельными корреляционными связями .....	111
2.6.2 Упрощение ССРФ за счет пренебрежения коррекцией гессианом .....	113
2.6.3 Упрощение ССРФ за счет пренебрежения дискриминатором производной РФ .....	114
2.6.4 Использование эквивалентных наблюдений дискриминаторов .....	115
2.6.5 Использование постоянных коэффициентов .....	119
2.7 Выводы по главе .....	122
Глава 3 Результаты имитационного моделирования и натурных испытаний ..	125
3.1 Сравнение характеристик алгоритмов посредством имитационного моделирования, проверка высказанных гипотез .....	125

3.1.1 Анализ точности слежения за разностью фаз .....	130
3.1.2 Чувствительность слежения за разностью фаз .....	133
3.1.3 Помехоустойчивость слежения за разностью фаз.....	135
3.2 Имитационное моделирование работы УНАП .....	138
3.3 Результаты натурального испытания опытного образца УНАП, реализующего упрощенный квазиоптимальный алгоритм фильтрации.....	144
3.4 Выводы по главе .....	148
Глава 4 Методика и алгоритмы компенсации неидентичности характеристик радиочастотных блоков .....	151
4.1 Постановка задачи .....	151
4.2 Обзор известных решений .....	154
4.3 Разработка методики компенсации неидентичности характеристик радиочастотных блоков .....	155
4.4 Модель разности фаз при работе коммутатора .....	158
4.5 Алгоритм коррекции разностей фаз по измерениям скачков .....	162
4.6 Изменение алгоритмов первичной обработки сигналов при использовании коммутатора радиочастотных блоков .....	165
4.6.1 Модель наблюдений при работе коммутатора РЧБ .....	165
4.6.2 Изменения, вносимые в дискриминаторы информативных параметров .....	166
4.6.3 Общий вид фильтров информационных параметров УНАП..	167
4.7 Результаты имитационного моделирования и натуральных испытаний УНАП с алгоритмом коррекции разности фаз.....	170
4.8 Выводы по главе .....	172
Заключение .....	174
Список литературы .....	179
Приложение 1. Дополнительные иллюстрации .....	185
Приложение 2. Некоторые доказательства и преобразования .....	186
П.2.1 Условная априорная плотность вероятности фазы .....	186
П.2.2 Плотность вероятности экстраполяции вектора состояния .....	190

П.2.3 Математическое ожидание и дисперсия апостериорной плотности вероятности в гауссовом приближении .....	192
П.2.4 Расчет усредненной многошаговой функции правдоподобия ...	196
П.2.5 Интегрирование совместной апостериорной плотности вероятности по неинформативным параметрам .....	200
П.2.6 Апостериорная плотность вероятности при разложении логарифма отношения правдоподобия вокруг произвольной точки.....	203
П.2.7 Экстраполяционная ПВ в случае одного формирующего шума	205
П.2.8 Алгоритм дискриминатора разности фаз .....	208
П.2.9 Расчет дискриминационной характеристики ДРФ и её крутизны .....	212
П.2.10 Расчет флуктуационной характеристики ДРФ .....	220
П.2.11 Алгоритм дискриминатора частоты.....	224
П.2.12 Расчет дискриминационной характеристики ДЧ и её крутизны .....	228
П.2.13 Расчет флуктуационной характеристики ДЧ.....	235
П.2.14 Алгоритм дискриминатора задержки .....	251
П.2.15 Расчет дискриминационной характеристики ДЗ .....	255
П.2.16 Расчет флуктуационной характеристики ДЗ.....	260
П.2.17 Коэффициенты следящих систем при использовании эквивалентных наблюдений дискриминаторов .....	263
П.2.18 Коэффициенты следящих систем в установившемся режиме .	267
Приложение 3. Акты о внедрении результатов .....	268

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АМ – антенный модуль;

АК – антенный кабель;

АПВ – апостериорная плотность вероятности;

АФАР – активная фазированная антенная решетка;

АЦП – аналого-цифровой преобразователь;

БГШ – белый гауссовский шум;

ВИП – вектор информативных параметров;

ВРФ – вторые разности фаз;

ВС – вектор состояния;

ГЛОНАСС – Глобальная навигационная спутниковая система, РФ;

ГВЗ – групповое время запаздывания;

ДЗ – дискриминатор задержки;

ДК – дальномерный код;

ДРФ – дискриминатор разности фаз;

ДФ – дискриминатор фазы;

ДХ – дискриминационная характеристика;

ДЧ – дискриминатор частоты;

ИКД – интерфейсный контрольный документ;

ЛФП – логарифм функции правдоподобия;

МДОФ – матрица дисперсий ошибок фильтрации;

МШУ – малошумящий усилитель;

НАП – навигационная аппаратура потребителей;

НВО – навигационно-временные определения;

НИ – навигационная информация;

НКА – навигационный космический аппарат;

ОГ – опорный генератор;

ПВ – плотность вероятности;

ПСП – псевдослучайная последовательность;

ПЧ – промежуточная частота;

РЗ – разность задержек;

РПК – радиопрозрачный колпак антенного модуля;

РФ – разность фаз;

РФК – расширенный фильтр Калмана;

РЧБ – радиочастотный блок;

СВ – случайная величина;

СКО – среднеквадратическое отклонение;

СКОш – среднеквадратическая ошибка;

СПМ – спектральная плотность мощности;

СПМО – специальное программно-математическое обеспечение

СРНС – спутниковая радионавигационная система;

ССЗ – система слежения за задержкой;

ССРФ – система слежения за разностью фаз;

ССФ – система слежения за фазой;

ССЧ – система слежения за частотой;

СЧ – синтезатор частот;

УЗ – устройство защиты;

УКА – упрощенный квазиоптимальный алгоритм;

УНАП – угломерная навигационная аппаратура потребителей;

ФАП – фазовая автоподстройка;

ФХ – флуктуационная характеристика;

ФЧХ – фазочастотная характеристика;

ЧАП – частотная автоподстройка;

ЭПВ – экстраполяционная плотность вероятности;

GPS (NAVSTAR GPS) – (англ. Global Positioning System) – глобальная система позиционирования, США.

## **ВВЕДЕНИЕ**

Осенью 1957 года Советским Союзом был запущен первый искусственный спутник Земли - ПС-1. Одним из научных результатов запуска стало экспериментальное подтверждение возможности определения параметров движения спутника по результатам измерений доплеровского сдвига частоты излучаемого сигнала и известному положению приемника [1]. И наоборот – возможности определения положения приемника при известных координатах и скорости спутника.

Успех первых экспериментов и большой потенциал практического применения привели к созданию в 60-70гг спутниковых радионавигационных систем (СРНС) первого поколения – Транзит (США), Циклон (СССР), Цикада (СССР) [2].

Появление спутниковых навигационных систем первого поколения стало прорывом в навигации. Тем не менее, практика использования выявила их недостатки, исправить которые призваны системы второго поколения. На данный момент в штатной эксплуатации находятся две СРНС второго поколения - NAVSTAR GPS (США) и ГЛОНАСС (СССР, затем РФ). Отличительной чертой систем второго поколения является применение псевдодальномерного метода позиционирования, что приводит к использованию ими однотипных сигналов с дополнительной спектрорасширяющей модуляцией [3, 4, 5].

Системы и первого, и второго поколений состоят из трех сегментов – наземного комплекса управления, группировки навигационных космических аппаратов (НКА) и навигационной аппаратуры потребителей (НАП) [2, 6].

СРНС предоставляют потребителю сервис, в который входит определение положения и скорости, а так же обеспечение шкалой времени, синхронизированной с некоторым мировым стандартом.

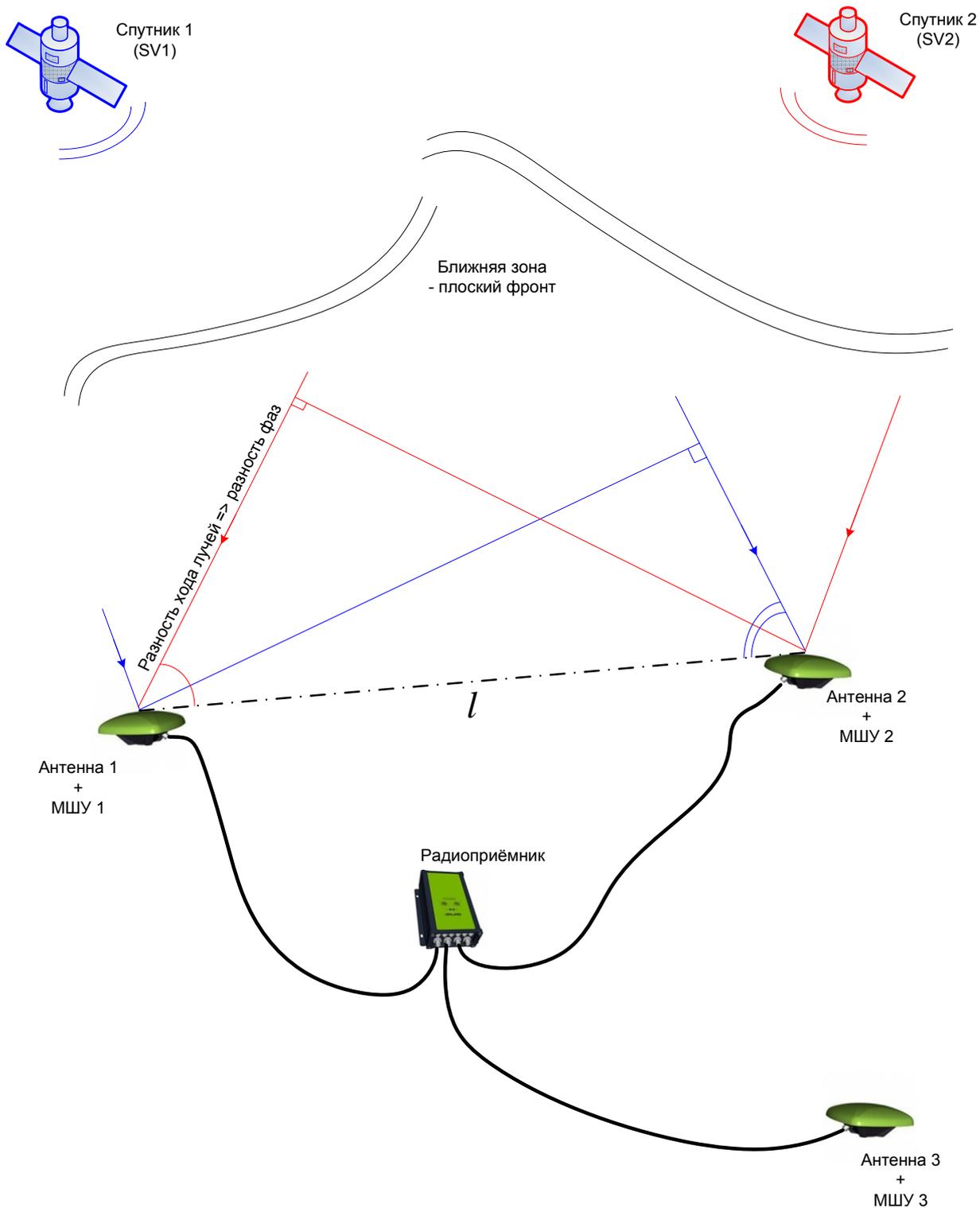


Рисунок 1. Связь ориентации множества антенн с разностью фаз

Для полного определения состояния потребителя, как объекта навигации, в этом случае не хватает его ориентации. Возможно построение НАП, дополняющей традиционные навигационно-временные определения (НВО) измерениями параметров пространственной ориентации объекта. НАП данного типа носят название угломерной навигационной аппаратуры потребителей

(УНАП). Для УНАП под НВО будем понимать совокупность оценок координат, составляющих вектора скорости, времени и параметров угловой ориентации потребителя.

Существует широкий круг объектов-потребителей, для которых применения УНАП позволяет существенно повысить технические и экономические характеристики, а порой и получить новые возможности. К таким объектам относятся различного рода летательные аппараты, суда, сухопутные боевые машины, артиллерийские системы, строительная техника и т.д. [7, 8]

Высокая точность определения параметров ориентации автономной УНАП при относительной простоте реализации достигается с помощью принципов фазовой углометрии – применении интерферометрического метода [9, 10]. Разности фаз (РФ) спутниковых сигналов, наблюдаемых на множестве пространственно разнесенных точек (см. рисунок 1), функционально связаны с положением потребителя, спутника и ориентацией приемных точек относительно линии спутник-потребитель. Таким образом, измерив разности фаз (относительные фазы), можно оценить ориентацию антенной системы. УНАП СРНС, основанная на измерениях относительных фаз в пространственно разнесенных точках, выступает в качестве **объекта** диссертационного исследования. **Предметом** же исследования являются способы реализации первичной обработки сигналов в УНАП, где под первичной обработкой радиосигналов понимаются преобразования, позволяющие сформировать измерения параметров сигналов радио- или промежуточной частоты, достаточные для формирования НВО.

Известны разработки УНАП на основе фазовых измерений по сигналам СРНС отечественных предприятий:

- 1) НПП Радиосвязи, г. Красноярск: МРК-27, МРК-32, МРК-32П; НП-101;
- 2) НИИ КП, г. Москва: 14Ц823 “Грот-У”;

3) КБ НАВИС, г. Москва: Бриз-КМ-РНК, “Система угломерная ГЛОНАСС/GPS”;

4) Радио Комплекс, г. Москва: Фарватер РК-2306;

5) РКС, г. Москва,

и иностранных компаний:

1) Trimble Navigation, США: SPS361, SPS461, TANS Vector;

2) Ashtech (Magellan Navigation), США: 3DF, ADU2;

3) Javad Navigation Systems, США: AT4;

4) Hemisphere GPS, Канада: VS330, H320 и др.

5) Topcon, Япония: 3D-MC GNSS Excavator X63.

Каждая из представленных УНАП имеет индивидуальные отличия, основанные на фирменных наработках предприятия-разработчика. Варьируется число приемных элементов и их расположение, используемая элементная база, способ формирования колебаний для гетеродинов, способ компенсации паразитных набегов в антенно-фидерном тракте, метод разрешения неоднозначности фазовых измерений и т.д. Но при этом, косвенные признаки (заявленные полосы следящих систем [11] и низкая чувствительность [12]), публикации [10, 11, 13, 14] и патенты [15, 16, 17, 18, 19] указывают на то, что существующие системы используют когерентный режим работы. Для слежения за фазой несущей используются системы фазовой автоподстройки (ФАП) для сигналов каждой приемной точки, с последующим формированием оценок РФ как разности оценок фаз [13].

Применение систем ФАП ограничивает характеристики точности, помехоустойчивости и чувствительности УНАП. Под помехоустойчивость НАП понимается её свойство выполнять свои функции в условиях действия помех, а под чувствительностью – выполнять функции при ослаблении полезного сигнала.

Современные навигационные приемники, не предназначенные для фазовых измерений, используют некогерентный режим работы. В

некогерентном режиме управление частотой опорных сигналов коррелятора осуществляет система частотной автоподстройки (ЧАП), на этапе слежения не оценивается абсолютная фаза сигналов.

Чувствительность и помехоустойчивость (к определенному типу помех) НАП определяется граничным значением мощности полезного сигнала или помехи соответственно, при которой сказывается нелинейный эффект – выход ошибки слежения за границы апертурной дискриминационной характеристики [20]. Несмотря на то, что для систем ФАП характерно более точное оценивание частоты, чем для систем ЧАП, граничный эффект наступает при больших значениях мощности сигнала и меньших значениях мощности помехи. Отсюда повышенная на 10-15 дБ чувствительность и помехоустойчивость некогерентного режима работы.

Принцип фазовой углометрии не предписывает измерения фаз сигналов в приемных точках, он предписывает измерять разности фаз. Измерения же разности фаз возможно и в некогерентном режиме, что может существенно повысить чувствительность и помехоустойчивость УНАП. Улучшить характеристики УНАП может и применение методов теории оптимальной фильтрации. До сих пор задача оптимального оценивания параметров сигналов, принятых УНАП, в общем виде не решалась. Всё это делает исследования в выбранном направлении **перспективными**.

**Актуальность** увеличения помехоустойчивости и чувствительности УНАП обусловлена сферой применения аппаратуры данного типа. В военном деле и авиации эти характеристики особенно важны. Основным способом существенного повышения помехоустойчивости современных НАП – использование пространственной обработки сигналов на основе фазированных антенных решеток. К сожалению, этот способ на данном этапе развития технологии не применялся к УНАП, что делает её значительно менее помехоустойчивой, чем передовые образцы НАП.

Помимо преимуществ некогерентного режима работы, использование системы слежения за разностью фаз (ССРФ) позволяет получить и другие полезные свойства. При переносе сигналов по частоте к их фазе добавляются паразитные слагаемые, обусловленные нестабильностью частоты опорного генератора (ОГ) и шумами синтезаторов частот (СЧ). Нестабильность ОГ накладывает ограничения на минимальное значение шумовой полосы в случае использования системы слежения за фазой (ССФ). Если для переноса по частоте радиосигналов различных приемных точек используется одно и то же гетеродинирующее колебание, то для ССРФ такое ограничение практически отсутствует, т.к. на разность фаз сигналов промежуточной частоты нестабильность опорного генератора практически не влияет.

Сужение полосы актуально для многих приложений УНАП. Динамика изменения РФ определяется динамикой изменения угловой ориентации объекта. Динамика изменения РФ для большинства потребителей значительно ниже динамики изменения псевдофаз: в первом приближении, динамика вращательного движения значительно ниже динамики поступательного. Сужение полосы ССРФ позволяет снизить ошибки слежения относительно ССФ, что при сопоставимых апертурах дискриминационных характеристик приводит к росту помехоустойчивости и чувствительности.

**Целью** диссертационной работы является улучшение потребительских характеристик угломерной НАП СРНС. Достижение цели осуществляется путем оптимизации алгоритмов первичной обработки навигационных радиосигналов, в том числе за счет применения подходов некогерентного приема сигналов. В качестве основных потребительских характеристик в работе выступает помехоустойчивость и чувствительность НАП, а так же точность НВО.

#### *Фиксированные условия*

Объявленный предмет диссертационного исследования предполагает двухэтапную обработку сигналов в УНАП. Отказ от одноэтапной обработки

обусловлен пожеланиями представителей ведущей организации (ОАО «НИИ космического приборостроения») и ожидаемой сложностью одноэтапной реализации.

При двухэтапной обработке, согласно озвученной концепции относительных фазовых измерений, УНАП для достижения результата должна реализовать три функции

- 1) Преобразование электромагнитного поля в выходной сигнал антенн;
- 2) Оценивание параметров радиосигналов, достаточных для последующего формирования НВО (т.е. *первичная* обработка);
- 3) Получение НВО по оценкам параметров сигналов (т.е. *вторичная* обработка сигналов).

Данная работа посвящена совершенствованию второй функции, т.е. организации первичной обработки сигналов в УНАП.

Алгоритмы первичной обработки зависят от модели выходных сигналов антенн, требуемого для формирования НВО набора оцениваемых параметров и ограничений, накладываемых техническими возможностями реализации устройств обработки. Результаты работы имеют практическое приложение в аппаратуре потребителей, производимой ведущей организацией. Поэтому искомые алгоритмы должны отвечать фиксированной структуре УНАП. Опишем структуру и причины её возникновения.

Среднеквадратическая ошибка определения углов ориентации объекта по сигналам, принятым в пространственно разнесенных точках, обратно пропорциональна расстоянию между этими точками, а точнее - положениями фазовых центров антенн [1, 10], размещенных в этих точках. Для УНАП характерно разнесение антенн на единицы метров. Таким образом, УНАП распределяется в пространстве. Встает задача распределить в пространстве её функции.

Как правило, первичная и вторичная обработка производятся в одном устройстве, с которым антенны соединяются антенными кабелями. Для

снижения коэффициента шума антенны дополняются малошумящими усилителями (МШУ). Перед МШУ реализуются устройства защиты (УЗ) от перегрузки. Антенна, МШУ, УЗ и антенный кабель образуют антенный модуль (АМ, см. рисунок 2).

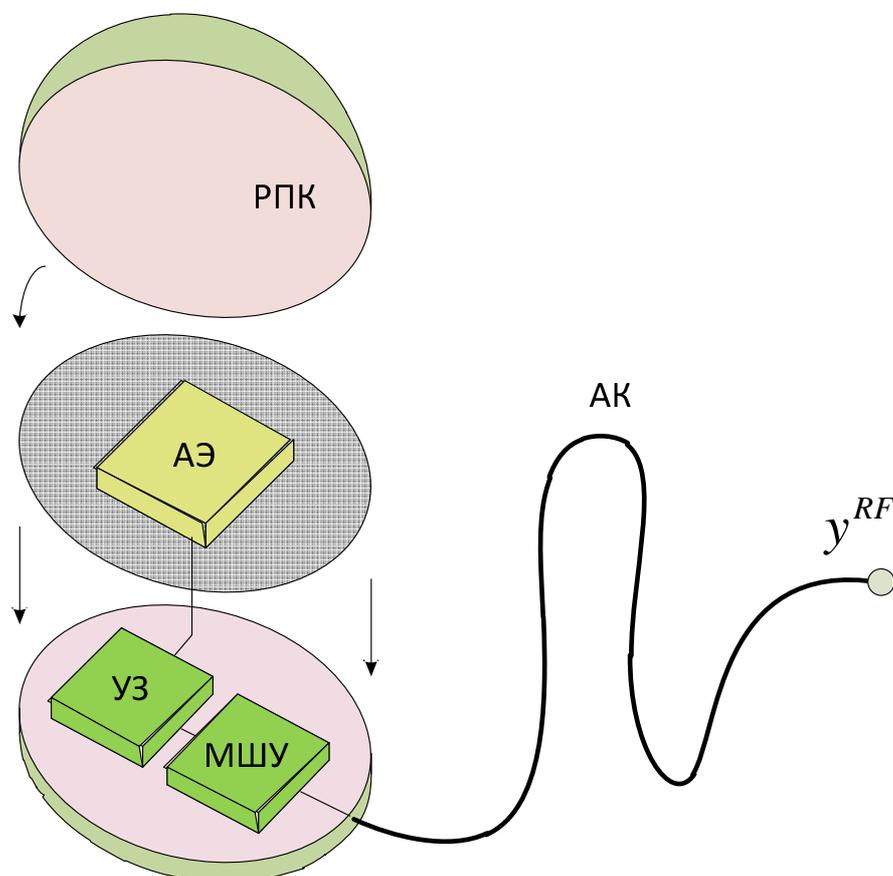


Рисунок 2. Антенный модуль (РПК – радиопрозрачный колпак, АЭ – антенный элемент, УЗ – устройство защиты, МШУ – малошумящий усилитель, АК – антенный кабель)

Разработка АМ в диссертации не рассматривается, количество АМ является частью заданной структуры. Систематические погрешности, вносимые АМ, компенсируются в процессе привязки УНАП к объекту и слабо изменяются во времени. Поэтому для простоты изложения будем отождествлять сигналы АМ и сигналы соответствующих им приемных точек, где под сигналом в приемной точке будем понимать сигнал, принятый идеальной изотропной антенной. Отрезок, соединяющий фазовые центры двух антенн, будем называть *базой*.

Выходные сигналы антенных модулей подлежат дальнейшей обработке в устройстве, которое будем называть *модулем УНАП*.

В первую очередь в модуле УНАП осуществляется перенос сигналов на промежуточную частоту, фильтрация, усиление, преобразование частоты радиосигналов и аналого-цифровое преобразование сигналов. Подсистемы, реализующие данные преобразования, называют радиочастотным блоком (РЧБ). В англоязычной литературе термину РЧБ соответствует понятие “front end”.

Возможно построение УНАП с различным соотношением числа АМ и РЧБ. Если количество РЧБ меньше числа АМ, встает задача разделения сигналов.

Известны УНАП с кодовым (серия МРК, [21]) и временным [10] разделением сигналов АМ. Но использование перечисленных типов разделения ухудшает эквивалентное отношение сигнал/шум на входе цифрового вычислителя, что в итоге снижает потенциальные характеристики УНАП. Преимущество кодового и временного разделения - возможность обойти проблему неидентичности характеристик РЧБ. Эта проблема особенно актуальна при использовании сигналов ГЛОНАСС с частотным разделением – сигналы с различными литерными частотами получают различный фазовый сдвиг при прохождении РЧБ, что в итоге может привести к систематическим погрешностям определения параметров ориентации [21].

Возможно использование частотного разделения. Это решение приводит к расширению полосы РЧБ, что, в свою очередь, усложняет аппаратуру. К тому же, частотное разделение не помогает в решении проблемы неидентичности РЧБ – сигналы на различных частотах получают различный фазовый сдвиг при прохождении РЧБ.

Если число РЧБ совпадает с числом АМ, то потребность в разделении сигналов не возникает. В этом случае сигналы АМ могут преобразовываться одновременно. Негативные следствия такого подхода – умножение числа РЧБ и наличие проблемы неидентичности их характеристик. Преимущества –

простота реализации на основе существующих наработок ведущей организации и минимизация энергетических потерь. Структура с тремя АМ, сигнал которых обрабатывается тремя РЧБ, была выбрана представителями ведущей организации для опытного образца разрабатываемой УНАП (см. рисунок 3).

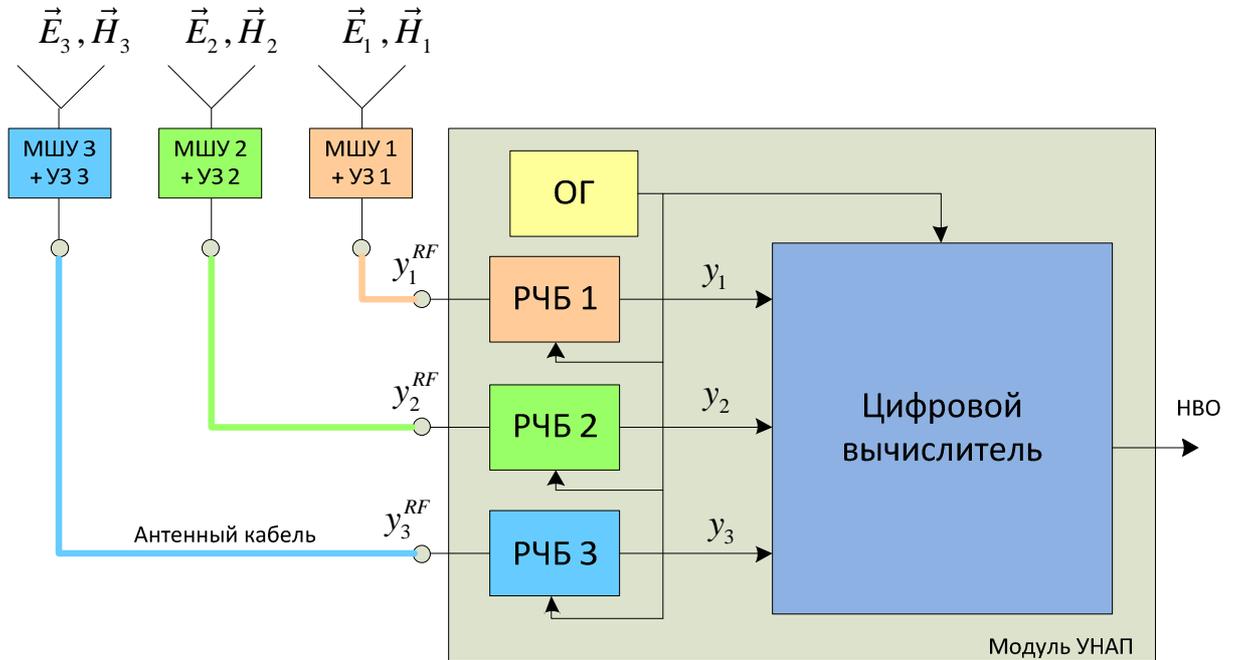


Рисунок 3. Состав УНАП

Использование разрабатываемых алгоритмов предполагается в УНАП с тремя антеннами. Тем не менее, структура алгоритмов должна позволять увеличивать число антенн без изменения общей архитектуры программного обеспечения.

В современной НАП используется корреляционная обработка сигналов с выходов АЦП. Как правило, она производится средствами специализированной СБИС. Функциональные преобразования, осуществляемые интегральной схемой, фиксированы. Разработка отдельного кристалла для УНАП не предполагается, поэтому в ней должны использоваться существующие наработки. Для реализации алгоритмов доступна СБИС корреляторов, осуществляющих умножение сигналов АЦП на гармонические колебания и ПСП ДК заданной частоты, последующее накопление на эпохе ДК.

Структура программного обеспечения НАП не ограничивается первичной обработкой. Функции, выполняющие первичную обработку, интегрируются в

общую архитектуру специального программно-математического обеспечения (СПМО) УНАП. Для этого они должны соответствовать существующему интерфейсу. При заданной структуре УНАП и существующих в ведущей организации алгоритмах вторичной обработки для формирования НВО от этапа первичной обработки для каждого видимого НКА требуются измерения [2, 14] (см. рисунок 4):

- 1) РФ сигналов АМ на произвольный момент формирования НВО.
- 2) Фазы ДК кода сигнала ПЧ на произвольный момент формирования НВО (допустимо усреднение по всем антеннам, либо формирование данных для первой).
- 3) Сдвига частоты сигнала ПЧ на интервал формирования НВО (допустимо усреднение по всем антеннам, либо формирование данных для первой).
- 4) Значений символов навигационной информации (НИ, также используется термин «навигационное сообщение»). В рассматриваемой УНАП используется известный алгоритм выделения НИ в некогерентном режиме [22, 47].

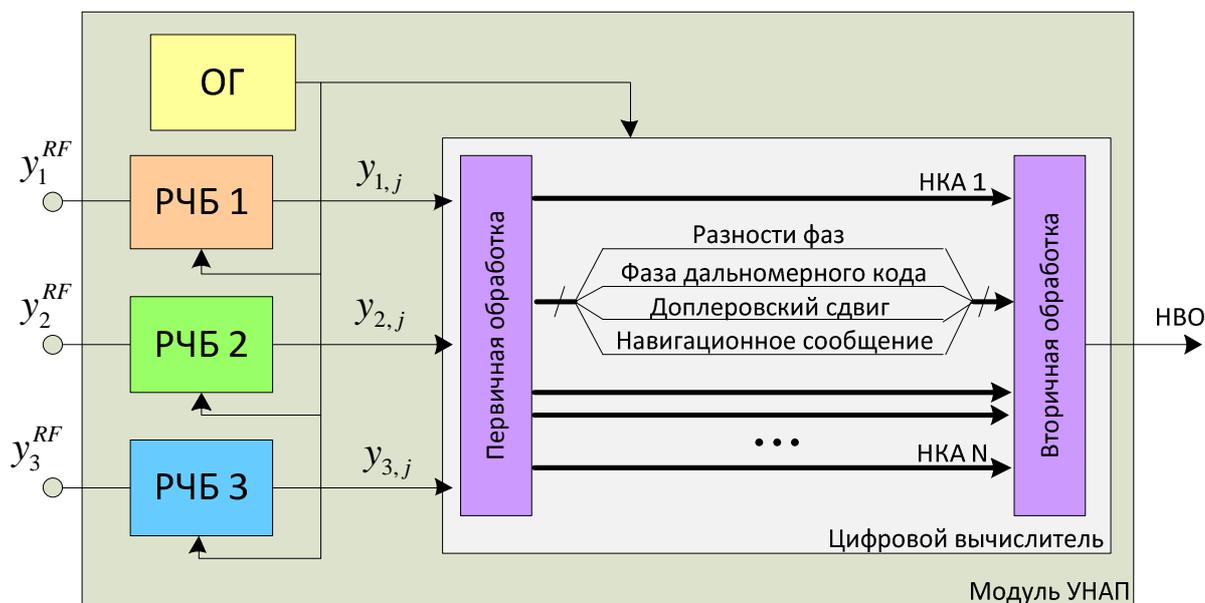


Рисунок 4. Обмен данными между этапами обработки

Подводя итог вышесказанному, в диссертационной работе полагаются заданными:

- тип соединения АМ, РЧБ и цифрового вычислителя;
- разделение цифровой обработки на первичную и вторичную;
- состав измерений, передаваемых между этапами обработки;
- максимально независимая первичная обработка сигналов каждого НКА;
- структура корреляторов.

Для достижения поставленной в диссертации цели решаются задачи:

1. Синтез и анализ некогерентных алгоритмов оценивания (фильтрации) параметров сигналов ПЧ, обеспечивающих повышение точности формируемых оценок разностей фаз, задержки и частоты, в том числе:

1.1 Разработка корректной математической модели наблюдений сигналов ПЧ и их параметров; выбор критерия решения задачи оценки параметров.

1.2 Разработка методики определения потенциальных характеристик оценивания параметров сигналов, как характеристик строго решения задачи синтеза в соответствии с заданным критерием.

1.3 Синтез и анализ алгоритма оценивания параметров сигналов промежуточной частоты: рекурсивных фильтрационных алгоритмов, дискриминаторов параметров сигналов.

1.4 Расчет потенциальных характеристик на основании разработанной методики, расчет характеристик синтезированных и существующих алгоритмов, их сравнение с потенциальными.

2. Разработка методики и алгоритмов компенсации погрешностей, вносимых в оценки разностей фаз неидентичностью характеристик радиочастотных блоков:

2.1 Обоснование возможности решения задачи компенсации погрешностей при добавлении функции коммутации РЧБ

2.2 Модификация алгоритмов слежения за параметрами сигналов ПЧ в условиях работы коммутатора РЧБ; измерение параметров, необходимых для расчета РФ сигналов АМ.

2.3 Разработка алгоритма расчета РФ сигналов с выходов АМ на основе измеренных параметров сигналов ПЧ.

2.4 Анализ характеристик разработанных алгоритмов с помощью имитационного моделирования.

2.5 Экспериментальные исследования характеристик опытного образца, реализующего разработанные алгоритмы и коммутацию РЧБ.

**Методы исследования** При решении поставленных задач использованы методы теории вероятностей и математической статистики, статистической теории радиотехнических систем, теории оптимальной фильтрации случайных процессов, имитационного компьютерного моделирования, вычислительной математики, программирования.

**Научная новизна** результатов диссертационной работы состоит в следующем:

1. Предложена новая математическая модель параметров сигналов радио- и промежуточной частоты, принимаемых угломерной НАП в пространственно разнесенных точках. Она отличается от известных моделей разделением параметров сигналов на две группы, одна из которых характеризует поступательное движение объекта относительно спутника (задержка, частота, «общая» фаза), а вторая – вращательное движение объекта (разности фаз сигналов).

2. Получено решение уравнений Стратоновича при применении гауссовой аппроксимации к апостериорной плотности вероятности вектора состояния. Алгоритмы формирования решения отличаются от известных тем, что позволяют производить разложение логарифма функции правдоподобия в произвольной точке пространства состояний.

3. Методами теории оптимальной фильтрации в гауссовом приближении, с использованием предложенной математической модели описания параметров сигналов и алгоритмов решения уравнений Стратоновича в гауссовом приближении, решена задача синтеза квазиоптимального некогерентного алгоритма оценивания параметров сигналов промежуточной частоты.

4. Для синтезированных дискриминаторов частоты, задержки и разности фаз получены аналитические выражения для расчета дискриминационных характеристик и дисперсий шумов на выходе дискриминатора.

5. Разработана методика анализа потенциальных характеристик оценки параметров сигналов, принятых на множестве пространственно разнесенных точек. Методика основана на численном решении уравнений Стратоновича, по результатам которого определяется апостериорной вероятности оцениваемых параметров, по которой рассчитываются оптимальные, по тому или иному критерию, оценки параметров сигналов.

6. Разработана методика и алгоритмы компенсации погрешностей, вносимых неидентичностью характеристик радиочастотных блоков в оценки разностей фаз. Они основаны на использовании коммутаторов, производящих циклическое переключение радиочастотных блоков УНАП, анализе разностей фаз сигналов при прохождении различных РЧБ и последующей компенсации соответствующей погрешности в измерениях.

7. Решена задача синтеза уточненного квазиоптимального некогерентного алгоритма оценивания параметров сигналов промежуточной частоты в УНАП, учитывающего циклическое переключение радиочастотных блоков.

### **Практическая ценность работы.**

1. Разработанный некогерентный алгоритм обработки сигналов обеспечивает существенное повышение помехоустойчивости (до 8 дБ) и чувствительности (на 7-17 дБ) УНАП.

2. Разработанный некогерентный алгоритмы обработки сигналов обеспечивает повышение точности оценок разности фаз, и как следствие – повышение точности определения параметров угловой ориентации потребителя. Повышение точности тем больше, чем ниже динамика вращений объекта. При низкой динамике вращательных движений происходит снижение среднеквадратической ошибки оценок РФ в 3-4 раза.

3. Разработанный некогерентный алгоритм обработки сигналов позволяет ослабить требования к нестабильности опорного генератора при тех же точностных характеристиках, что ведет к упрощению и удешевлению аппаратуры.

4. Разработанный алгоритм прямой оценки разности фаз сигналов, принятых в пространственно разнесенных точках, в отдельных ситуациях позволяет проводить НВО даже при воздействии сильных помех, обеспечивая функцию подавления как заградительных, так и имитационных помех. Данная возможность обусловлена тем, что в первом приближении УНАП обладает свойством пространственной селекции сигналов.

5. Предложенный метод решения уравнений Стратоновича для апостериорной плотности вероятности оцениваемых параметров сигнала в гауссовом приближении дает разработчику определенную свободу при выборе опорных сигналов корреляторов. Например, в диссертации опорные сигналы корреляторов обработки сигналов различных антенн выбраны совпадающими в рамках одного канала обработки. Это позволяет существенно упростить структуру корреляторов и снизить интенсивность обмена между процессором и коррелятором.

6. Предложенные алгоритмы перекоммутации радиочастотных блоков, приема сигналов и коррекции измерений позволяют нивелировать влияние неидентичности характеристик радиочастотных блоков УНАП, что повышает точность формируемых оценок и снижает требования к характеристикам РЧБ.

7. Разработанный алгоритм численного решения уравнений Стратоновича для апостериорной плотности вероятности оцениваемых параметров сигнала применим для сравнения характеристик разнообразных алгоритмов, используемых в навигационной аппаратуре, с потенциальными характеристиками решения их задач.

**Реализация и внедрение результатов исследования** Результаты исследований использованы при выполнении НИР и ОКР:

1. ОКР «Разработка навигационной аппаратуры потребителей, работающей по сигналам перспективных глобальных навигационных спутниковых систем, предназначенной для оснащения частей и подразделений Сухопутных войск», «Перспектива-С», ОАО «НИИ космического приборостроения».

2. НИР «Разработка радионавигационной аппаратуры оценки угловой ориентации и местоположения носителя», ООО «Коэнергия».

3. НИР «Исследование вопросов помехозащиты аппаратуры спутниковой навигации военного и специального назначения, средств НКУ и бортовых информационно-навигационных комплексов системы ГЛОНАСС», «Вальсет». Заказчик «Министерство обороны РФ».

4. НИР. «Исследования по созданию устройства определения параметров пространственной ориентации объекта по сигналам КНС», «Гратис-МЭИ», ФГУП «Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем».

Внедрение результатов исследования подтверждены актами, полученными в НИУ «МЭИ», ОАО «НИИ Космического приборостроения».

**Апробация результатов** Результаты работы докладывались и обсуждались на четырнадцатой, пятнадцатой, шестнадцатой, семнадцатой и восемнадцатой международной НТК студентов и аспирантов «Радиотехника, электроника и энергетика (Москва, 2008-2012 гг); на втором межотраслевом научно-техническом форуме «Молодежь и будущее авиации и космонавтики»

(Москва, 2010 г); на восьмой и девятой НК «Радионавигационные Технологии в Приборостроении» (Туапсе, 2010-2011 гг); на семнадцатой международной НТК «Радиолокация Навигация Связь» (RLNC-2011, Воронеж, 2011 г).

**Публикации** Основное содержание диссертационной работы изложено в двадцати одной печатной работе, среди которых девять статей (из которых шесть в научно-технических журналах, входящих в перечень Высшей аттестационной комиссии), четыре патента, три свидетельства о регистрации программы для ЭВМ, а также тезисы пяти международных конференций. Материалы диссертации отражены в 4 научно-технических отчетах по НИР и ОКР.

**Результаты диссертационной работы, выносимые на защиту:**

1. Квазиоптимальный некогерентный алгоритм оценивания параметров (разности фаз сигналов, принятых в пространственно разнесенных точках, задержка и смещение частоты) сигналов промежуточной частоты, синтезированный методами теории оптимальной фильтрации с использованием предложенной математической модели описания параметров сигналов и алгоритмов решения уравнений Стратоновича в гауссовом приближении, и его характеристики.

2. Методика анализа потенциальных характеристик оценок параметров сигналов, принятых на множестве пространственно разнесенных точек, основанная на численном решении уравнений Стратоновича для апостериорной плотности вероятности оцениваемых параметров с последующим расчетом оптимальных, в том или ином смысле, оценок параметров сигналов по рассчитанной апостериорной ПВ, и получающиеся с использованием этой методики характеристики.

3. Упрощенный некогерентный алгоритм оценки задержки, частоты и разностей фаз сигналов промежуточной частоты, принятых на множестве пространственно разнесенных точек, ориентированный на практическую реализацию в УНАП и рекомендуемый для практического использования.

4. Результаты моделирования и экспериментальных исследований разработанных некогерентных алгоритмов оценивания параметров сигналов в УНАП.

5. Методика и алгоритмы компенсации неидентичности характеристик радиочастотных блоков, основанные на использовании коммутаторов, производящих циклическое переключение радиочастотных блоков УНАП, анализе разностей фаз сигналов при прохождении различных РЧБ и последующей компенсации соответствующей погрешности в измерениях. Результаты их моделирования и экспериментальных исследований.

**Структура и объем работы** По своей структуре диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы и приложений. Работа изложена на 270 страницах машинописного текста (включая 85 страниц приложений), содержит 74 рисунка (включая 4 в приложениях), 6 таблиц и список литературы из 53 наименований.

### **Основное содержание работы**

**Во введении** обосновывается актуальность выбранной темы и решаемых задач, формулируется цель исследования, определяется научная новизна и практическая ценность результатов, вводятся основные используемые понятия, описывается принцип фазовой углометрии, определяется перечень задач, решение которых необходимо для достижения цели исследования, производится описание общей функциональной схемы построения угломерной НАП.

**В первой главе** проводится общая постановка задачи оценивания частоты, задержки и разности фаз сигналов промежуточной частоты, принимаемых на множестве пространственно разнесенных точек, а так же приводится методика анализа потенциальных характеристик оценивания, основанная на решении уравнений Стратоновича для апостериорной плотности вероятности.

Основные особенности выбранной постановки задачи заключаются в следующем:

1) Разделение параметров сигналов на две группы: параметры (задержка, частота, «общая» фаза), изменение которых обусловлено поступательным движением объекта, и параметры, изменение которых обусловлено вращением объекта (разности фаз и их производные).

2) Общая фаза относится к неинформативным параметрам, то есть её оценивание не требуется. Эта особенность позволяет выполнить синтез некогерентных алгоритмов путем усреднения апостериорной плотности вероятности по общей фазе.

Методика анализа потенциальных характеристик оценивания базируется на прямом решении уравнений Стратоновича для апостериорной плотности вероятности (ПВ) распределения вектора состояния с последующим получением *оптимальных оценок* параметров по заданному критерию. В качестве критериев выбран минимум среднего риска при простой и квадратичной функциях потерь. Оптимальные оценки параметров находятся из сформированной в результате решения уравнения Стратоновича апостериорной ПВ. В главе приводятся уравнения Стратоновича для апостериорной ПВ для заданной постановки задачи, описываются алгоритмы численного решения этих уравнений и алгоритмы последующего получения оценок параметров сигналов. Отмечено, что предложенный алгоритм обладает большой вычислительной сложностью, поэтому его применение целесообразно только для выявления потенциальных характеристик решения задачи оценивания параметров сигналов в УНАП.

**Во второй главе** проводится синтез и анализ квазиоптимальных некогерентных алгоритмов оценивания разностей фаз, частоты и задержки сигналов промежуточной частоты в угломерной НАП. Для этого используется подход, основанный на аппроксимации апостериорной ПВ многомерным

гауссовским законом с последующей записью уравнений для математического ожидания и матрицы дисперсий ошибок фильтрации вектора состояния.

Синтезированный алгоритм включает оптимальные дискриминаторы соответствующих параметров сигналов и комплексный сглаживающий фильтр. Приводятся результаты аналитического расчета дискриминационных характеристик и дисперсий шумов на выходе дискриминаторов.

Разработан упрощенный квазиоптимальный алгоритм оценивания, как дальнейшее упрощение алгоритма оценивания в гауссовом приближении апостериорной ПВ, ориентированный на практическую реализацию в УНАП и основанный на пяти дополнительных допущениях. Итоговая система оценивания параметров сигналов промежуточной частоты состоит из систем слежения за задержкой, частотой и разностями фаз.

**В третьей главе** приводятся результаты моделирования алгоритмов обработки сигналов, как разработанных, так и известных ранее. Проводится сравнение характеристик упрощенного квазиоптимального алгоритма с характеристиками ряда других алгоритмов, включая используемый в УНАП предыдущего поколения. Характеристики алгоритмов сравниваются с потенциальными, соответствующими оптимальным, по заданным критериям, оценкам.

Описывается имитационная модель УНАП в целом, анализируются результаты моделирования.

Приводятся результаты натурных испытаний опытного образца УНАП, реализующего упрощенные квазиоптимальные алгоритмы.

**В четвертой главе** приводится методика и алгоритмы компенсации ошибок, вносимых неидентичностью характеристик радиочастотных блоков в оценки разностей фаз сигналов.

Предлагается система последовательных переключений радиочастотных блоков, при которой появляется возможность анализировать параметры

сигналов при прохождении различных РЧБ. Проведена коррекция алгоритма первичной обработки сигналов УНАП, описанного в гл. 2, с учетом производимых переключений, что позволяет оценивать параметры неидентичности радиочастотных блоков. Разрабатывается алгоритм пересчета разностей фаз сигналов промежуточной частоты в разности фаз сигналов, получаемых с выходов антенн, на основе измеренных параметров неидентичности радиочастотных блоков.

Приводятся результаты моделирования и натурных испытаний, подтверждающие работоспособность предложенного метода и иллюстрирующие его эффективность.

В **заключении** сформулированы основные научные и практические результаты работы.

В **Приложение 1** вынесены дополнительные иллюстрации, в **Приложении 2** изложены математические доказательства отдельных положений, используемых в работе. В **Приложении 3** – акты о внедрении результатов.

### **Личный вклад автора**

Совместно с научным руководителем А.И. Перовым выполнены: постановка задачи синтеза некогерентных алгоритмов оценки задержки, частоты и разности фаз сигналов, принимаемых на множестве пространственно разнесенных точек, синтез и аналитический расчет характеристик упрощенного квазиоптимального алгоритма оценки параметров сигналов промежуточной частоты.

Создание аппаратного и программного обеспечения опытного образца УНАП, реализующего разработанный квазиоптимальный алгоритм оценивания сигналов промежуточной частоты и алгоритм компенсации неидентичности характеристик радиочастотных блоков, выполнено специалистами НПК-3 ЗАО «НИИ космического приборостроения». Экспериментальные исследования

помехоустойчивости, точности и чувствительности опытного образца проводились силами НПК-3 и НПК-5 ЗАО «НИИ космического приборостроения».

Лично соискателем получены следующие результаты:

1) Разработана методика анализа потенциальных характеристик оценок параметров сигналов, принимаемых угломерной НАП, основанная на численном решении уравнений Стратоновича.

2) Разработан квазиоптимальный алгоритм оценивания параметров сигналов промежуточной частоты в УНАП с разложением логарифма функции правдоподобия в окрестности произвольной точки в пространстве состояний. Проведен синтез и анализ дискриминаторов частоты, задержки и разности фаз в случае приема сигналов произвольным числом антенн.

3) Разработан упрощенный квазиоптимальный алгоритм оценки параметров сигналов, принимаемых на множестве пространственно разнесенных точек.

4) Проведено сравнение разработанных алгоритмов по критерию среднеквадратической ошибки оценивания мгновенных разностей фаз.

5) Создана имитационная модель угломерной навигационной аппаратуры потребителей и проведено имитационное моделирование.

6) Разработана методика и алгоритмы расчета разностей фаз сигналов на выходе антенных модулей по оценкам разностей фаз сигналов промежуточной частоты.

**Электронная версия** работы, а также препринты статей, информация о свидетельствах Роспатента и т.п., доступны на странице автора <http://www.srns.ru/wiki/Korogodin>

### **Благодарности**

Автор выражает благодарность своему научному руководителю – Перову Александру Ивановичу – за неоценимую помощь, вдохновение и создание

благоприятной среды для развития автора как инженера и работника науки. Некоторые идеи, лежащие в основе работы, предложены Александром Ивановичем. Подходы к решению научных проблем и применяемый теоретический базис – плоды его воспитания.

Следует отметить заслуги коллектива ОАО «НИИ космического приборостроения», в частности Букреева Александра Михайловича, в апробации результатов диссертационного исследования и постановке перед автором практически важных и значимых задач. Правильная постановка задачи порой важнее её решения. Огромный опыт разработчиков предприятия не раз позволял отделить главное от второстепенного, а сигнал от шума.

Автор благодарит сотрудников УИЦ «Современные радиоэлектронные и телекоммуникационные технологии» НИУ МЭИ за бесчисленные консультации, живое общение и поддержку.

Спасибо научному сообществу в целом, преподавателям Радиотехнического факультета и кафедры Радиотехнических систем «Национального исследовательского университета «МЭИ» в частности, за их работу и прививаемые ценности.

Заранее благодарю оппонентов, рецензентов и просто интересующихся за затраченное время и усилия, внимание к работе.

# **ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ЧАСТОТЫ И МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЕЁ РЕШЕНИЯ**

*«Радиотехника – это наука о реализации математики в технике»*

*Кириллов А. И.*

Как было сказано во Введении, задача первичной обработки сигналов распадается на две подзадачи: оценку параметров сигналов промежуточной частоты и расчет первых разностей фаз сигналов антенных модулей по сформированным оценкам параметров сигналов промежуточной частоты.

В англоязычной литературе за обработкой сигналов промежуточной частоты закрепился термин “baseband processing”. Для разработки алгоритмов оценивания параметров сигналов ПЧ на этапе первичной обработки необходимо задать модель этих сигналов и критерий для выбора наилучшего алгоритма.

## **1.1 Модель наблюдений сигналов промежуточной частоты**

Как уже отмечалось, в различных СРНС второго поколения (ГЛОНАСС, GPS) используются сигналы схожей структуры. Это дает возможность составить унифицированную модель наблюдений, которую можно использовать для синтеза алгоритмов обработки сигналов как системы ГЛОНАСС, так и системы NAVSTAR GPS.

Сигнал - это функция времени. НАП принимает и обрабатывает навигационный сигнал в своей шкале времени, задаваемой ОГ НАП. Введем обозначение  $t$  для непрерывного параметра времени по шкале приемника.

В шкале времени приемника взятие  $i$ -го отсчета АЦП происходит в моменты  $t_i = t_{i-1} + T_d$ , где  $T_d = 1/f_d$ ,  $f_d$  - частота дискретизации АЦП. В качестве модели отсчета АЦП можно принять среднее значение входного сигнала АЦП на интервале  $[t_{i-1}, t_i]$ .

Для упрощения выкладок и результирующих алгоритмов будем полагать АЦП линейным устройством, а его сигнал непрерывным по уровню:  $y_{m,i} \in \mathbb{R}^1$ . Это допущение широко используется при синтезе алгоритмов обработки сигналов СРНС [2, 22]. Благодаря использованию корреляционной обработки и преобладанию мощности шумов в полосе сигнала над мощностью полезного сигнала это допущение не приводит к серьезным противоречиям на практике [2]. В первом приближении влияние квантования сигнала на выходе АЦП можно учитывать как снижение отношения сигнал/шум на некоторую известную величину [2].

Здесь и далее для числа АМ примем обозначение  $M$ , а для числа видимых НКА -  $N$ .

Одно из требований, предъявляемых к СРНС второго поколения, – низкий уровень внутрисистемных помех. Поэтому при теоретических исследованиях можно принять, что каждому  $n$ -ому НКА соответствует  $n$ -й канал обработки, в котором проводятся наблюдения сигналов только данного НКА [2, 6, 22]:

$$\begin{aligned}
 y_{1,i}^{(n)} &= S_{1,i}^{(n)} + n_{1,i}, \\
 &\dots \\
 y_{m,i}^{(n)} &= S_{m,i}^{(n)} + n_{m,i}, \\
 &\dots \\
 y_{M,i}^{(n)} &= S_{M,i}^{(n)} + n_{M,i},
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $n_{m,i}$ , – шумы наблюдений на выходе РЧБ  $m$ -го АМ (и соответственно АЦП),  $S_{m,i}^{(n)}$  - сигнал  $n$ -го НКА на выходе РЧБ  $m$ -го АМ.

Следует обратить внимание, что выбранная модель наблюдений не предполагает наличия помех (отсутствует соответствующее слагаемое). Синтез алгоритмов в условии действия помех – отдельная большая задача, не рассматриваемая в данном диссертационном исследовании. Ознакомиться с результатами исследований автора в данном направлении можно в работах [30, 31].

Основной первоисточник шумов  $n_{m,i}$  – МШУ. Шум на выходе МШУ обладает спектральной плотностью мощности (СПМ) близкой к равномерной в полосе РЧБ. Далее он фильтруется, преобразуется по частоте, усиливается и подвергается аналого-цифровому преобразованию в РЧБ. В итоге СПМ  $n_{m,i}$  получает форму близкую к коэффициенту передачи по мощности РЧБ (см. рисунки 1, 2 Приложения 1). В качестве модели СПМ шума в исследовании используется приближение белым шумом. Это допущение основывается на следующих фактах:

1) Синтезируемые в диссертации алгоритмы используют корреляционную обработку. Шумовая же компонента корреляционных сумм слабо зависит от значений СПМ  $n_{m,i}$  вне полосы опорного сигнала [2, 22, 27].

2) Мощность опорных сигналов сосредоточена в той же частотной области, что и мощность принятых сигналов.

3) В полосе сигнала НКА СПМ  $n_{m,i}$  близка к равномерной (см. рисунок 5).

При прохождении шумом РЧБ происходит его обработка линейными фильтрами, что вызывает нормализацию шума. Таким образом, при принятом допущении о линейности аналого-цифрового преобразования, шум  $n_{m,i}$  можно считать дискретным белым гауссовским [22].

Структура сигналов НКА определяется интерфейсными контрольными документами (ИКД) [3, 4]. Сигналы существующих СРНС второго поколения являются сигналами с фазовой манипуляцией дальномерным кодом (ДК) и символами навигационной информации (НИ). Манипуляция ДК выступает в

качестве спектрорасширяющей. Манипуляция символами НИ происходит согласовано с манипуляцией ДК – смена символа НИ может произойти только в момент смены символа ПСП.

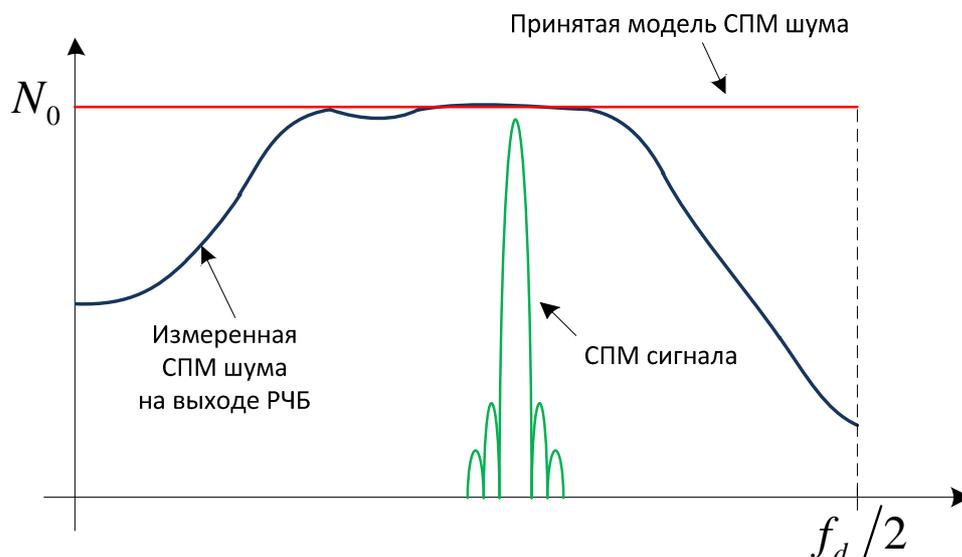


Рисунок 5. Модель СПМ шума на выходе РЧБ

При распространении от НКА до антенны сигнал получает задержку огибающей и набег фазы несущей, а также пропорциональное расстоянию ослабление напряженности поля. Воздействие диспергирующих атмосферных сред приводит к нарушению строго соответствия между фазой несущей и задержкой огибающей. Дополнительная задержка сигнала происходит в инерционных цепях АМ и РЧБ. Обозначим итоговую задержку огибающей как  $\hat{\tau}$ , а набег фазы -  $\hat{\varphi}_s$ .

Перенос частоты сигнала в РЧБ производят гетеродинированием. Рассмотрим НАП с одной ПЧ. Из-за нестабильности ОГ УНАП фаза гетеродинного колебания в шкале времени НКА изменяется неравномерно, не подчиняясь линейному закону. Она включает в себя случайные флуктуации. И наоборот, в шкале времени приемника фаза сигнала НКА, каким бы идеальным не был бортовой эталон частоты, изменяется неравномерно даже в случае отсутствия взаимного движения. Фаза сигнала промежуточной частоты является разностью фаз гетеродина и фазы сигнала НКА. И в одной, и в другой шкале времени она получает дополнительное случайное слагаемое,

обусловленное нестабильностью ОГ приемника. Математически его можно выразить как разность фазы гетеродина и линейно нарастающей функции  $\omega_{get}t$ , где  $\omega_{get}$  - номинальная частота гетеродина. Введем обозначение  $\widehat{\varphi}_{xo}$  (согласно определению, она включает и начальную фазу гетеродина).

Тогда модель сигнала  $n$ -го НКА на выходе РЧБ  $m$ -го АМ:

$$S_{m,i}^{(n)} = A^{(n)} G_c^{(n)} \left( t_i - \widehat{\tau}_{m,i}^{(n)} \right) \cos \left( \omega_{if}^{(n)} t_i + \widehat{\varphi}_{xo,i}^{(n)} + \widehat{\varphi}_{s,m,i}^{(n)} + \pi \theta^{(n)} \left( t_i - \widehat{\tau}_{m,i}^{(n)} \right) \right), \quad (1.2)$$

где

$A^{(n)}$  - амплитуда сигнала на выходе РЧБ; для упрощения выкладок будем считать известной; синтез алгоритмов обработки в условиях неопределенности амплитуды сигнала приведен автором в работах [9, 27];

$G_c^{(n)}$  - функция дальномерного кода  $n$ -го НКА, принимающая значения из  $\{-1; 1\}$ , известна на основании ИКД [3, 4];

$\omega_{if}^{(n)} = \omega_{rf} - \omega_{get}$  - номинальная промежуточная частота сигнала  $n$ -го НКА ( $\omega_0$  - несущая частота сигнала); известна на основании ИКД и частотного плана НАП;

$\theta^{(n)}$  - неизвестная функция модуляции НИ, принимает значения из  $\{0; 1\}$ .

Далее для упрощения записи опустим индекс НКА  $n$ . Сигнал одного спутника на выходе всех РЧБ представим в виде:

$$\begin{aligned} S_{1,i} &= A G_c \left( t_i - \widehat{\tau}_{1,i} - \Delta \widehat{\tau}_{11,i} \right) \cos \left( \omega_{if} t_i + \widehat{\varphi}_{1,i} + \widehat{\psi}_1 \right), \\ &\dots \\ S_{M,i} &= A G_c \left( t_i - \widehat{\tau}_{1,i} - \Delta \widehat{\tau}_{M1,i} \right) \cos \left( \omega_{if} t_i + \widehat{\varphi}_{1,i} + \widehat{\psi}_M \right), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\widehat{\psi}_{q,i} = \widehat{\varphi}_{s,q,i} - \widehat{\varphi}_{s,1,i} \quad (1.4)$$

- мгновенная РФ сигналов одного НКА на выходах РЧБ  $q$  и  $l$  (очевидно,  $\widehat{\psi}_{1,i} = 0$ ),

$$\widehat{\varphi}_{1,i} = \widehat{\varphi}_{xo,i} + \widehat{\varphi}_{s,1,i} + \pi \theta \left( t_i - \widehat{\tau}_i \right). \quad (1.5)$$

- фаза сигнала первого РЧБ, включая манипуляцию НИ,

$$\Delta \widehat{\tau}_{q,i} = \widehat{\tau}_{q,i} - \widehat{\tau}_{1,i} \quad (1.6)$$

- мгновенная разность задержек (РЗ) сигналов одного НКА на выходах РЧБ для АМ  $q$  и  $l$  (очевидно,  $\Delta \widehat{\tau}_{1,i} = 0$ ).

Отметим важную особенность модели (1.3), заключающуюся в том, что фазы высокочастотного заполнения всех сигналов содержат общую компоненту  $\widehat{\varphi}_{1,k}$ , характеризующую поступательное движением объекта относительно спутника, и «индивидуальные» компоненты  $\widehat{\psi}_{m1,k}$ , характеризующие вращательное движением объекта.

Как отмечалось выше, изменение задержки огибающей и фазы сигнала ПЧ определяется взаимным движением НКА и УНАП, динамикой состояния атмосферных сред, дрейфом характеристик УПЧ и АМ. Тем не менее, практика построения НАП [2] и проведенные исследования [48] указывает на то, что процессы фазы и задержки могут быть аппроксимированы кусочно-линейными функциями с интервалами между кусками до сотен миллисекунд (см. рисунок б).

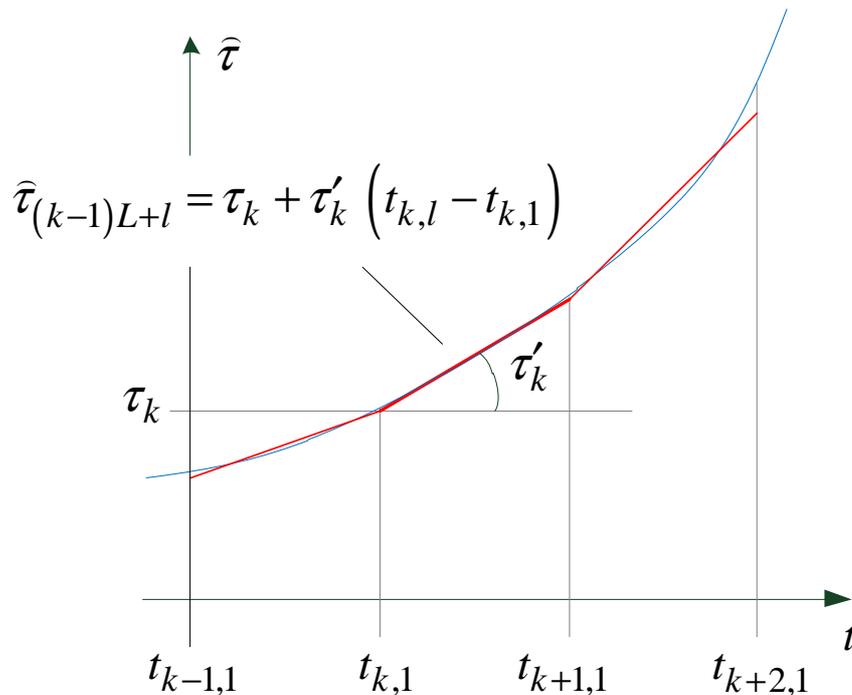


Рисунок б. Кусочно-линейная аппроксимация

На интервале одной линейной аппроксимации её параметры остаются неизменными. Данное обстоятельство может быть использовано для построения дискретного фильтра, работающего с периодом смены линейных аппроксимаций (миллисекунды), что позволяет перенести его реализацию на процессор [2].

Введем двойной индекс параметра времени по шкале приемника:

$$t_{k,l} = t_{i(k,l)}, \quad i(k,l) = l + \sum_{j=1}^{k-1} L_j, \quad (1.7)$$

где индекс  $k$  определяет номер интервала линейной аппроксимации, а индекс  $l$  задает номер отсчета АЦП внутри интервала,  $L_j$  – число отсчетов АЦП на  $j$ -ом интервале.

Забегая вперед, отметим, что в НАП  $L_j$  определяется длительностью эпохи ДК опорного сигнала (его периодом). В процентном выражении в процессе работы  $L_j$  изменяется слабо, при построении фильтров этим изменением пренебрегают [2]. Введем  $L$  как некоторое среднее  $L_j$ . Если период дискретизации АЦП  $T_d$ , то средняя длительность интервала одной линейной аппроксимации

$$T = LT_d. \quad (1.8)$$

На  $k$ -ом интервале задержка, согласно принятой аппроксимации, изменяется по линейному закону:

$$\hat{\tau}_{i(k,l)} = \hat{\tau}_{i,k,l} = \tau_k + \tau'_k (t_{k,l} - t_{k,1}), \quad (1.9)$$

где параметры аппроксимации  $\tau_k$  и  $\tau'_k$  неизменны. Очевидно,  $\tau_k = \hat{\tau}_{i,k,1}$  – мгновенное значение задержки на начало  $k$ -го интервала.

Аналогично, двумя параметрами  $\psi_{m1,k}$  и  $\psi'_{m1,k}$  характеризуется аппроксимация мгновенных РФ:

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}_{m,i(k,l)} &= \widehat{\psi}_{m,k,l} = \psi_{m,k} + \psi'_{m,k} (t_{k,l} - t_{k,1}), \quad m = 1..M, \\ \psi_{1,k} &= 0, \quad \psi'_{1,k} = 0,\end{aligned}\tag{1.10}$$

Примем допущение, что смена значений функции  $\theta(t_i - \widehat{\tau}_i)$  возможна только при переходе от  $t_{k,L}$  к  $t_{k+1,1}$  (в НАП соответствует идеальной работе системы символьной синхронизации). Тогда возможна линейная аппроксимация мгновенной фазы сигнала РЧБ, подключенного к первому АМ:

$$\widehat{\phi}_{1,i(k,l)} = \widehat{\phi}_{1,k,l} = \phi_{1,k} + \omega_{1,k} (t_{k,l} - t_{k,1}).\tag{1.11}$$

В работах автора [9, 25] проведен синтез систем слежения в условии различия задержек сигналов различных РЧБ. Реализация системы в таком виде крайне затруднительна, т.к. классические структуры корреляторов рассчитаны на накопление, производимое синхронно эпохам ДК. Итоговый алгоритм значительно упрощается для реализации в УНАП, если для расчетов корреляционных сумм для различных РЧБ использовать один и тот же опорный ДК, а задержки сигналов различных РЧБ считать совпадающими. В таком виде алгоритмы в итоге реализованы в опытном образце УНАП ведущей организации, поэтому для упрощения выкладок и уменьшения разрыва практики и теории предлагается и в диссертации использовать приближение:

$$\forall m, k, l: \Delta \widehat{\tau}_{m,i(k,l)} = \Delta \widehat{\tau}_{m,k,l} = 0.\tag{1.12}$$

Применение данного приближенного тождества не приводит к существенному ухудшению характеристик УНАП, т.к. расстояния между антеннами значительно меньше расстояния, соответствующего длительности корреляции дальномерного кода.

Выражение (1.3) для сигнала РЧБ, подключенного к  $m$ -ому АМ, может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned}S_{m,i(k,l)} &= S_{m,k,l} = A G_c (t_i - \tau_{1,k}) \times \\ &\times \cos\left(\omega_{if} t_i + (\omega_{1,k} + \psi'_{m1,k})(t_{k,l} - t_{k,1}) + \phi_{1,k} + \psi_{m1,k}\right), \quad m = 1..M\end{aligned}\tag{1.13}$$

*Примечание.* В [9] автором проведен синтез алгоритмов при кусочно-параболической аппроксимации фазы и задержки. Полученные алгоритмы требуют использования корреляторов с дополнительным управлением по производной частоты. Значительного улучшения характеристик для существующих сигналов СРНС (не имеющих пилот-компоненты) это не приносит, но требует переработки структуры корреляторов и увеличения интенсивности обмена между коррелятором и процессором. Поэтому в данной работе используется более простая кусочно-линейная аппроксимация.

$$\text{Очевидно, } t_{k,l} - t_{k,1} = (l-1)T_d .$$

Для краткости опустим индекс “1” при параметре частотного сдвига первой антенны, будем называть этот параметр просто «частотой», если контекст позволяет её идентифицировать однозначно. Аналогично поступим с параметром задержки ДК.

Для дальнейшего описания воспользуемся математическими моделями теории вероятностей. В диссертации полагается, что неизвестные параметры сигналов являются случайными величинами или процессами.

С учетом аппроксимаций и упрощений, принятые в  $i(k, l)$ -й момент отсчеты образуют реализацию векторной случайной величины (СВ)  $\mathbf{y}_{k,l}$ , для которой известна зависимость от векторных СВ  $\boldsymbol{\lambda}_k$ ,  $\boldsymbol{\mu}_k$  и  $\mathbf{n}_{k,l}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k,l} &= \mathbf{S}_{k,l}(\boldsymbol{\lambda}_k, \boldsymbol{\mu}_k) + \mathbf{n}_{k,l}, \\ \mathbf{y}_{k,l} &= \begin{bmatrix} y_{1,k,l} \\ \dots \\ y_{M,k,l} \end{bmatrix}, \mathbf{S}_{k,l} = \begin{bmatrix} S_{1,k,l} \\ \dots \\ S_{M,k,l} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где

$$\begin{aligned} S_{m,k,l}(\boldsymbol{\lambda}_k, \boldsymbol{\mu}_k) &= A G_c(t_{k,l} - \tau_k) \times \\ &\times \cos(\omega_{if} t_{k,l} + (\omega_k + \psi'_{m,k})(l-1)T_d + \varphi_{1,k} + \psi_{m,k}), \end{aligned} \quad (1.15)$$

$\boldsymbol{\lambda}_k$  - вектор информативных параметров (ВИП):

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \left| \psi_{2,k} \quad \psi'_{2,k} \quad \dots \quad \psi_{M,k} \quad \psi'_{M,k} \quad \omega_k \quad \tau_k \right|^T, \quad (1.16)$$

$\boldsymbol{\mu}_k$  - вектор неинформативных параметров:

$$\boldsymbol{\mu}_k = \boldsymbol{\varphi}_{1,k}, \quad (1.17)$$

$\mathbf{n}_{k,l}$  - вектор шумов наблюдений:

$$\mathbf{n}_{k,l} = \left[ n_{1,k,l} \quad \dots \quad n_{M,k,l} \right]^T \quad (1.18)$$

с корреляционной диагональной матрицей  $M \left[ \mathbf{n}_{k,l} \mathbf{n}_{qp} \right] = \mathbf{D}_n \delta_{k,q} \delta_{l,p}$  ( $\delta_{i,j}$  - символ Кронекера).

## 1.2 Априорные модели динамики

Последовательности СВ  $\lambda_k$  и  $\boldsymbol{\mu}_k$  образуют случайные процессы, на основании сведений об условиях работы СРНС можно задать их априорные модели.

Процессы  $\tau_k$ ,  $\omega_k$ ,  $\boldsymbol{\varphi}_{1,k}$  определяются поступательным движением первой антенны относительно НКА и процессом фазы ОГ НАП. Задача выбора моделей этих параметров обусловлена не угломерным назначением УНАП, как средства определения координат потребителей. Она встает и при разработке обычной НАП с одной антенной. Общемировой практикой является использование для этих параметров моделей в виде марковского случайного процесса как последовательности интеграторов с воздействием в виде белого шума [2, 5, 22]. Данные модели, с одной стороны, хорошо аппроксимируют спектры реальных процессов, с другой, – позволяют воспользоваться результатами теории оптимальной фильтрации [23, 49].

Динамика расхождения групповой и фазовых задержек относительно мала. Поэтому общепринятой практикой при построении НАП является использование т.н. «поддержки» ССЗ от ССФ или ССЧ [2]. Но в данной работе не рассматриваются вопросы взаимного влияния ССЗ и ССЧ, поэтому для простоты изложения принято приближение

$$\tau'_k \approx 0. \quad (1.19)$$

Тогда модель динамики задержки сигнала первой антенны:

$$\tau_k = \tau_{k-1} + \xi_{\tau,k}, \quad (1.20)$$

где  $\xi_{\tau,k}$  - дискретный БГШ с дисперсией  $\sigma_{\xi\tau}^2$  и нулевым математическим ожиданием.

Модель динамики частоты:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\omega,k} &= \mathbf{F}_{\omega} \mathbf{x}_{\omega,k-1} + \mathbf{G}_{\omega} \xi_{\omega,k}, \\ \mathbf{x}_{\omega,k} &= \begin{bmatrix} \omega_k \\ \omega'_k \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G}_{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где  $\xi_{\omega,k}$  - дискретный БГШ с дисперсией  $\sigma_{\xi\omega}^2$  и нулевым математическим ожиданием.

При построении НАП СРНС в качестве модели фазы обычно используют модель третьего порядка [2, 22], воспользуемся ею и для РФ:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\psi m,k} &= \mathbf{F}_{\psi} \mathbf{x}_{\psi m,k-1} + \mathbf{G}_{\psi} \xi_{\psi m,k}, m = 2..M \\ \mathbf{x}_{\psi m,k} &= \begin{bmatrix} \psi_{m,k} \\ \psi'_{m,k} \\ \psi''_{m,k} \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{\psi} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G}_{\psi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где  $\xi_{\psi m,k}$  - дискретный БГШ с дисперсией  $\sigma_{\xi\psi}^2$  и нулевым математическим ожиданием.

Дисперсии формирующих шумов  $\sigma_{\xi\tau}^2$ ,  $\sigma_{\xi\omega}^2$ , определяются динамикой поступательного движения объекта относительно линии визирования, а дисперсия  $\sigma_{\xi\psi}^2$  - динамикой вращения.

Модель развития параметра  $\varphi_{1,k}$  при непрерывной кусочно-линейной аппроксимации задается выражением:

$$\varphi_{1,k} = \left[ \varphi_{1,k-1} + \omega_{k-1} T \right]_{[-\pi; \pi]}, \quad (1.23)$$

где  $[ \ ]_{[-\pi; \pi]}$  - операция приведения к интервалу  $[-\pi; \pi]$ .

### 1.3 Начальные условия

В предыдущем параграфе заданы априорные модели динамики случайных процессов, в т.ч. входящих в  $\lambda_k$  и  $\mu_k$ . Благодаря моделям появляется возможность рассчитать априорные плотности вероятности (ПВ) СВ  $p(\lambda_k)$ ,  $p(\mu_k)$ ,  $p(\mathbf{x}_k)$  на любой последующий момент времени по известным априорным ПВ в текущий момент времени [22]. Зададим априорные ПВ в начальный момент времени.

Под начальным моментом времени будем понимать  $t_{1,0} = t_{0,L}$ , предшествующий получению первого отсчета АЦП в режиме слежения. В НАП ему соответствует момент передачи целеуказания от алгоритма поиска.

Алгоритмы поиска основываются на разбиении поля возможных фаз ДК и частотных сдвигов на конечное число ячеек. Даже в случае верного срабатывания алгоритма поиска, ПВ фазы ДК и частоты близки к равномерному распределению по ячейке. Если ширина ячейки поиска  $\omega_{sh}$ , а целеуказание по частоте  $\hat{\omega}_0$ , то  $\omega_0$  распределена равномерно на  $[\hat{\omega}_0 - \omega_{sh}/2; \hat{\omega}_0 + \omega_{sh}/2]$ . Дисперсия распределения составляет  $\omega_{sh}^2/12$ . Если ДК периодичен, то распределение задержки получается многомодальным, моды повторяются с периодом кода. Разрешение неоднозначности производится после выделения НИ, на этапе слежения можно ограничиться рассмотрением одной моды. Тогда, если ширина ячейки поиска по задержке  $\tau_{sh}$ , а целеуказание  $\hat{\tau}_0$ , то ПВ  $\tau_0$  можно принять равномерной на интервале  $[\hat{\tau}_0 - \tau_{sh}/2; \hat{\tau}_0 + \tau_{sh}/2]$ . Дисперсия распределения составляет  $\tau_{sh}^2/12$ .

Начальные априорные ПВ РФ зависят от типа потребителя, но ввиду конечности размеров антенной системы ограничены по аргументу. Если расстояние между  $m$ -ой и первой антеннами составляет  $l_{m1}$ , а вносимыми

смещениями в РФ при прохождении РЧБ пренебречь, то распределение РФ  $\psi_{m,k}$  ограничено интервалом  $[-\omega_{rf}l_m/c; \omega_{rf}l_m/c]$ .

Ввиду периодичности функции косинуса, плотность вероятности  $p(\varphi_{1,0})$  начальной фазы сигнала можно принять равномерно распределенной на интервале  $[-\pi; \pi]$  [2, 23] и не зависящей от  $\mathbf{x}_{\omega,0}$ .

Аналогично задаются априорные ПВ оставшихся параметров.

Приведенные априорные ПВ не являются нормальными. При заданных моделях динамики априорные ПВ в следующие моменты времени так же не будут строго нормальными [22]. Тем не менее, в отсутствии наблюдений они будут постепенно нормализоваться, а их дисперсии расти.

## 1.4 Критерий решения задачи

Объединим параметры в единый вектор, не включающий «общую» фазу:

$$\mathbf{x}_k = \left[ \mathbf{x}_{\psi 2,k}^T \quad \dots \quad \mathbf{x}_{\psi M,k}^T \quad \mathbf{x}_{\omega,k}^T \quad \tau_k \right]^T \quad (1.24)$$

На основании (1.20), (1.21), (1.22) можно составить уравнение

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{F}_x \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_x \xi_k, \\ M \left[ \begin{matrix} \xi_k \\ \xi_j \end{matrix} \right] &= \mathbf{D}_\xi \delta_{k,j}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Связь между векторами  $\lambda_k$  и  $\mathbf{x}_k$  зададим матрицей  $\mathbf{c}$ :

$$\lambda_k = \mathbf{c} \mathbf{x}_k. \quad (1.26)$$

Множество наблюдений  $\mathbf{y}_{k,l}$  на интервале от  $t_{1,1}$  до  $t_{k,l}$  обозначим как  $\mathbf{Y}_{1,1}^{k,l}$ .

Согласно модели наблюдений (1.14) векторные СВ  $\mathbf{Y}_{1,1}^{k,l}$ ,  $\mathbf{x}_k$  и  $\lambda_k$  зависимы. Следовательно, условная ПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l})$ , описывающая  $\mathbf{x}_k$  после получения реализации  $\mathbf{Y}_{1,1}^{k,l}$ , отличается от априорной ПВ  $p(\mathbf{x}_k)$ . Аналогично, условная ПВ  $p(\lambda_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l})$ , описывающая  $\lambda_k$  после получения реализации  $\mathbf{Y}_{1,1}^{k,l}$ ,

отличается от априорной ПВ  $p(\lambda_k)$ . В то же время, условная ПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l})$  достаточно полно характеризует СВ  $\mathbf{x}_k$  на момент  $t_{k,l}$  [23], а  $p(\lambda_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l})$  - СВ  $\lambda_k$ .

В рассматриваемой задаче связь (1.26) такова, что, рассчитав  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l})$  и проинтегрировав её по параметрам, не входящим в вектор  $\lambda_k$ , можно определить  $p(\lambda_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l})$ . По  $p(\lambda_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l})$  можно найти оптимальную оценку параметров  $\lambda_k$  по тому или иному вероятностному критерию.

Процессор НАП обрабатывает измерения поблочно, используемые им данные кратны интервалам кусочной аппроксимации. Промежуточными условными ПВ для наблюдений  $\mathbf{Y}_{1,1}^{k,1}$ ,  $\mathbf{Y}_{1,1}^{k,2}$ , ...,  $\mathbf{Y}_{1,1}^{k,L-1}$  и соответствующими им оценками, как правило, не интересуются. За условными же ПВ, учитывающими все наблюдения соответствующего интервала, в литературе [22, 23, 49] закрепилось название *апостериорных ПВ (АПВ)*:

- $p(\lambda_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  - апостериорная ПВ вектора информативных параметров;
- $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  - апостериорная ПВ вектора состояния.

При синтезе радиотехнических систем часто используют критерии минимизации среднего риска [23], т.е. математического ожидания потерь при заданной функции потерь. Согласно [23] оценка, минимизирующая средний риск при квадратичной функции потерь для ВИП, есть оценка условного среднего:

$$\hat{\lambda}_k = \int_{\lambda} \lambda_k p(\lambda_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L}) d\lambda_k, \quad (1.27)$$

а при простой функции потерь, аргумент максимума апостериорной ПВ:

$$\hat{\lambda}_k = \arg \max_{\lambda_k} p(\lambda_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L}). \quad (1.28)$$

Таким образом, алгоритм оценивания параметров  $\lambda_k$  сигналов ПЧ в момент  $t_{k,l}$ , можно искать как решение трех подзадач:

1) поиск алгоритма расчета условной ПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  имеющимися средствами,

2) расчет условной ПВ  $p(\boldsymbol{\lambda}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  из  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  интегрированием по параметрам, не входящим в вектор  $\boldsymbol{\lambda}_k$ ,

3) нахождение оценок  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_k$  для  $p(\boldsymbol{\lambda}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  по заданному критерию минимума среднего риска:

- при квадратичной функции потерь - оценка, соответствующая условному среднему апостериорной ПВ  $p(\boldsymbol{\lambda}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$ ;

- при простой функции потерь - оценка, соответствующая максимуму апостериорной ПВ  $p(\boldsymbol{\lambda}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$ .

## 1.5 Уравнения Стратоновича в дискретном времени

Запишем алгоритм расчета апостериорной ПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$ , следуя, например, [22].

Совместная условная ПВ  $\mathbf{x}_k$  и  $\mathbf{y}_{k,l}$  после получения совокупности реализаций  $\mathbf{Y}_{1,1}^{k,l}$  может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{k,l} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l-1}) &= p(\mathbf{y}_{k,l} | \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l-1}) = \\ &= p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l}) p(\mathbf{y}_{k,l} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l-1}), \end{aligned} \quad (1.29)$$

откуда

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l}) = \frac{p(\mathbf{y}_{k,l} | \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l-1})}{p(\mathbf{y}_{k,l} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l-1})} \quad (1.30)$$

Согласно (1.14) наблюдение  $\mathbf{y}_{k,l}$  при фиксированном  $\mathbf{x}_k$  определяется СВ  $\mathbf{n}_{k,l}$  и не зависит от истории реализаций наблюдений  $\mathbf{Y}_{1,1}^{k,l-1}$ . Следовательно, справедливо тождество  $p(\mathbf{y}_{k,l} | \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l-1}) = p(\mathbf{y}_{k,l} | \mathbf{x}_k)$ , тогда

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,l}^{k,l}) = \frac{p(\mathbf{y}_{k,l} | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,l}^{k,l-1})}{p(\mathbf{y}_{k,l} | \mathbf{Y}_{1,l}^{k,l-1})} \quad (1.31)$$

Условная ПВ  $p(\mathbf{y}_{k,l} | \mathbf{Y}_{1,l}^{k,l-1})$  не зависит от  $\mathbf{x}_k$  и выступает в качестве нормировочного множителя в (1.31):

$$p(\mathbf{y}_{k,l} | \mathbf{Y}_{1,l}^{k,l-1}) = \int_{\mathbf{x}_k} p(\mathbf{y}_{k,l} | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,l}^{k,l-1}) d\mathbf{x}_k. \quad (1.32)$$

ПВ одномоментного наблюдения  $\mathbf{y}_{k,l}$  при фиксированном  $\mathbf{x}_k$  на основании модели наблюдений (1.14) задается выражением:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_{k,l} | \mathbf{x}_k) &= L_{k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) = \int_{\boldsymbol{\mu}_k} p(\mathbf{y}_{k,l}, \boldsymbol{\mu}_k | \mathbf{x}_k) d\boldsymbol{\mu}_k = \\ &= \int_{\boldsymbol{\mu}_k} p(\mathbf{y}_{k,l} | \boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{x}_k) p(\boldsymbol{\mu}_k | \mathbf{x}_k) d\boldsymbol{\mu}_k = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^M \det(\mathbf{D}_n)}} \times \\ &\times \int_{\boldsymbol{\mu}_k} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_{k,l} - \mathbf{S}_{k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k))^T \mathbf{D}_n^{-1}(\mathbf{y}_{k,l} - \mathbf{S}_{k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k))\right) p(\boldsymbol{\mu}_k | \mathbf{x}_k) d\boldsymbol{\mu}_k \end{aligned} \quad (1.33)$$

Выражение (1.33)  $L_{k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)$ , рассматриваемое как функция  $\mathbf{x}_k$ , называется *одношаговой функцией правдоподобия* с усреднением по вектору неинформативных параметров.

Для заданных начальных условий и модели динамики  $p(\boldsymbol{\varphi}_{1,k} | \mathbf{x}_k)$  является равномерным распределением на интервале  $[-\pi; \pi]$  для любого  $k$  (см. доказательство в п. П.2.1 Приложения). Если в качестве начального распределения  $p(\boldsymbol{\varphi}_{1,0})$  используется распределение отличное от равномерного, то ПВ  $p(\boldsymbol{\varphi}_{1,k} | \mathbf{x}_k)$  все равно будет стремиться к равномерному с ростом  $k$ .

Условная ПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,l}^{k,l-1})$

- при  $l = 2..L$  есть условная ПВ, рассчитываемая с помощью (1.31),
- при  $l = L+1$  есть апостериорная ПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,l}^{k,L})$ , рассчитываемая по (1.31),
- при  $l = 1$  определяется уравнением

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,0}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad (1.34)$$

где  $\mathbf{Y}_{1,1}^{k,0} \stackrel{df}{=} \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}$ , ПВ перехода  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$  находится на основании моделей динамики (1.20), (1.21), (1.22)

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x} \det(\mathbf{D}_{\mathbf{xx},k})}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \mathbf{F}_x \mathbf{x}_{k-1})^T \mathbf{D}_{\mathbf{xx},k}^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{F}_x \mathbf{x}_{k-1})\right), \quad (1.35)$$

здесь  $\mathbf{D}_{\mathbf{xx},k} = \mathbf{G}_x \mathbf{D}_\xi \mathbf{G}_x^T$  - корреляционная матрица,  $n_x$  - число элементов в  $\mathbf{x}_k$ .

В начальный момент времени имеем:

$$p(\mathbf{x}_0 | \mathbf{Y}_{1,1}^{0,L}) = p(\mathbf{x}_0). \quad (1.36)$$

Условная ПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,0}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L})$  задает ПВ вектора состояния  $\mathbf{x}_k$  на следующем интервале после проведения наблюдений на текущем, поэтому она получила название *экстраполяционной ПВ (ЭПВ)*.

Выражения (1.31), (1.32), (1.33), (1.34), (1.35) при заданных начальных условиях (1.36) позволяют итеративно рассчитывать ПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l})$  и  $p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l})$  при поступлении новых наблюдений реализации  $\mathbf{y}_{k,l}$ , что можно отобразить схемой, приведенной на рисунке 7.

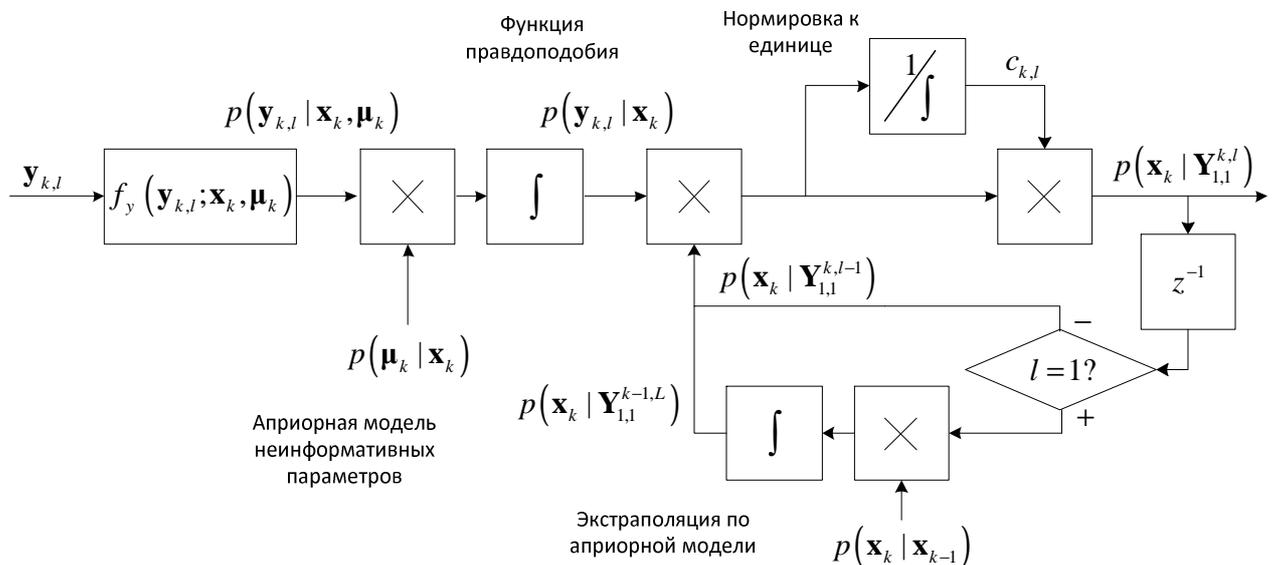


Рисунок 7. Схема расчета АПВ вектора состояния в темпе АЦП

Если потребителя не интересуют промежуточные ПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,1}), \dots, p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L-1})$ , то алгоритм вычисления можно существенно упростить – производить нормировку и усреднение по неинформативным параметрам не каждый такт работы АЦП, а только в конце  $k$ -го интервала (см. схему на рисунке 8). В этом случае алгоритм факторизуется на расчет многошаговой функции правдоподобия в темпе работы АЦП

$$L_k(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) = \prod_{l=1}^L L_{k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) = p(\mathbf{Y}_{k,1}^{k,L} | \mathbf{x}_k) = \frac{1}{((2\pi)^M \det(\mathbf{D}_n))^{L/2}} \times \int_{\boldsymbol{\mu}_k} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^L (\mathbf{y}_{k,l} - \mathbf{S}_{k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k))^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{y}_{k,l} - \mathbf{S}_{k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k))\right) p(\boldsymbol{\mu}_k | \mathbf{x}_k) d\boldsymbol{\mu}_k \quad (1.37)$$

и её обработку в темпе априорной модели динамики параметров.

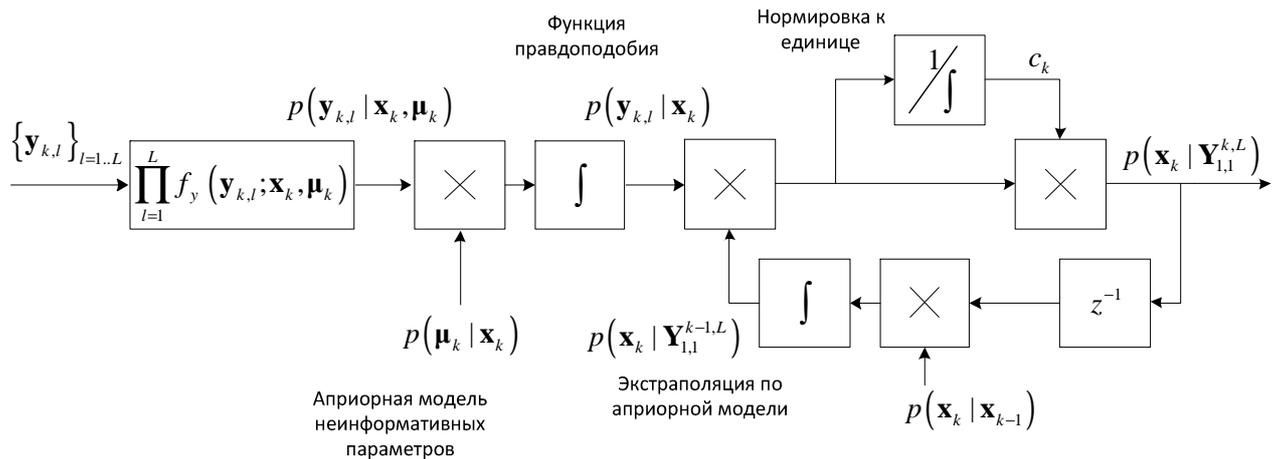


Рисунок 8. Схема расчета АПВ вектора состояния в темпе априорной модели его динамики

Ранее доказано, что при заданных условиях  $p(\boldsymbol{\mu}_k | \mathbf{x}_k) = p(\boldsymbol{\mu}_k)$ . В этом случае усредненная функция правдоподобия может быть представлена как функция вектора информативных параметров  $\boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{c}\mathbf{x}_k$  (см. доказательство в П.2.4 Приложения) вида:

$$L_k(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) = L_k(\boldsymbol{\lambda}_k) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{ML/2}} \exp\left(-\frac{\sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M y_{m,k,l}^2 + \sum_{m=1}^M E_{m,k,l}}{2\sigma_n^2}\right) I_0\left(\frac{A}{\sigma_n^2} X_{\psi,k}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)\right), \quad (1.38)$$

где

$$X_{\psi,k}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) = \sqrt{\left(\sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)\right)^2 + \left(\sum_{m=1}^M Q_{\psi,m,k}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)\right)^2}, \quad (1.39)$$

$$I_{\psi,m,k}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) = \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_{c,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) \cos(\Phi_{\psi,m,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)), \quad (1.40)$$

$$Q_{\psi,m,k}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) = \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_{c,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) \sin(\Phi_{\psi,m,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)),$$

$$\Phi_{\psi,m,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) = \omega_{if} t_{k,l} + (\omega_{1,k} + \psi'_{m,k})(l-1)T_d + \psi_{m,k}. \quad (1.41)$$

В П.2.8 Приложения доказывается тождество

$$X_{\psi,k}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) = \sqrt{I_{c,m,k}^2(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) + Q_{c,m,k}^2(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)}, \quad (1.42)$$

где  $I_{c,m,k}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)$ ,  $Q_{c,m,k}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)$  определяются выражениями (2.36), не требуют использования корреляторов с управлением по фазе и позволяют производить вычисления  $X_{\psi,k}$  с меньшими затратами ресурсов. Величины  $I_{c,m,k}$ ,  $Q_{c,m,k}$  в работе называются «совместными» квадратурными корреляционными суммами.

## 1.6 Расчет искомых оценок путем численного решения уравнений Стратоновича

В общем случае, при заданных начальных условиях и модели наблюдений, ПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  не является нормальной. Закон распределения сложен и плохо параметризуется, поэтому практическая реализация предложенного метода требует расчет численными методами.

### 1.6.1 Квантование апостериорной плотности вероятности

Предположим, что можно выделить подмножества значений параметров вида  $[\mathbf{x}_{\min,k}^{es}; \mathbf{x}_{\max,k}^{es}]$ , значением АПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  вне которых можно пренебречь. Например, интеграл ПВ вне области пренебрежимо мал.

В результате проводимых вычислений, подверженным ошибкам квантования и ограничения разрядности, для функций  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  на множестве  $[\mathbf{x}_{\min,k}^{es}; \mathbf{x}_{\max,k}^{es}]$  имеем приближенную кусочно-линейную аппроксимацию  $p_c(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  (см. рисунок 9).

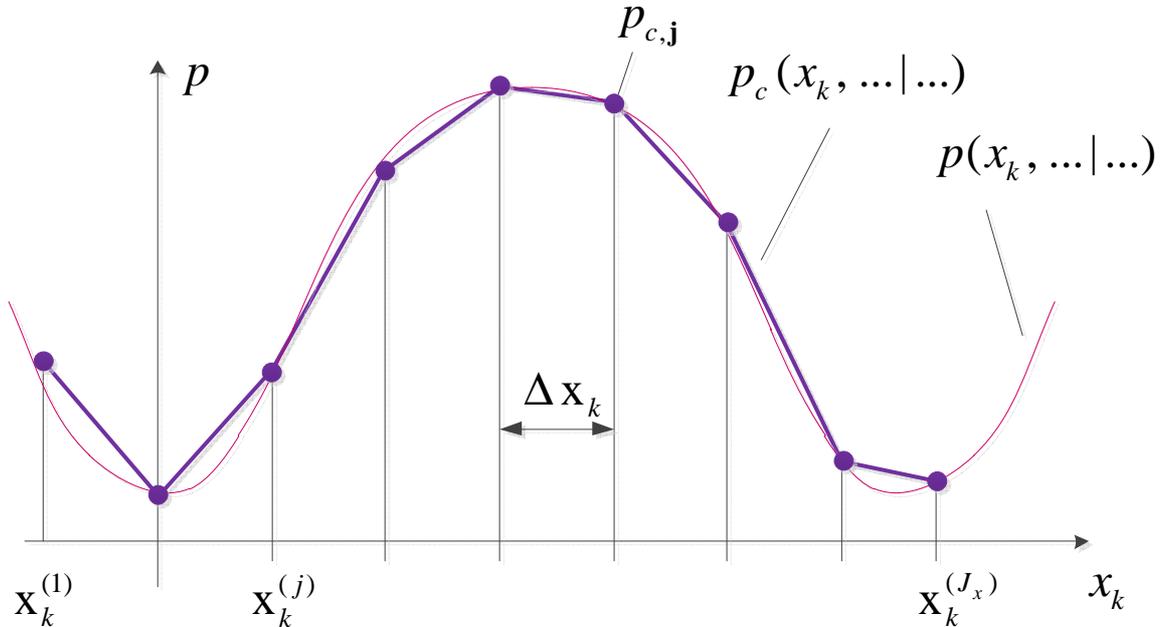


Рисунок 9. Кусочно-линейная аппроксимация плотности вероятности

Узлы сетки кусочно-линейной аппроксимации разбивают интервалы  $[\mathbf{x}_{\min,k}^{es}; \mathbf{x}_{\max,k}^{es}]$  с шагом  $\Delta x$  и образуют  $n_x$  подмножеств:

$$\begin{aligned}
 X_{es,k} &= \{x_{es,1,k}, x_{es,2,k}, \dots, x_{es,n_x,k}\}: \\
 x_{es,1,k} &= \psi_{2,k}^{(1, \dots, J_{\psi 2}^{es}, \dots, J_{\psi 2}^{es})} = \{x_{es,1,k}^{(1)}, \dots, x_{es,1,k}^{(J_1^{es})}\}, \\
 &\dots \\
 x_{es,n_x,k} &= \tau_k^{(1, \dots, J_{\tau}^{es}, \dots, J_{\tau}^{es})} = \{x_{es,n_x,k}^{(1)}, \dots, x_{es,n_x,k}^{(J_{n_x}^{es})}\}.
 \end{aligned} \tag{1.43}$$

Мощности подмножеств (1.43) конечны:

$$|X_{es,1,k}| = J_1^{es}, \dots, |X_{es,n_x,k}| = J_{n_x}^{es}. \tag{1.44}$$

Для воссоздания значения  $p_c(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  для любого  $\mathbf{x}_k \in [\mathbf{x}_{\min,k}^{es}; \mathbf{x}_{\max,k}^{es}]$  достаточно сохранять в памяти вычислителя многомерные массивы значений функции в текущих узлах сетки:

$$\hat{p}_{c,\mathbf{j}^{es},k} = p_c\left(\mathbf{x}_{1,k}^{(j_1^{es})}, \dots, \mathbf{x}_{n_x,k}^{(j_{n_x}^{es})} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L}\right), \quad j_1^{es} = 1..J_1^{es}, \dots, j_{n_x}^{es} = 1..J_{n_x}^{es}. \quad (1.45)$$

$$\mathbf{j}^{es} = \begin{vmatrix} j_1^{es} & j_2^{es} & \dots & j_{n_x}^{es} \end{vmatrix}$$

Тогда каждому  $k$ -ому интервалу соответствует  $\hat{p}_{c,\mathbf{j}^{es},k}$ , содержащий  $|\mathbf{j}^{es}| = J_1^{es} \cdot J_2^{es} \cdot \dots \cdot J_{n_x}^{es}$  неотрицательных величин. Массив  $\hat{p}_{c,\mathbf{j}^{es},k}$  можно рассматривать как приближенные значения ПВ многомерной случайной величины, поэтому будем называть её квантованной апостериорной ПВ.

Если  $k=0$ , то  $p(\mathbf{x}_0 | \mathbf{Y}_{1,1}^{0,L}) = p(\mathbf{x}_0)$ , и квантованная апостериорная ПВ совпадает с соответствующими значениями априорной ПВ в узлах сетки (см. рисунок 10):

$$\hat{p}_{c,\mathbf{j},0} = p_c\left(\mathbf{x}_{1,0}^{(j_1^{es})}, \dots, \mathbf{x}_{n_x,0}^{(j_{n_x}^{es})}\right), \quad j_1^{es} = 1..J_1^{es}, \dots, j_{n_x}^{es} = 1..J_{n_x}^{es}. \quad (1.46)$$

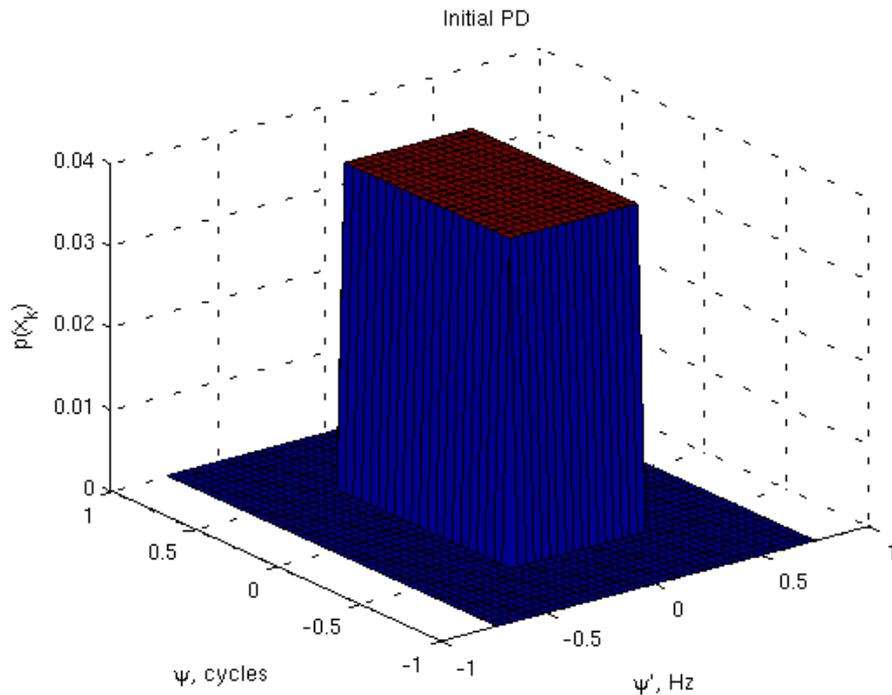


Рисунок 10. Пример начальной ПВ  $p_c(\psi_0, \psi'_0 | \mathbf{Y}_{1,1}^{0,L})$

В решаемой задаче вектор  $\mathbf{x}_k$  содержит  $n_x = 3 + 3(M - 1) = 3M$  элементов. Для 3-антенного УНАП  $n_x = 9$ . Размерность велика, что приводит к большой вычислительной сложности алгоритма.

### 1.6.2 Вычисление экстраполяционной плотности вероятности

К началу этапа экстраполяции  $k$  интервала вычислитель обладает многомерным массивом значений аппроксимации  $\hat{p}_{c,j,k-1}$  АПВ в узлах сетки  $X_{es,k-1}$ . Необходимо рассчитать квантованную ЭПВ.

Область параметров  $[\mathbf{x}_{\min,k}^{ex}; \mathbf{x}_{\max,k}^{ex}]$ , в которых ЭПВ значима, шире, чем область параметров  $[\mathbf{x}_{\min,k-1}^{es}; \mathbf{x}_{\max,k-1}^{es}]$  АПВ  $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L})$ . Для параметров, к которым не прибавляется формирующий шум, область возможных значений увеличивается за счет производных. Можно записать:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_{\min,k}^{ex})_j &= (\mathbf{x}_{\min,k}^{es})_j + (\mathbf{x}_{\min,k}^{es})_{j+1} T, \\ (\mathbf{x}_{\max,k}^{ex})_j &= (\mathbf{x}_{\max,k}^{es})_j + (\mathbf{x}_{\max,k}^{es})_{j+1} T. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Для параметров, к которым прибавляется только формирующий шум, область возможных значений расширяется за счет действия этого формирующего шума. Формирующие шумы при выбранной постановке задачи – нормальные. Можно ограничиться, например, 5 сигмами:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_{\min,k}^{ex})_j &= (\mathbf{x}_{\min,k}^{es})_j - 5\sqrt{D_{\xi_j}}, \\ (\mathbf{x}_{\max,k}^{ex})_j &= (\mathbf{x}_{\max,k}^{es})_j + 5\sqrt{D_{\xi_j}}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Разбиение области параметров  $[\mathbf{x}_{\min,k}^{ex}; \mathbf{x}_{\max,k}^{ex}]$  с шагом  $\Delta\mathbf{x}$  по аналогии с (1.43) образует множество узлов сетки  $X_{ex,k}$  для экстраполяционной ПВ.

Для получения экстраполяционной ПВ необходимо рассчитать многомерный интеграл (1.34). В П.2.7 Приложения доказано, что для принятых моделей динамики интеграл может быть представлен в более простом виде, где

интегрирование производится только по тем переменным, к которым в модели динамики прибавляется формирующий шум:

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) &= p(\psi_{2,k}, \psi'_{2,k}, \psi''_{2,k}, \dots, \psi_{M,k}, \psi'_{M,k}, \psi''_{M,k}, \omega_k, \omega'_k, \tau_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) = \\
&= C \int \int \int \int \int P(\psi_{2,k} - (\psi'_{2,k} - \psi''_{2,k-1}T)T, \psi'_{2,k} - \psi''_{2,k-1}T, \psi''_{2,k-1}, \dots, \\
&\quad \psi_{M,k} - (\psi'_{M,k} - \psi''_{M,k-1}T)T, \psi'_{M,k} - \psi''_{M,k-1}T, \psi''_{M,k-1}, \omega_k - \omega'_{k-1}T, \omega'_{k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) \times \\
&\quad \times \exp \left( - \frac{\sum_{m=2}^M (\psi''_{m,k} - \psi''_{m,k-1})^2}{2D_{\xi_\psi}} - \frac{(\omega'_k - \omega'_{k-1})^2}{2D_{\xi_\omega}} - \frac{(\tau_k - \tau_{k-1})^2}{2D_{\xi_\tau}} \right) d\tau_{k-1} d\omega'_{k-1} \prod_{m=2}^M d\psi''_{m,k-1}.
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Значения интеграла (1.49) в узлах  $X_{ex,k}$  можно рассчитать численно как (см. пример результатов вычислений на рисунке 11):

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{c,j^{ex},k} &= p_c \left( \psi_{2,k}^{(j_{\psi^2})^{ex}}, \psi'_{2,k}^{(j_{\psi^2})^{ex}}, \psi''_{2,k}^{(j_{\psi^2})^{ex}}, \dots, \right. \\
&\quad \left. \psi_{M,k}^{(j_{\psi^M})^{ex}}, \psi'_{M,k}^{(j_{\psi^M})^{ex}}, \psi''_{M,k}^{(j_{\psi^M})^{ex}}, \omega_k^{(j_\omega)^{ex}}, \omega'_k^{(j_{\omega'})^{ex}}, \tau_k^{(j_\tau)^{ex}} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L} \right) = \\
&= C \sum_{j_{\psi^2}=1}^{j_{\psi^2}^{es}} \dots \sum_{j_{\psi^M}=1}^{j_{\psi^M}^{es}} \sum_{j_{\omega'}=1}^{j_{\omega'}^{es}} \sum_{j_\tau=1}^{j_\tau^{es}} \left( p_c(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) \right)_{j^{ex},j^{es}} EXP_{j^{ex},j^{es}} \Delta \tau_{es,k-1} \Delta \omega'_{es,k-1} \prod_{m=2}^M \Delta \psi''_{es,m,k-1},
\end{aligned} \tag{1.50}$$

где

$$\begin{aligned}
\left( p_c(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) \right)_{j^{ex},j^{es}} &= p \left( \psi_{2,k}^{(j_{\psi^2})^{ex}} - \left( \psi'_{2,k}^{(j_{\psi^2})^{ex}} - \psi''_{2,k-1}^{(j_{\psi^2})^{es}} T \right) T, \psi'_{2,k}^{(j_{\psi^2})^{ex}} - \psi''_{2,k-1}^{(j_{\psi^2})^{es}} T, \right. \\
&\quad \psi''_{2,k-1}^{(j_{\psi^2})^{es}}, \dots, \psi_{M,k}^{(j_{\psi^M})^{ex}} - \left( \psi'_{M,k}^{(j_{\psi^M})^{ex}} - \psi''_{M,k-1}^{(j_{\psi^M})^{es}} T \right) T, \psi'_{M,k}^{(j_{\psi^M})^{ex}} - \psi''_{M,k-1}^{(j_{\psi^M})^{es}} T, \psi''_{M,k-1}^{(j_{\psi^M})^{es}}, \\
&\quad \left. \omega_k^{(j_\omega)^{ex}} - \omega'_{k-1}^{(j_{\omega'})^{es}} T, \omega'_{k-1}^{(j_{\omega'})^{es}} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L} \right),
\end{aligned} \tag{1.51}$$

$$\begin{aligned}
EXP_{j^{ex},j^{es}} &= \\
&= \exp \left( - \frac{\sum_{m=2}^M \left( \psi''_{m,ex,k}^{(j_{\psi^m})^{ex}} - \psi''_{m,es,k-1}^{(j_{\psi^m})^{es}} \right)^2}{2D_{\xi_\psi}} - \frac{\left( \omega'_{ex,k}^{(j_{\omega'})^{ex}} - \omega'_{es,k-1}^{(j_{\omega'})^{es}} \right)^2}{2D_{\xi_\omega}} - \frac{\left( \tau_{ex,k}^{(j_\tau)^{ex}} - \tau_{es,k-1}^{(j_\tau)^{es}} \right)^2}{2D_{\xi_\tau}} \right).
\end{aligned} \tag{1.52}$$

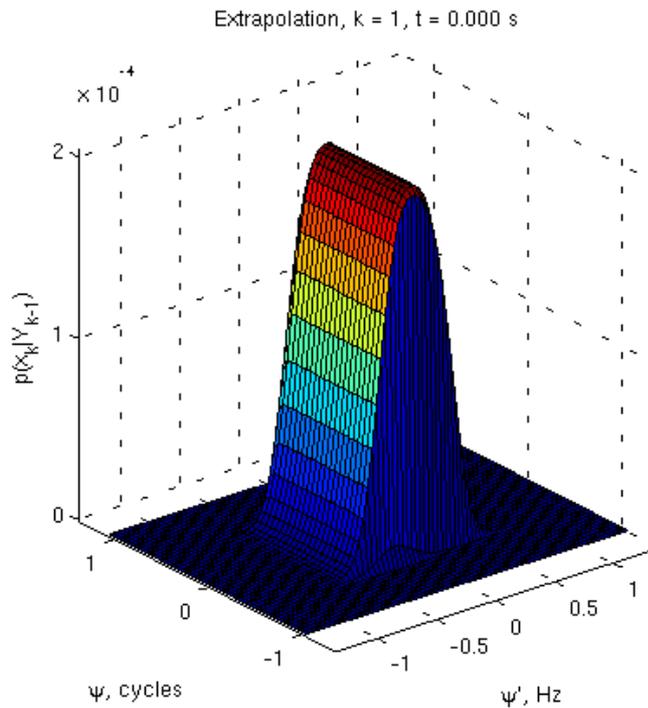


Рисунок 11. Пример вычисленной экстраполяционной плотности вероятности  $p_c(\psi_1, \psi'_1 | \mathbf{Y}_{1,1}^{0,L})$

Расчет значений АПВ (1.51) производится на основании  $\hat{p}_{c,j,k-1}$  с учетом принятой кусочно-линейной аппроксимации. Эта операция повторяется часто, занимает большую часть процессорного времени и требует тщательной оптимизации. Она разбивается на два этапа: нахождение ближайшего узла для заданных значений аргументов функции; вычисление градиента в узле и коррекция с его помощью значения функции в узле до значения функции в точке заданного аргумента.

### 1.6.3 Вычисление апостериорной плотности вероятности

Согласно (1.31) для вычисления искомой АПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  необходимо умножить ЭПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L})$  на функцию правдоподобия  $L_k(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)$  и провести нормировку результата к единице.

Функция правдоподобия может обладать огромным диапазоном принимаемых значений, удобнее оперировать её логарифмом. Тогда умножение ЭПВ и функции правдоподобия заменяется сложением их логарифмов. Для этого в узлах  $X_{ex,k}$  рассчитывается значение логарифма функции

правдоподобия (ЛФП) (1.38)  $\ln L_{c,j^{ex},k}$  на основании принятой реализации сигналов (см. пример на рисунке 12). При расчете удобно использовать аппроксимацию модифицированной функции Бесселя:

$$I_0(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \Rightarrow \ln I_0(z) \approx z - \frac{1}{2}(\ln(2\pi) + \ln(z)). \quad (1.53)$$

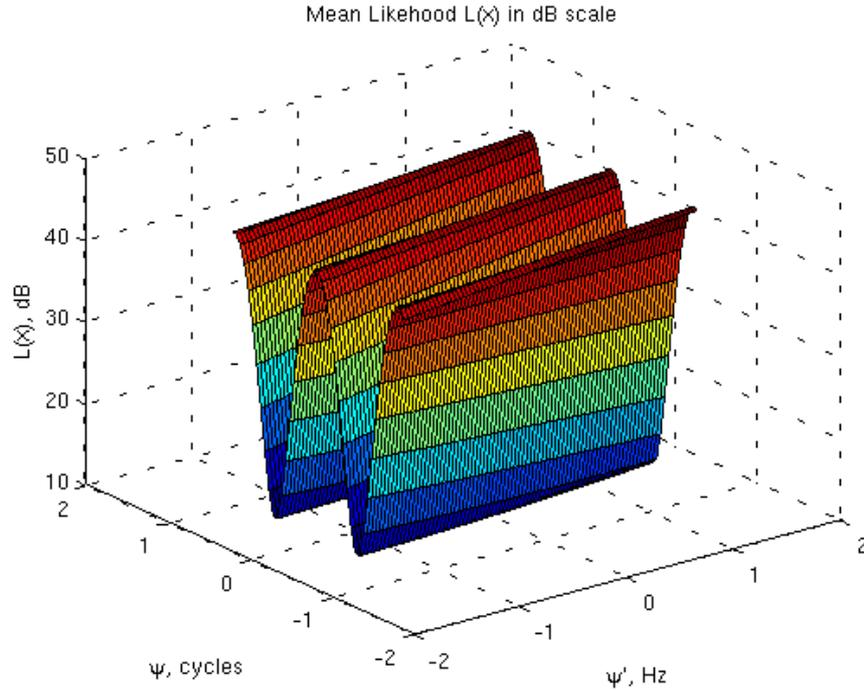


Рисунок 12. Пример реализации логарифма функции правдоподобия  $\ln L_{c,j^{ex},k}$

Тогда логарифм аппроксимации АПВ на  $k$ -м интервале

$$\ln \hat{p}_{c,j^{ex},k} = \ln L_{c,j^{ex},k} + \ln \tilde{p}_{c,j^{ex},k} + C. \quad (1.54)$$

Очевидно, что  $|X_{ex,k}| \geq |X_{es,k-1}|$ , и если не предпринимать мер, множество узлов быстро разрастается. Для сокращения множества можно пренебречь значениями ПВ ниже некоторого порога, за который в работе принят уровень на 10-50 Нп (1 Непер примерно равен 8.6 дБ) ниже максимума (см. рисунок 13). Образуется множество узлов  $X_{es,k}$  которым соответствует массив значимых значений логарифма апостериорной ПВ  $\ln \hat{p}_{c,j^{es},k}$  (с точностью до слагаемого-константы).

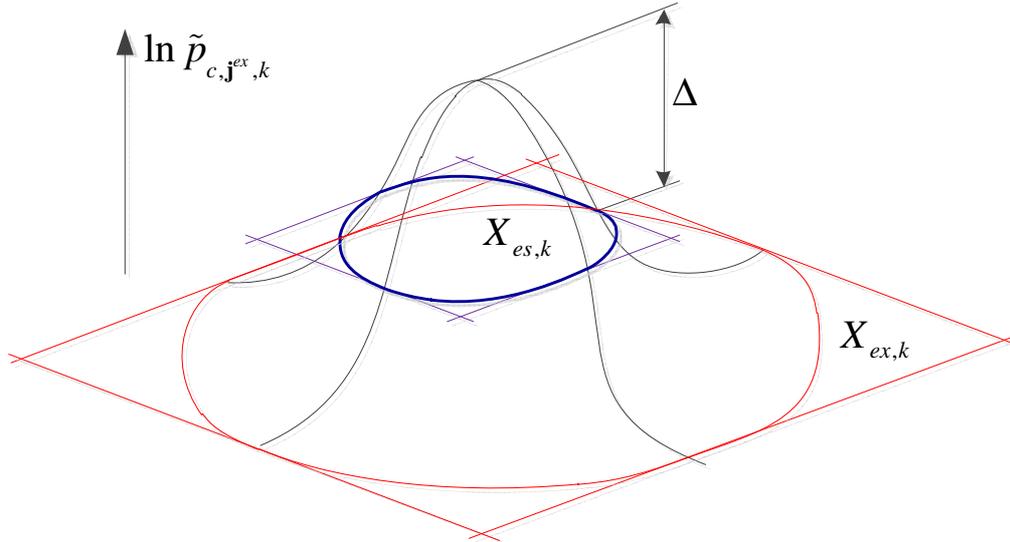


Рисунок 13. Формирование множества  $X_{es,k}$  из  $X_{ex,k}$

Выбор порога не универсален, т.к. допустимое значение зависит от дисперсии распределения. Если условия работы алгоритма таковы, что дисперсия АПВ мала, следует снизить порог.

С помощью функции экспоненты вычисляется  $\hat{p}_{c,j^{es},k}$ . Там, где  $\ln \hat{p}_{c,j^{es},k}$  ниже порога, в качестве значения ПВ используется 0. Производится нормировка к единице:

$$\hat{p}_{c,j^{es},k} = \frac{\hat{p}_{c,j^{es},k}}{\sum_{j^{es}} \hat{p}_{c,j^{es},k} \prod_{j=1}^{nx} (\Delta \mathbf{x})_j}. \quad (1.55)$$

Далее процесс вычислений повторяется рекурсивно.

Графики, изображенные на рисунках 10, 11, 12, 14, иллюстрируют эволюцию начальной ПВ в экстраполяционную, а затем коррекцию экстраполяционной ПВ с помощью логарифма функции правдоподобия в искомую апостериорную ПВ.

#### 1.6.4 Вычисление оценок

Вычисленный массив  $\hat{p}_{c,j^{es},k}$  задает аппроксимацию апостериорной ПВ  $p_c(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$ . По нему определяются необходимые оценки.

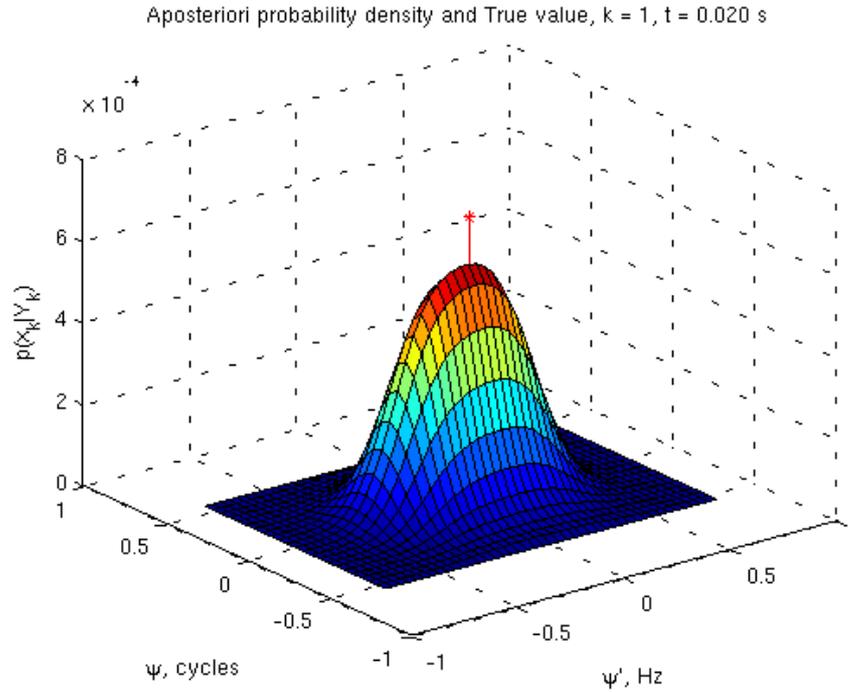


Рисунок 14. Пример вычисленной апостериорной ПВ  $p_c(\psi_1, \psi'_1 | \mathbf{Y}_{1,1}^{1,L})$  (истинное значение соответствует проекции красной звездочки)

Для нахождения оценки по критерию минимума среднего риска при простой функции потерь (критерий максимума апостериорной ПВ)  $p_c(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  предварительно усредняется по параметрам, не входящим в вектор информативных параметров, а затем перебором находится значение аргумента, при котором ПВ достигает максимума:

$$\hat{p}_{\lambda, \mathbf{i}^{es}, k} = \sum_{\mathbf{j}^{es}} \hat{p}_{c, \mathbf{j}^{es}, k} \prod_{jni} (\Delta \mathbf{x})_{jni} \quad (1.56)$$

$$\hat{\lambda}_k^{\arg \max} \leftarrow (X_{es, k})_{\mathbf{i}^{es}}, \mathbf{i}^{es} = \arg \max \hat{p}_{\lambda, \mathbf{i}^{es}, k}$$

Для формирования оценки по критерию минимума среднего риска при квадратичной функции потерь численным интегрированием  $p_c(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  находится вектор математических ожиданий:

$$\hat{\lambda}_k^{mean} = \mathbf{c} \sum_{\mathbf{j}^{es}} \mathbf{x}_{\mathbf{j}^{es}} \hat{p}_{c, \mathbf{j}^{es}, k} \prod_{j=1}^{nx} (\Delta \mathbf{x})_j, \mathbf{x}_{\mathbf{j}^{es}} \leftrightarrow (X_{es, k})_{\mathbf{j}^{es}} \quad (1.57)$$

### 1.6.5 Программная реализация алгоритмов оценивания на основе численного решения уравнений Стратоновича

Рекурсивная схема численного решения уравнений Стратоновича представлена на рисунке 15. Структурная схема УНАП, её реализующей – на рисунке 16.

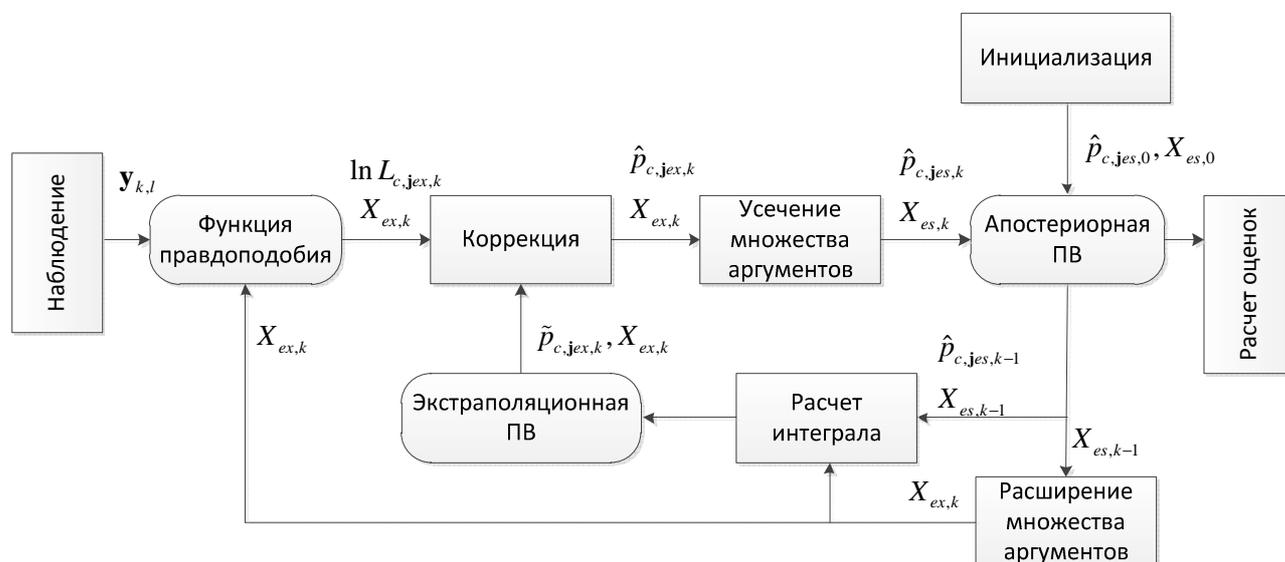


Рисунок 15. Рекурсивная схема вычисления оценок на основе численного решения уравнений Стратоновича

Для реализации численного решения на основании полученных выражений был реализован класс CStrat на языке среды MATLAB. Программный код класса доступен в репозитории по адресу: <http://code.google.com/p/stratonovich>

Информация об основных пользовательских методах класса приведена в таблице 1.1.

Реализованный класс оценивания параметров на основе численного решения уравнений Стратоновича позволяет исследовать характеристики алгоритмов, максимально приближенных к оптимальным по указанным критериям.

Графики, изображенные на рисунках 10, 11, 12, 14, являются примером результатов работы алгоритмов при обработке одного, первого, наблюдения.

Таблица 1.1. Методы-интерфейсы класса CStrat, реализующего численное решение уравнений Стратоновича

Название метода	Параметры	Описание
CStrat()	$T \leftrightarrow T, D_{xx} \leftrightarrow D_{\xi},$ $X_{min} \leftrightarrow \mathbf{x}_{min,0},$ $X_{max} \leftrightarrow \mathbf{x}_{max,0},$ $dX \leftrightarrow \Delta \mathbf{x}, P0 \leftrightarrow p_{c,j^{es},0}$	Конструктор класса
Extrapolate()	Выходные: $.X_{extr}$ – набор векторов, соответствующих $X_{ex,k}$	Провести этап экстраполяции
Observe()	$\ln L \leftrightarrow \ln L_{c,j^{es},k}$	Провести этап коррекции
getnArgMaxPest()	Выходные: $n_{max} \leftrightarrow \mathbf{i}^{es}$	Возвращает векторный индекс максимума ПВ
getMeanPest()	Выходные: $mX \leftrightarrow \sum_{j^{es}} \mathbf{x}_{j^{es}} \hat{P}_{c,j^{es},k} \prod_{j=1}^{nx} (\Delta \mathbf{x})_j$	Возвращает вектор математических ожиданий

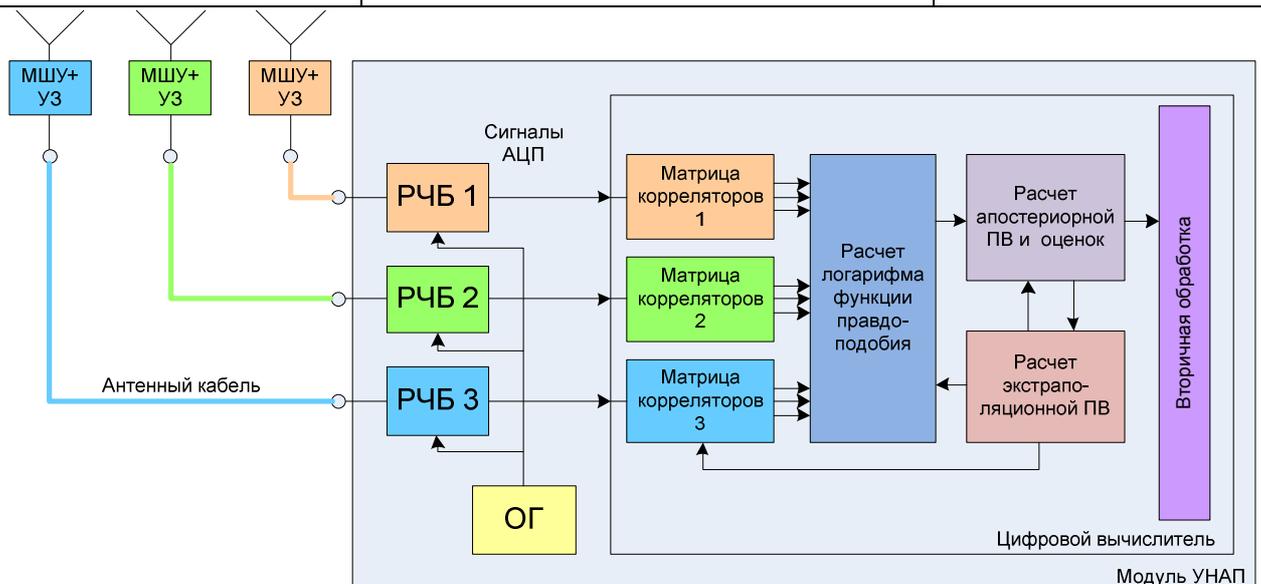


Рисунок 16. Структурная схема УНАП, реализующей оптимальный алгоритм оценивания параметров сигналов промежуточной частоты в приближении численного решения

Пример эволюции апостериорной ПВ в процессе работы алгоритма приведен на рисунке 17 (отношение сигнал/шум 20 дБГц, динамика вращения средней интенсивности, число антенн равно двум). В процессе расчетов дисперсия формирующих шумов и начального распределения задержки и частоты приняты стремящимися к нулю (что снижает мощности их узлов до одного элемента), по второй производной РФ произведено усреднение. Таким образом, представленные поверхности – апостериорная ПВ параметров  $\psi_k, \psi'_k$ .

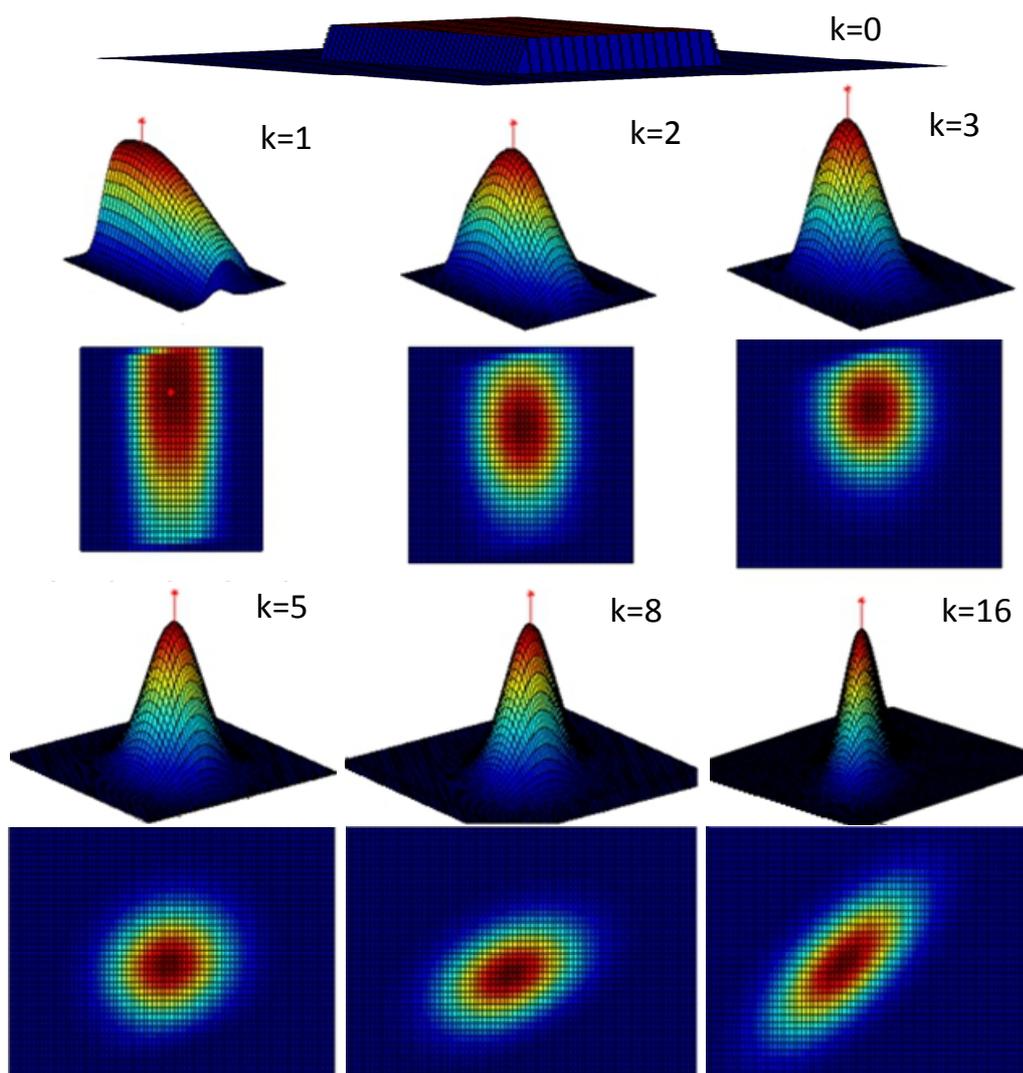


Рисунок 17. Пример эволюции расчетной апостериорной ПВ (графики даны в едином масштабе)

Из графиков можно сделать вывод, что, несмотря на равномерность начального распределения, апостериорная ПВ быстро (порядка сотни мс) принимает форму, близкую к форме многомерного нормального распределения. Дисперсии параметров и их взаимные ковариации стремительно изменяются

первые такты работы алгоритма, но быстро переходят к состоянию, близкому к установившемуся.

Описанный выше алгоритм нахождения оценок информативных параметров сигналов позволяет оценить потенциальные характеристики решения задачи при указанном критерии оптимизации, для чего он и используется в диссертационном исследовании. Изучать те или иные характеристики оценок, формируемых алгоритмом, предлагается прямым моделированием его работы в тех или иных условиях. Так как алгоритм основан на прямом расчете апостериорной ПВ оцениваемых параметров с последующим вычислением по ней оптимальных в том или ином смысле оценок, то в работе он называется *оптимальным* по тому или иному критерию.

Результаты моделирования работы оптимальных алгоритмов изложены в Главе 3, где производится их сравнение, как потенциальных характеристик, с характеристиками других решений.

Следует заметить, что вычислительная сложность алгоритмов высока, требуемые вычислительные ресурсы на порядки выше, чем в фильтрационных алгоритмах слежения. Практическое применение алгоритмов как алгоритмов оценки параметров сигналов в угломерной навигационной аппаратуре возможно, но на данном этапе развития вычислительной техники вероятно только в режиме постобработки наблюдений.

Существенно упростить алгоритмы расчета оценок позволяет использование гауссовой аппроксимации апостериорной ПВ. В этом случае задача расчета значений ПВ заменяется задачей расчета двух её моментов, полностью описывающих нормальное распределение. Что, в свою очередь, позволяет существенно сократить вычислительные затраты. Синтезу алгоритмов оценивания в гауссовом приближении АПВ вектора состояния посвящена следующая глава.

## 1.7 Выводы по главе

Предложена новая математическая модель описания параметров сигналов радио- и промежуточной частоты, принимаемых УНАП в пространственно разнесенных точках. Предложенная модель отличается от известных моделей разделением параметров сигналов на две группы, одна из которых характеризует поступательное движением объекта относительно спутника (задержка, частота, «общая» фаза), а вторая — вращательное движение объекта (разности фаз сигналов, принятых в пространственно разнесенных точках). Такое представление позволяет осуществить прямую оценку разности фаз сигналов, принятых в различных пространственно разнесенных точках, и одновременно провести усреднение по общей составляющей фаз сигналов, что соответствует идеологии некогерентного приема сигналов.

Для параметров сигналов предложены кусочно-линейные аппроксимации, а для параметров аппроксимации - стохастические модели в виде марковских процессов.

К информативным параметрам отнесены задержка, частота, разности фаз и их производные. «Общая» составляющая фазы рассматривается как неинформативных параметр, формирование её оценки не требуется.

Описаны априорные начальные распределения параметров.

Разработана методика анализа потенциальных характеристик оценок параметров сигналов, принятых на множестве пространственно разнесенных точек. Методика основывается на численном решении уравнений Стратоновича, в результате которого формируется апостериорная плотность вероятности оцениваемых параметров, по которой рассчитываются оптимальные, в том или ином смысле, оценки параметров сигналов. В основе методики лежат следующие процедуры:

- отображение вектора информативных параметров  $\lambda$  наблюдаемых сигналов в пространство состояний вектора  $\mathbf{x}$ , т.е.  $\lambda = \mathbf{c}\mathbf{x}$ ;

- составление уравнений, описывающих эволюцию апостериорной ПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  вектора состояния  $\mathbf{x}_k$ ;
- решение численными методами по разработанной методике полученных уравнений для апостериорной ПВ, т.е. формирование расчетной апостериорной ПВ  $p_c(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$ ;
- усреднение расчетной ПВ  $p_c(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  по неинформативным параметрам вектора состояния  $\mathbf{x}_k$ , т.е. получение расчетной апостериорной ПВ информативных параметров  $p_c(\boldsymbol{\lambda}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$ ;
- расчет оптимальных по тому или иному критерию оценок  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_k$  вектора информативных параметров на основании рассчитанной апостериорной ПВ  $p_c(\boldsymbol{\lambda}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$ .

В качестве критерия оптимальных оценок вектора информативных параметров предложены минимум среднего риска при простой и при квадратичной функциях потерь. Чему соответствуют два оптимальных, по различным критериям, решения.

Приведены алгоритмы численного решения уравнений и поиска оценок по указанным критериям. Выполнена реализация оптимальных алгоритмов в среде MATLAB. Характеристики оценок, формируемых этими алгоритмами, рассматриваются в качестве потенциальных.

## **ГЛАВА 2. СИНТЕЗ И АНАЛИЗ НЕКОГЕРЕНТНОГО АЛГОРИТМА СЛЕЖЕНИЯ ЗА ПАРАМЕТРАМИ СИГНАЛОВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ЧАСТОТЫ В ГАУССОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ АПОСТЕРИОРНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ**

Расчет оптимальных оценок методом численного решения уравнений Стратоновича для АПВ вектора состояния, рассмотренным в Главе 1, требует значительных вычислительных затрат. На данном этапе развития вычислителей реализация данного алгоритма в режиме реального времени потребует существенного усложнения аппаратуры, несоизмеримой получаемым преимуществам. Применение такого подхода целесообразно для выявления потенциальных характеристик различных алгоритмов, а для решения задачи в рамках УНАП требуется разработать более простой алгоритм.

Вычисление оценок значительно упрощается, если АПВ вектора состояния описывает многомерным нормальным законом распределения. Поэтому в настоящей главе синтезируется *квазиоптимальный некогерентный алгоритм* оценки задержки, частоты и разности фаз сигналов промежуточной частоты, принятых на множестве пространственно разнесенных точек, как алгоритм формирования оптимальных оценок в гауссовом приближении плотностей вероятности. Далее к квазиоптимальному алгоритму применяются дополнительные допущения, в результате которых формируется *упрощенный квазиоптимальный алгоритм*, который может быть практически реализован в УНАП на современной элементной базе.

### **2.1 Моменты апостериорной плотности вероятности в гауссовом приближении**

Существенно упростить практическую реализацию позволяет использование гауссовой аппроксимации АПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$ . Как известно,

векторное нормальное распределение задается двумя параметрами – вектором математических ожиданий  $\hat{\mathbf{x}}_k$  и ковариационной матрицей  $\hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}$ . Поэтому расчет  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  может быть заменен расчетом  $\hat{\mathbf{x}}_k$  и  $\hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}$ .

### 2.1.1 Моменты АПВ при разложении ЛФП в ряд Тейлора в окрестности точки, соответствующей вектору математических ожиданий ЭПВ

В классической теории оптимальной фильтрации [23, 49] при получении уравнений системы фильтрации в гауссовом приближении используется разложение логарифма функции правдоподобия (ЛФП) в ряд Тейлора в окрестности точки, соответствующей вектору математических ожиданий экстраполяционной ПВ (ЭПВ). Приведем кратко методику получения таких уравнений.

Согласно (1.34) и (1.35)  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,l-1})$  является нормальной, если апостериорная ПВ  $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L})$  на прошлом интервале нормальна, и задается выражением (см. доказательство в П.2.2 Приложения):

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x} \det(\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k})}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k)\right), \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{F}_x \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \\ \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k} &= \mathbf{F}_x \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}},k-1} \mathbf{F}_x^T + \mathbf{G}_x \mathbf{D}_\xi \mathbf{G}_x^T. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Следует заметить, что  $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L})$  должна быть нормальной и в начальный момент времени. Тем не менее, в исходной постановке задачи многие начальные распределения не гауссовы. Аппроксимируем их нормальными распределениями с соответствующими исходным математическими ожиданиями и дисперсиями.

Представим многошаговую функцию правдоподобия в виде

$$L_k(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) = \exp\left(\ln\left(L_k(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)\right)\right), \quad (2.3)$$

Тогда апостериорная ПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x} \det(\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k})}} \times \exp\left(\ln\left(L(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)\right) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k)\right). \quad (2.4)$$

Разложим  $\ln(L(\mathbf{x}_k))$  в ряд Тейлора вокруг точки  $\tilde{\mathbf{x}}_k$ :

$$\begin{aligned} \ln L_k(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) &= \ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k) + \\ &+ (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k)^T \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} + \\ &+ \frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k)^T \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left( \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T \right) (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k) + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

где под  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k}$  понимается вектор-столбец операторов производных по компонентам вектора  $\mathbf{x}_k$ , т.е.

$$\frac{\partial \ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} = \left. grad(\ln L_k) \right|_{\tilde{\mathbf{x}}_k}, \quad (2.6)$$

а под  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left( \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T$  - матрица-гессиян ЛФП в точке  $\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k$ , т.е.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left( \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left( \frac{\partial \ln L_k}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T \right|_{\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k}. \quad (2.7)$$

Для нахождения математического ожидания  $\hat{\mathbf{x}}_k$  АПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  выражение (2.5) достаточно представить в виде разностно-квадратичной формы с дополнительным слагаемым, независимым от  $\mathbf{x}_k$ . В П.2.3 Приложения проведены необходимые преобразования и показано, что если можно

пренебречь высшими членами разложения логарифма функции правдоподобия, оставив только три первых слагаемых (2.5), то  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,i}^{k,L})$  является нормальной с вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k &= \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}},k} \frac{\partial \ln L_k}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k), \\ \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}},k}^{-1} &= \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left( \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Выражения (2.2), (2.8) позволяют рекурсивно рассчитывать вектор математических ожиданий  $\hat{\mathbf{x}}_k$  и ковариационную матрицу  $\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}},k}$  ПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,i}^{k,L})$  в случае её нормальности. Данные выражения задают структуру системы фильтрации входных отсчетов  $\mathbf{y}_{k,i}$ , называемого расширенным фильтром Калмана (РФК) с усреднением по неинформативным параметрам.

В теории оптимальной фильтрации [23, 49] за вектором математических ожиданий  $\hat{\mathbf{x}}_k$  закрепилось название *оценка* процесса  $\mathbf{x}_k$ , а за ковариационной матрицей  $\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}},k}$  - *матрица дисперсий ошибок фильтрации (МДОФ)* процесса  $\mathbf{x}_k$ , т.к. эта матрица определяет дисперсию ошибок оценки  $\hat{\mathbf{x}}_k$  [23].

### 2.1.2 Моменты АПВ при разложении ЛФП в ряд Тейлора в окрестности заданной точки

Разложение логарифма функции правдоподобия можно производить и в любой другой точке  $\tilde{\mathbf{x}}_k$ , при этом вклад старших членов разложения может быть как больше, так и меньше, чем при использовании (2.5):

$$\begin{aligned}\ln L_k(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) &= \ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k) + \\ &+ (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k)^T \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} + \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k)^T \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left( \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T \right) (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k) + \dots\end{aligned}\quad (2.9)$$

В П.2.6 Приложения проведены необходимые преобразования и показано, что для сохранения нормальности  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  по-прежнему достаточно пренебречь высшими членами разложения логарифма функции правдоподобия, оставив только три первых слагаемых в (2.9). При этом вектор математических ожиданий и МДОФ задаются выражениями:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k} \left( \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left( \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k) \right), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} = \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left( \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T.$$

Выражения (2.10) переходят в (2.8) при выборе в качестве точки разложения вектора математических ожиданий ЭПВ:  $\tilde{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k$ . Т.к. точка разложения определяет параметры опорных сигналов, то  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  будем называть вектором *опорных параметров*. Система фильтрации, описываемая выражения (2.2), (2.10), недоопределена, её необходимо дополнить алгоритмом выбора вектора опорных параметров.

Выражения (2.10) можно трактовать как модификацию классического РФК (2.8), в которой используется разложение множителя при дисперсии в ряд Тейлора:

$$\frac{\partial \ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \approx \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left( \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k). \quad (2.11)$$

Возможность разложения логарифма функции правдоподобия вокруг произвольной точки может быть практически полезной. Точка разложения определяет, в итоге, параметры опорного сигнала коррелятора. Выбор произвольных параметров опорных сигналов позволяет:

- 1) Управлять влиянием отдельных следящих систем на коррелятор. В частности, в данной работе получены алгоритмы УНАП, в которых в контур управления коррелятором замкнуты только ССЗ и ССЧ.

2) Учитывать особенности формирования опорных сигналов – задержку управления, конечную точность представления управляющих слов, управление генераторами по частоте вместо фазы.

### 2.1.3 Выбор вектора опорных параметров

Погрешность аппроксимации логарифма функции правдоподобия первыми тремя членами разложения зависит от выбора точки  $\tilde{\mathbf{x}}_k$ .

На рисунке 18 приведены графики, иллюстрирующие последствия принятия аппроксимации (2.11). Два столбца графиков соответствуют различным масштабам по параметру РФ  $\psi_{2,k}$ , выраженному в градусах. Строки соответствуют срезам функции правдоподобия  $L(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)$ , логарифма функции правдоподобия  $\ln L(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)$ , экстраполяционной ПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L})$  и логарифма результирующей апостериорной ПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  соответственно.

Зависимости построены для некоторой реализации шумов на  $k$ -ом интервале. Истинное значение РФ составляет 30 градусов, точка среза по остальным параметрам соответствует их истинным значениям. Отношение сигнал/шум 20 дБГц, длительность  $k$ -го интервала 20мс. Экстраполяционная ПВ – нормальная, компоненты вектора  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  совпадают с соответствующими истинными значениями, СКО по РФ 10 градусов.

Использование трех различных цветов соответствует трем вариантам представления логарифма функции правдоподобия  $\ln L(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)$ :

1. Синий – исходная функция (1.38),
2. Зеленый – представление (2.9) с использованием первых трех слагаемых и  $\tilde{\mathbf{x}}_k = \arg \max(L(\mathbf{c}\mathbf{x}_k))$ ,
3. Красный – представление (2.9) с использованием первых трех слагаемых и  $\tilde{\mathbf{x}}_k = \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_k$ .

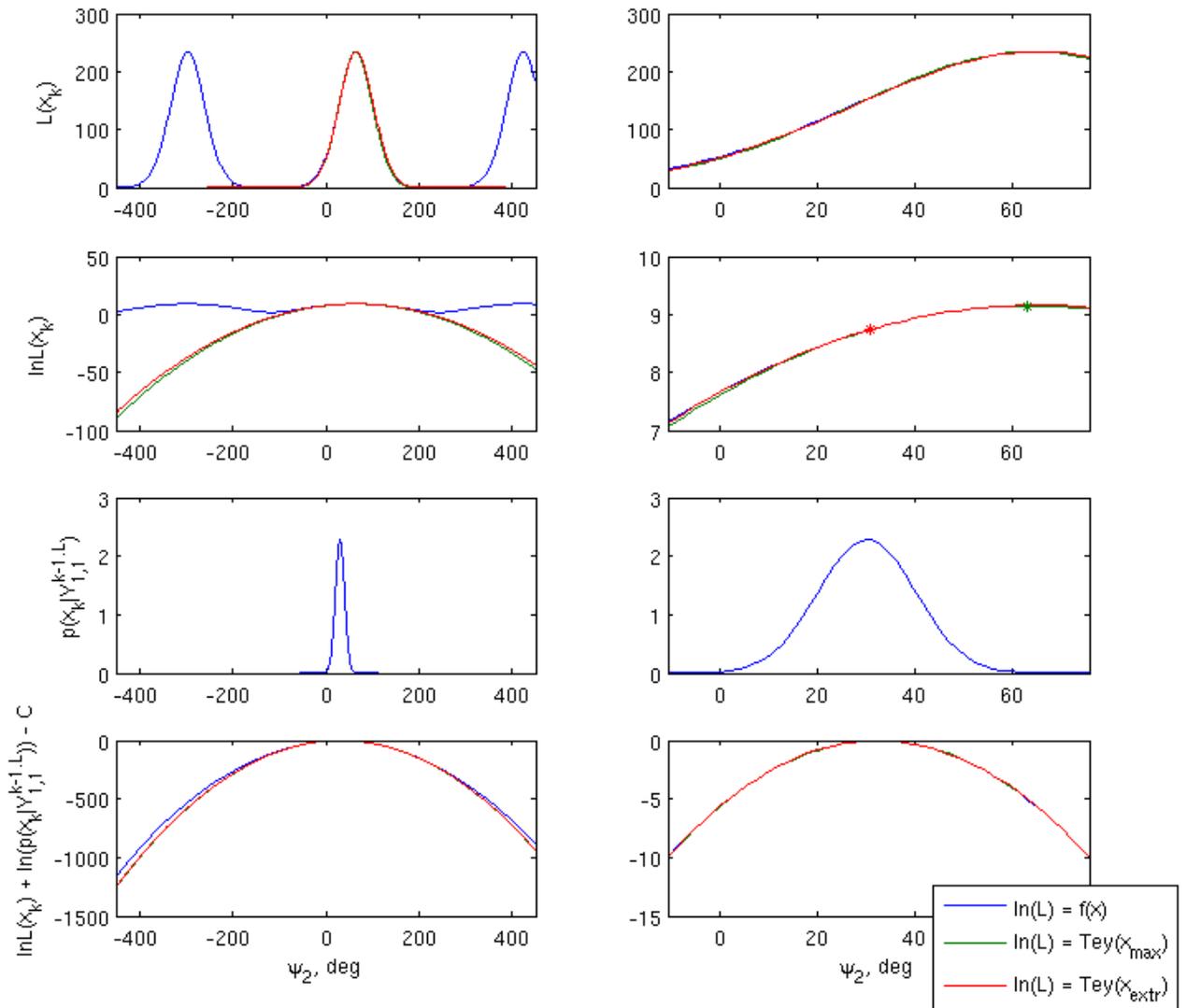


Рисунок 18. Срез реализаций функций: правдоподобия  $L(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)$  (первая строка графиков), ЛФП  $\ln L(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)$  (вторая строка), ЭПВ

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) \text{ (третья строка) и логарифма АПВ}$$

$$\ln p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L}) - C \text{ (четвертая строка)}$$

Последняя строка графиков соответствует логарифму АПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  (максимум смещен в ноль). Данная величина образуется как сумма ЛФП и логарифма ЭПВ. Можно выбрать некоторый порог, например -10 Нп от максимума, значения ниже которого считать соответствующими минус бесконечности (то есть нулевым значениям ПВ) (1 Непер примерно равен 8.6 дБ,  $\exp(-10) \approx 5 \cdot 10^{-5}$ , что соответствует 4.5 сигма для нормального распределения) Тогда область  $\psi_{2,k}$ , в которых  $\ln L(\psi_{2,k})$  значима, сузится до

интервала от -10 до 75 градусов. В данной области построены графики второго столбца.

Используемые аппроксимации логарифма функции правдоподобия должны хорошо описывать эту функцию в той области значений аргументов, где значения функции превышают выбранный порог. Заведомо однозначно сказать, какую точку  $\check{\mathbf{x}}_k$  выбрать, в общем случае нельзя. Погрешность аппроксимации будет определяться конкретным видом функции правдоподобия, ЭПВ и используемой функции для определения погрешности. Рисунок 19 иллюстрирует данный тезис. Выбор  $\check{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k$  (а в данном примере  $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k$ ), приводит к высокой точности аппроксимации при малых значениях аргумента (а). Выбор  $\check{\mathbf{x}}_k = \arg \max(L(\mathbf{c}\mathbf{x}_k))$ , в данном примере, позволяет хорошо аппроксимировать функции при больших значениях аргумента (б).

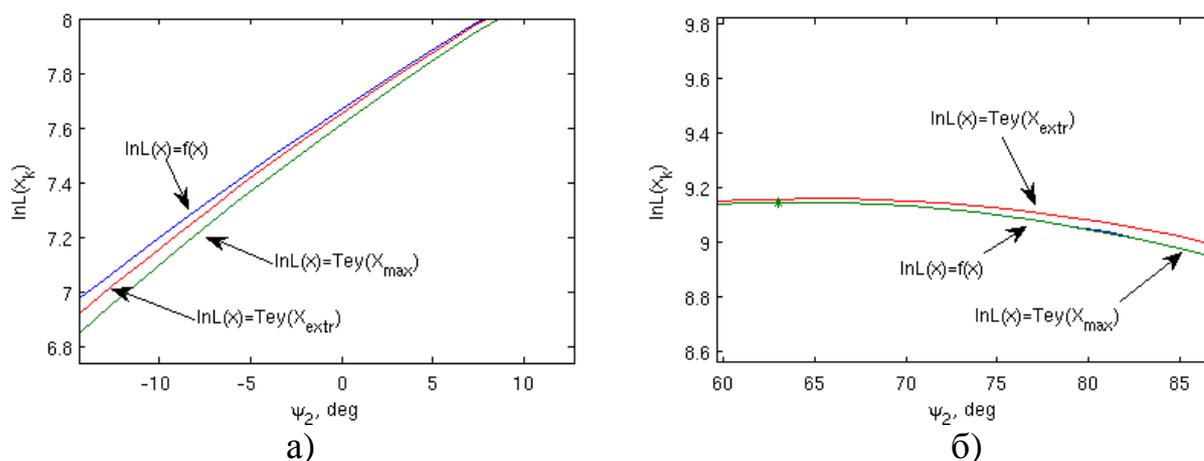


Рисунок 19. Логарифм функции правдоподобия: исходная функция (синий), аппроксимация путем разложения вокруг точки максимума (зеленый), аппроксимация путем разложения вокруг точки математического ожидания ЭПВ (красный)

При практической реализации можно применять разные стратегии выбора  $(\check{\mathbf{x}}_k)_j$ . Существенно упростить аппаратуру позволяет выбор:

- 1)  $(\check{\mathbf{x}}_k)_j$  как можно ближе к  $(\tilde{\mathbf{x}}_k)_j$ , в частности  $(\check{\mathbf{x}}_k)_j = (\tilde{\mathbf{x}}_k)_j$ ,

$$2) \quad (\tilde{\mathbf{x}}_k)_j = 0.$$

Второй вариант не приведет к существенному возрастанию ошибок аппроксимации, если заведомо известно, что срез ЭПВ и функции правдоподобия сосредоточен около нуля аргумента. Например, это характерно для производной РФ  $\psi'_k$ .

Если динамика вращения объекта невелика, то в качестве опорных параметров производных РФ можно принять  $\tilde{\psi}'_{m,k} = 0, m = 2..M$ . В этом случае реализация системы в целом, и корреляторов в частности, существенно упрощается:

- опорные сигналы корреляторов всех РЧБ совпадают, что позволяет существенно упростить блок корреляторов и снизить интенсивность обмена с процессором;

- система слежения за РФ не участвует в управлении коррелятором, что снижает риск срыва слежения по частоте.

Для остальных параметров применим классический подход – выберем в качестве опорных параметров соответствующие им экстраполированные значения  $(\tilde{\mathbf{x}}_k)_j = (\tilde{\mathbf{x}}_k)_j$ .

Тогда вектор опорных параметров принимает вид:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \left| \tilde{\mathbf{x}}_{\psi 2,k}^T \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{x}}_{\psi M,k}^T \quad \tilde{\mathbf{x}}_{\omega,k}^T \quad \tilde{\tau}_k \right|^T, \quad (2.12)$$

где

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\psi m,k} = \left| \tilde{\psi}_{m,k} \quad 0 \quad 0 \right|^T. \quad (2.13)$$

Вектору опорных параметров соответствует вектор информативных опорных параметров:

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k = \mathbf{c} \tilde{\mathbf{x}}_k. \quad (2.14)$$

## 2.1.4 Вектор математических ожиданий апостериорной ПВ как решение задачи первичной обработки

Компоненты вектора  $\mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}_k$ , при справедливости принятой аппроксимации АПВ многомерным нормальным распределением, совпадают с оптимальной оценкой по критерию минимума среднего риска при простой и квадратичной функции потерь [23]. Система фильтрации, производящая преобразования (2.8) или (2.10), формирует оптимальные, по указанным критериям, оценки параметров сигналов промежуточной частоты в предложенном некогерентном режиме (см. рисунок 20):

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_k = \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}_k. \quad (2.15)$$

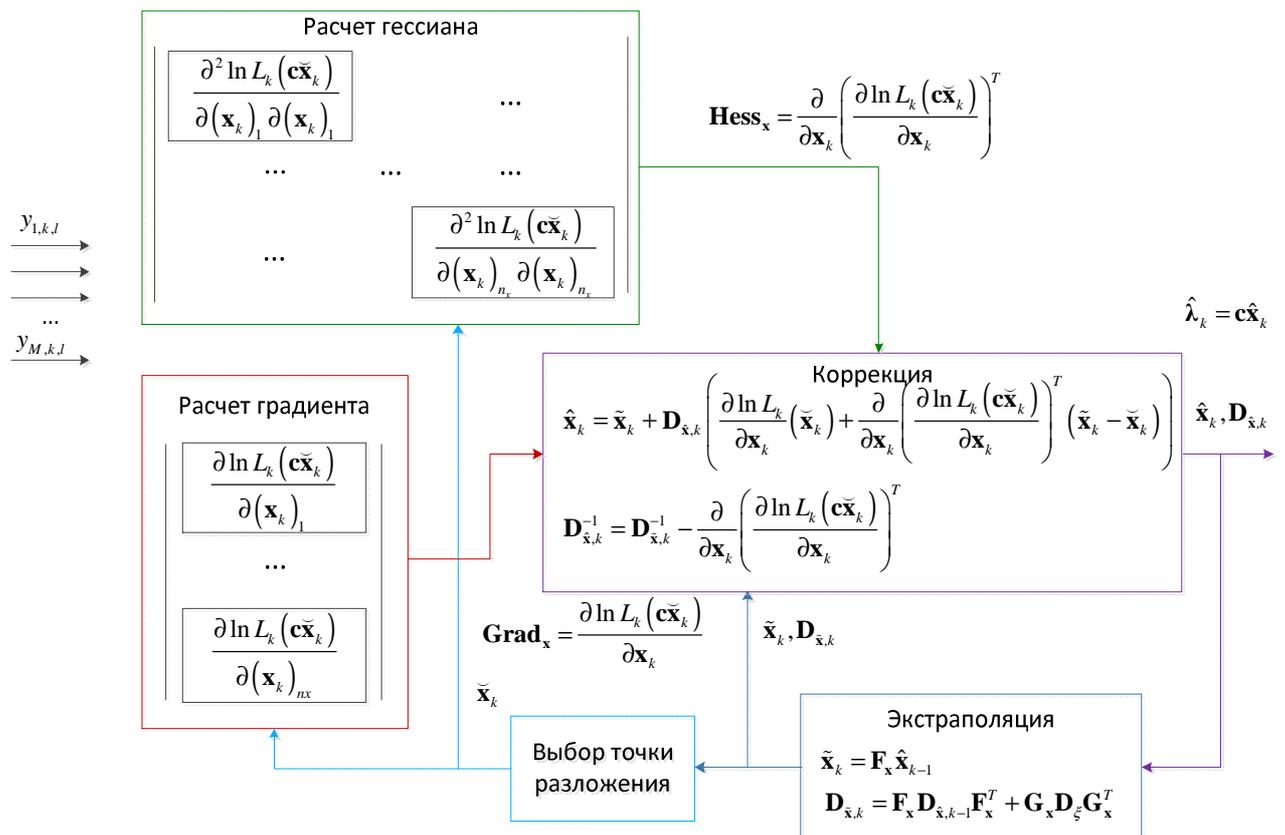


Рисунок 20. Схема рекурсивного фильтра расчета параметров апостериорной ПВ в гауссовом приближении

В диссертации под некогерентным режимом понимается алгоритм обработки сигналов, полученный при отнесении общей для всех сигналов фазы  $\varphi_{1,k}$  к неинформативным параметрам с последующим усреднением по ней функции правдоподобия. В этом случае дискриминационные алгоритмы, а за

ними и опорные сигналы корреляторов, не используют те или иные оценки фазы сигнала.

Для реализации квазиоптимального алгоритма обработки необходимо рассчитать вектор градиента  $\mathbf{Grad}_x(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)$  и матрицу гессиана

$$\mathbf{Hess}_x(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left( \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T \text{ логарифма функции правдоподобия.}$$

## 2.2 Общие выражения для функций дискриминаторов

Размерность вектора информативных параметров  $\lambda_k$

$$\lambda_k = \left| \psi_{2,k} \quad \psi'_{2,k} \quad \dots \quad \psi_{M,k} \quad \psi'_{M,k} \quad \omega_k \quad \tau_k \right|^T, \quad (2.16)$$

в условиях задачи меньше размерности вектора состояния  $\mathbf{x}_k$

$$\mathbf{x}_k = \left| \psi_{2,k} \quad \psi'_{2,k} \quad \psi''_{2,k} \quad \dots \quad \psi_{M,k} \quad \psi'_{M,k} \quad \psi''_{M,k} \quad \omega_k \quad \omega'_k \quad \tau_k \right|^T. \quad (2.17)$$

С учетом их состава это приводит к тому, что производные  $\ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)$  по компонентам  $\mathbf{x}_k$ , не входящим в  $\lambda_k$ , будут равны нулю. Для расчета  $\mathbf{Grad}_x$  достаточно найти производные логарифма функции правдоподобия по информативным параметрам. Легко показать, что выполняется тождество

$$\mathbf{Grad}_x(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \ln L_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k) = \mathbf{c}^T \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \ln L_k(\tilde{\lambda}_k) = \mathbf{c}^T \mathbf{u}_{\lambda,k}(\tilde{\lambda}_k), \quad (2.18)$$

где

$$\mathbf{u}_{\lambda,k}(\tilde{\lambda}_k) = \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \ln L_k(\tilde{\lambda}_k). \quad (2.19)$$

Компоненты вектора (2.19) называют *дискриминаторами* информативных параметров дискретной нелинейной системы [22]. Обобщая понятие дискриминатора, будем называть вектор (2.19) *векторным дискриминатором*.

Аналогично и для гессиана, легко показать, что выполняется тождество

$$\mathbf{Hess}_x(\mathbf{c}\tilde{\lambda}_k) = \mathbf{c}^T \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \left( \frac{\partial \ln L_k(\tilde{\lambda}_k)}{\partial \lambda_k} \right)^T \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \mathbf{Hess}_\lambda(\tilde{\lambda}_k) \mathbf{c}, \quad (2.20)$$

где

$$\mathbf{Hess}_\lambda(\tilde{\lambda}_k) = \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \left( \frac{\partial \ln L_k(\tilde{\lambda}_k)}{\partial \lambda_k} \right)^T. \quad (2.21)$$

Параметры функции правдоподобия  $E_{m,k,l}$  приближенно не являются функциями  $\lambda_k$ . Поэтому продифференцировав её по вектору информативных параметров получаем тождество

$$\mathbf{u}_{\lambda,k}(\lambda_k) = \frac{\partial \ln L_k(\lambda_k)}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \ln I_0 \left( \frac{A}{\sigma_n^2} X_{\psi,k}(\lambda_k) \right). \quad (2.22)$$

Производной функции нулевого порядка  $I_0(\cdot)$  является функция первого порядка  $I_1(\cdot)$ , тогда

$$\frac{\partial \ln L_k(\lambda_k)}{\partial \lambda_k} = \frac{A}{\sigma_n^2} \frac{I_1 \left( \frac{A}{\sigma_n^2} X_{\psi,k}(\lambda_k) \right)}{I_0 \left( \frac{A}{\sigma_n^2} X_{\psi,k}(\lambda_k) \right)} \frac{1}{X_{\psi,k}(\lambda_k)} \frac{\partial X_{\psi,k}^2(\lambda_k)}{\partial \lambda_k}, \quad (2.23)$$

где  $X_{\psi,k}(\lambda_k)$  определяется формулами (1.39)-(1.41).

График отношения функций Бесселя первого и нулевого порядка приведен на рисунке 21. Данное отношение определяется, в основном, амплитудой сигналов и дисперсией шумов наблюдений, т.е. величиной отношения сигнал/шум. В соответствии с поставленной в работе целью разрабатываемая система должна обладать высокой помехоустойчивостью. При низких отношениях сигнал/шум система работает в области значений  $\frac{A}{\sigma_n^2} X_{\psi,k}(\lambda_k) < 1$ , при которых справедлива аппроксимация  $\frac{I_1(x)}{I_0(x)} \approx \frac{1}{2}x$ . При высоких отношениях сигнал/шум функция хорошо аппроксимируется единицей.

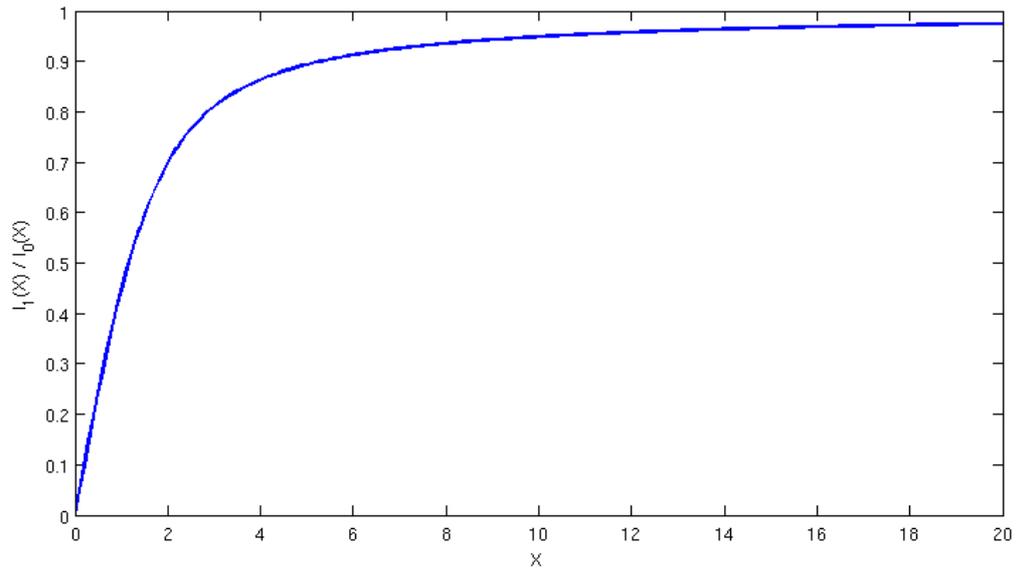


Рисунок 21. График отношений функций Бесселя

Первые три множителя в выражении (2.23) - общие для всех дискриминаторов. Их произведение можно рассматривать, в первом приближении, как нормировочный коэффициент. Введем обозначение

$$\Upsilon(\lambda_k) = \frac{A}{\sigma_n^2} \frac{I_1\left(\frac{A}{\sigma_n^2} X_{\psi,k}(\lambda_k)\right)}{I_0\left(\frac{A}{\sigma_n^2} X_{\psi,k}(\lambda_k)\right)} \frac{1}{X_{\psi,k}(\lambda_k)}. \quad (2.24)$$

Моделирование показывает, что множитель (2.24) минимален в точке истинных значений параметров, слабо зависит от параметров задержки и частоты, а при варьировании разности фаз увеличивается не более чем в два с половиной раза при  $M=3$ . В режиме слежения, когда опорные параметры близки к истинным значениям, величину (2.24) можно считать примерно равной (см. П.2.8 Приложения)

$$\Upsilon \approx \Upsilon_{won} = \frac{I_1(2q_{c/n0}TM)}{I_0(2q_{c/n0}TM)} \frac{2}{LM\sigma_n^2}, \quad (2.25)$$

$$q_{c/n0} \stackrel{df}{=} \frac{P_s}{N_0} = \frac{A^2}{4\sigma_n^2 T_d} \quad (2.26)$$

- отношение сигнал/шум [Гц].

Выражение (2.25) можно ещё более упростить, приняв кусочно-линейную аппроксимацию отношения модифицированных функций Бесселя:

$$\Upsilon \approx \Upsilon_{won} \approx \Upsilon_{lin} = \begin{cases} \frac{2}{LM\sigma_n^2}, & Mq_{c/n0}T \geq 1 \\ \frac{2q_{c/n0}T_d}{\sigma_n^2}, & Mq_{c/n0}T < 1 \end{cases}. \quad (2.27)$$

Графики (2.25) и (2.27) как функций от отношения сигнал/шум для  $M = 3$ ,  $\sigma_n^2 = 1$ ,  $T = 20$  мс,  $F_d = 44.2$  МГц, что соответствует параметрам экспериментального образца УНАП, приведены на рисунке 22.

Компоненты последнего множителя в (2.23) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_{\psi,k}^2(\lambda_k)}{\partial \lambda_k} = & \\ = \sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k}(\lambda_k) \left( \sum_{m=1}^M \frac{\partial I_{\psi,m,k}(\lambda_k)}{\partial \lambda_k} \right) + \sum_{m=1}^M Q_{\psi,m,k}(\lambda_k) \left( \sum_{m=1}^M \frac{\partial Q_{\psi,m,k}(\lambda_k)}{\partial \lambda_k} \right). & \end{aligned} \quad (2.28)$$

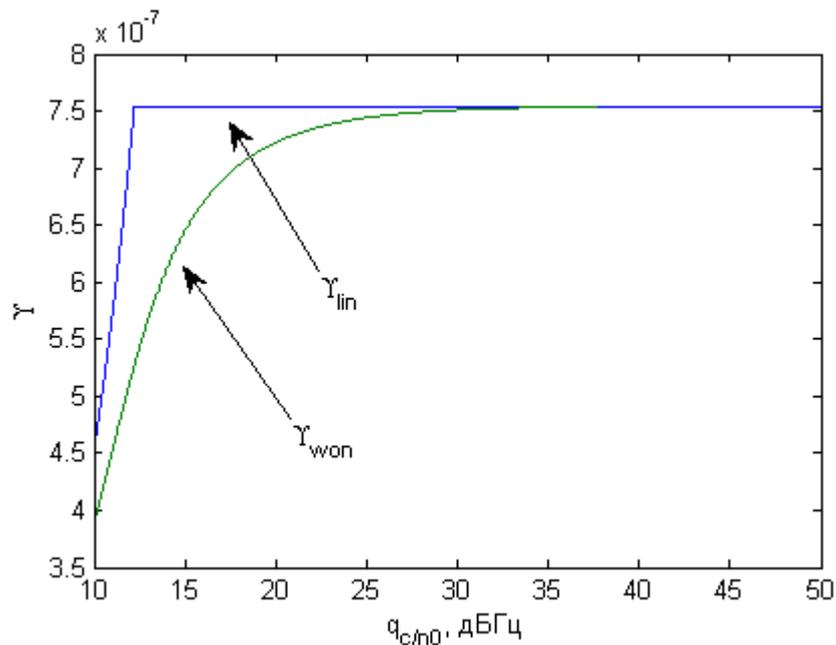


Рисунок 22. Графики аппроксимаций  $\Upsilon_{won}$  и  $\Upsilon_{lin}$  величины  $\Upsilon$  как функции отношения сигнал/шум

Выражение (2.28) определяет структуру дискриминаторов информативных параметров.

Синтез дискриминаторов информативных параметров произведен автором в работах [9, 26, 44]. В рамках диссертации ограничимся изложением основных результатов.

Общепринятой практикой при построении НАП является пренебрежение дискриминаторами производных, если используются дискриминаторы их первообразных. Например, при построении ССФ пренебрегают вкладом дискриминатора частоты. Связано это с тем, что дискриминаторы производных, при построении их на тех же корреляционных суммах, что и дискриминаторов первообразных, вносят пренебрежимо малый вклад в улучшение точности слежения [2]. Аналогично обстоят дела и с дискриминаторами производных разностей фаз, при реализации опытного образца УНАП она не потребовались, результаты их синтеза опущены. С ними можно ознакомиться в публикациях автора [9, 26, 44], они используются при проведении моделирования, результаты которого представлены в Главе 3.

С учетом сказанного, в настоящей главе приводятся результаты синтеза и анализа дискриминаторов параметров:

- разностей фаз  $\psi_{21,k} \dots \psi_{M1,k}$ ;
- частотного сдвига сигнала первого РЧБ  $\omega_k$ ;
- задержки сигнала (фазы ДК) РЧБ  $\tau_k$

Для упрощения изложения, результаты расчета остальных дискриминаторов и элементов гессиана (2.21) опущены, хотя они и используются при проведении моделирования.

Приведем результаты синтеза и анализа, занеся необходимые доказательства в Приложение.

## 2.3 Синтез и анализ дискриминатора разности фаз

### 2.3.1 Алгоритм дискриминатора разности фаз

Находим компоненты вектора (2.28), соответствующие параметру разности фаз  $j$ -го и 1 РЧБ  $\psi_{j,k}$ ,  $j=2\dots M$ ,  $\psi_{1,k}=0$ . Выкладки даны в П.2.8 Приложения, приведем конечный результат.

*ДРФ при использовании сигналов двух антенн*

В частном случае  $M=2$ , то есть УНАП укомплектована двумя антеннами

$$u_{\psi_{2,k}}^{(M=2)}(\tilde{\lambda}_k) = \frac{\partial \ln L_k}{\partial \psi_{2,k}}(\tilde{\lambda}_k) = 2\Upsilon \times \quad (2.29)$$

$$\times \left\{ \cos(\check{\psi}_{2,k}) [I_{2,k} Q_{1,k} - Q_{2,k} I_{1,k}] - \sin(\check{\psi}_{2,k}) [Q_{2,k} Q_{1,k} + I_{2,k} I_{1,k}] \right\},$$

где

$$I_{m,k} = I_{m,k}(\tilde{\lambda}_k) \stackrel{df}{=} \sum_{l=1}^L y_{j,k,l} G_{c,m,k,l}(\tilde{\lambda}_k) \cos(\Phi_{j,k,l}(\tilde{\lambda}_k)), \quad (2.30)$$

$$Q_{m,k} = Q_{m,k}(\tilde{\lambda}_k) \stackrel{df}{=} \sum_{l=1}^L y_{j,k,l} G_{c,m,k,l}(\tilde{\lambda}_k) \sin(\Phi_{j,k,l}(\tilde{\lambda}_k))$$

- квадратурные суммы, реализуемые коррелятором УНАП, с фазой гармоник опорных сигналов

$$\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k) \stackrel{df}{=} \omega_{if} t_{k,l} + (\tilde{\omega}_{1,k} + \check{\psi}'_{m,k})(l-1)T_d. \quad (2.31)$$

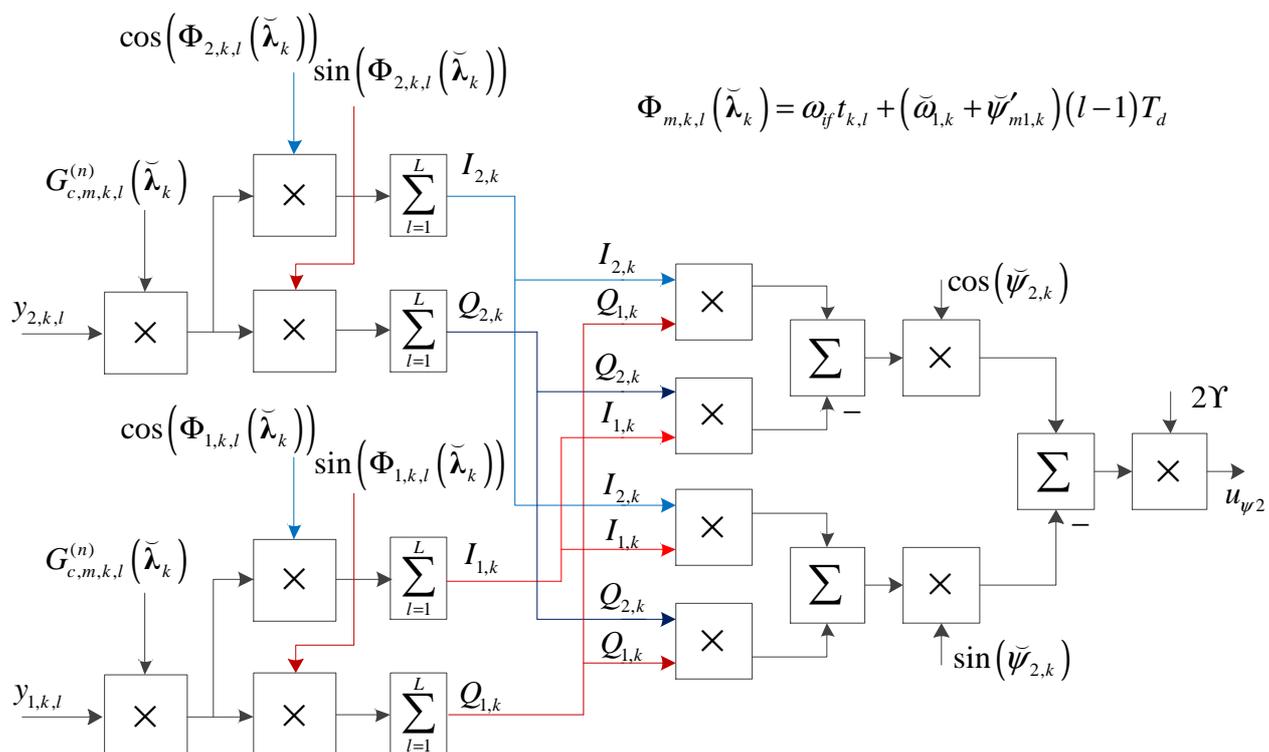
Структурная схема синтезированного дискриминатора разности фаз при обработке сигналов двух антенн приведена на рисунке 23. На устройство дискриминатора получены патенты РФ [33], [34].

Если пару квадратур  $I_{m,k}$ ,  $Q_{m,k}$  рассматривать как единый комплексный сигнал  $W_{m,k}$

$$W_{m,k} = I_{m,k} + iQ_{m,k}, \quad (2.32)$$

то выражение ДРФ (2.29) можно представить в виде

$$u_{\psi_{2,k}}^{(M=2)}(\tilde{\lambda}_k) = 2\Upsilon \cdot \text{Re} \left( e^{i\check{\psi}_{2,k}} W_2 W_1^* e^{i\pi/2} \right). \quad (2.33)$$



$$\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k) = \omega_{if} t_{k,l} + (\tilde{\omega}_{1,k} + \tilde{\psi}'_{m1,k})(l-1)T_d$$

Рисунок 23. Структурная схема дискриминатора разности фаз при обработке сигналов двух РЧБ

Интерпретируем полученный результат. В первом приближении, если пренебречь воздействием шумов, аргументы комплексных сигналов  $W_m$  пропорциональны разности фаз сигналов входного и опорного (см. рис 24, а). Тогда аргумент  $W_1 W_2^*$  есть истинная разность фаз сигналов, а отклик на выходе дискриминатора пропорционален синусу разности РФ  $\tilde{\psi}_{2,k}$  и истинной РФ:

$$u_{\psi_2}^{(M=2)}(\tilde{\lambda}_k)_{q \rightarrow \infty} \sim \cos(\tilde{\psi}_{2,k} + \pi/2 - \psi_2) = \sin(\psi_{2,k} - \tilde{\psi}_{2,k}). \quad (2.34)$$

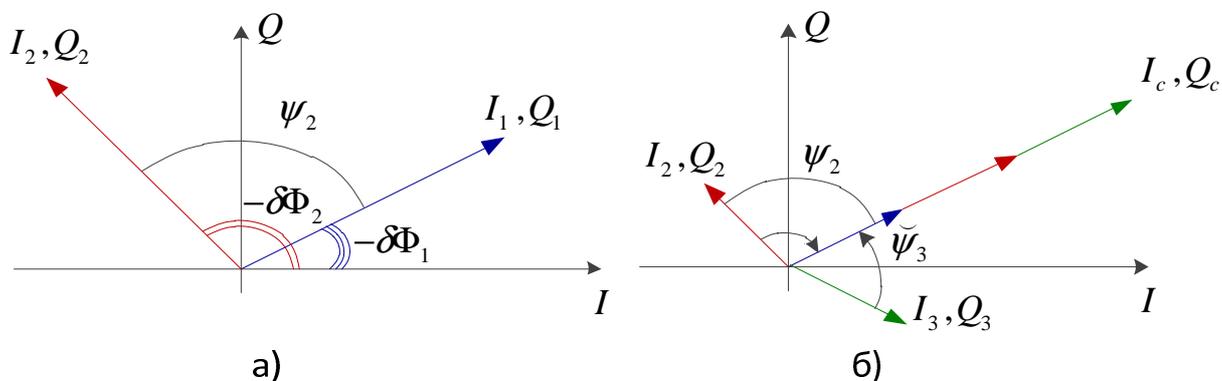


Рисунок 24. Интерпретация принципов работы ДРФ (а – обработка сигналов двух РЧБ, б – обработка сигналов трех РЧБ)

*ДРФ при использовании сигналов произвольного числа антенн*

В общем случае, в т.ч. когда число антенн больше двух, выражение для дискриминатора  $j$ -ой РФ принимает вид

$$u_{\psi_j,k}(\tilde{\lambda}_k) = \frac{\partial \ln L_k}{\partial \psi_{j,k}}(\tilde{\lambda}_k) = 2\Upsilon \times \left\{ \cos(\tilde{\psi}_{j,k}) [I_{j,k} Q_{c,k} - Q_{j,k} I_{c,k}] - \sin(\tilde{\psi}_{j,k}) [Q_{j,k} Q_{c,k} + I_{j,k} I_{c,k}] \right\}, \quad (2.35)$$

где

$$I_{c,k}(\tilde{\lambda}_k) \stackrel{df}{=} \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) I_{m,k}(\tilde{\lambda}_k) - \sum_{m=1}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) Q_{m,k}(\tilde{\lambda}_k), \quad (2.36)$$

$$Q_{c,k}(\tilde{\lambda}_k) \stackrel{df}{=} \sum_{m=1}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) I_{m,k}(\tilde{\lambda}_k) + \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) Q_{m,k}(\tilde{\lambda}_k).$$

Выражения (2.35), (2.36) задают структуру  $(M-1)$  дискриминаторов РФ (ДРФ). Структурная схема ДРФ (2.35) изображена на рисунке 25 (схемы формирования корреляционных сумм вынесены на отдельные рисунки).

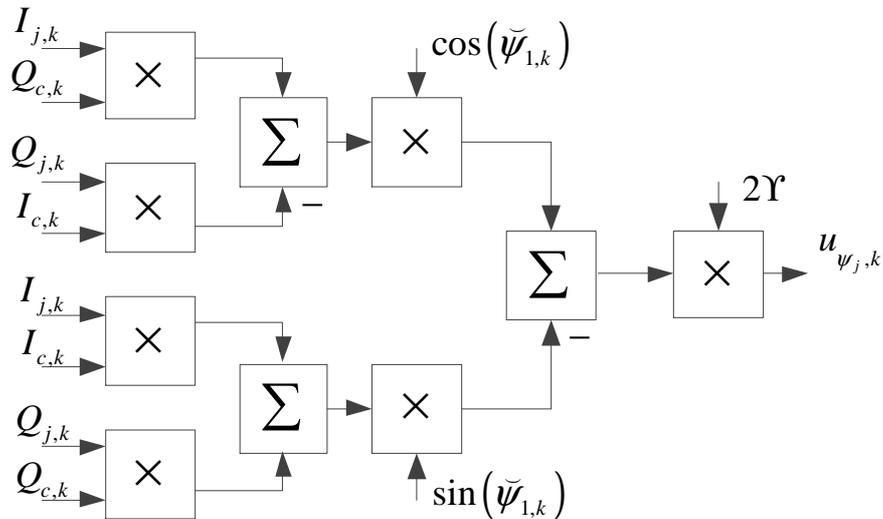


Рисунок 25. Структурная схема дискриминатора разности фаз (часть обработки квадратур)

Компоненты  $I_{c,k}$ ,  $Q_{c,k}$  можно интерпретировать как «ожидаемые» квадратуры сигнала первого РЧБ при заданных опорных РФ  $\tilde{\psi}_{1,k}, \dots, \tilde{\psi}_{M,k}$  и наблюдаемых квадратурах всех приемных точек. Иначе говоря, это компоненты «совместного» (“common”, буква “с” в обозначении) комплексного сигнала, как суммы сигналов всех приемных точек, пересчитанных к первой:

$$W_{c,k} = I_{c,k} + iQ_{c,k} = \sum_{m=1}^M W_m e^{i\tilde{\psi}_m}, \quad (2.37)$$

то есть как суммы принятых сигналов, «выровненных» по фазе с первым в соответствии с ожидаемыми  $\tilde{\psi}_{1,k}, \dots, \tilde{\psi}_{M,k}$ .

Тогда выражение для дискриминатора  $j$ -ой РФ принимает вид

$$u_{\psi_{j,k}}(\tilde{\lambda}_k) = 2Y \cdot \text{Re} \left( e^{i\tilde{\psi}_{j,k}} W_j W_c^* e^{i\pi/2} \right). \quad (2.38)$$

При отсутствии шумов сигнал дискриминатора оказывается пропорционален синусу разности  $\tilde{\psi}_{j,k}$  и аргумента «совместного» комплексного сигнала  $W_{c,k}$  (см. рис 24, б).

Схема блока формирования квадратурных компонент  $I_{m,k}$ ,  $Q_{m,k}$  изображена на рисунке 26.

Расчет сумм разделен на двойное суммирование – суммирование  $L_1 = L / N_1$  отсчетов на  $N_1$  интервалах длительностью  $T_1 = T / N_1$ , а затем суммирование  $N_1$  результатов первого суммирования:

$$I_{m,k}(\tilde{\lambda}) = \sum_{n_1=1}^{N_1} I_{m,n_1,k}, \quad (2.39)$$

$$Q_{m,k}(\tilde{\lambda}) = \sum_{n_1=1}^{N_1} Q_{m,n_1,k},$$

где

$$I_{m,n_1,k}(\tilde{\lambda}) = \sum_{l=1+(n_1-1)N_1}^{n_1 N_1} y_{m,k,l} G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k}) \cos(\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)), \quad (2.40)$$

$$Q_{m,n_1,k}(\tilde{\lambda}) = \sum_{l=1+(n_1-1)N_1}^{n_1 N_1} y_{m,k,l} G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k}) \sin(\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)).$$

При практической реализации алгоритмов значение  $T_1$  определяется длительностью эпохи ДК, то есть  $T_1 = 1$  мс. В этом случае (2.40) рассчитываются специальным аппаратным блоком – коррелятором.

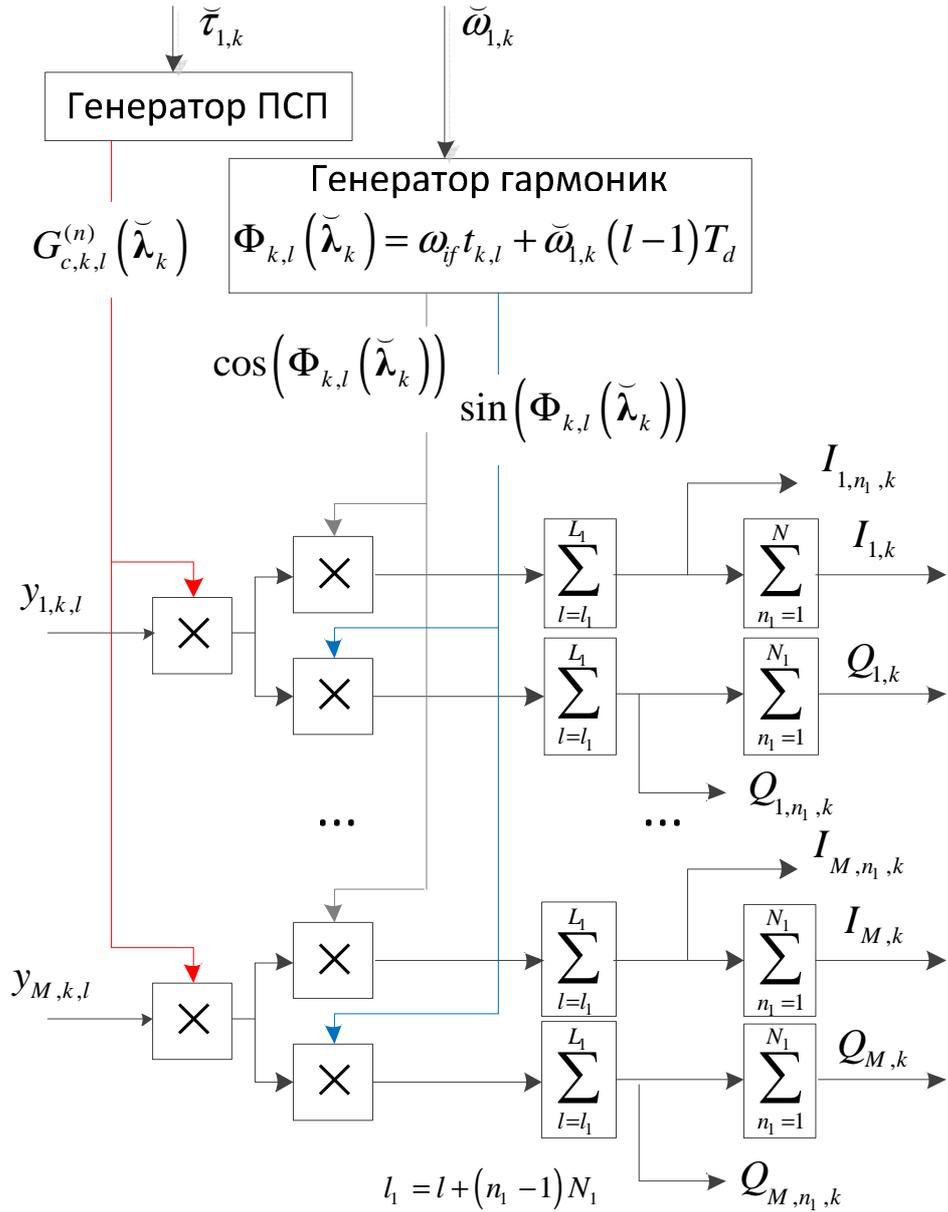


Рисунок 26. Структурная схема блока формирования корреляционных сумм (часть коррелятора УНАП, отвечающая за формирование promt-компонент)

Аналогично можно рассчитывать «миллисекундные» совместные квадратурные суммы:

$$\begin{aligned}
 Q_{c,n_1,k} &= \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) Q_{m,n_1,k} + \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) I_{m,n_1,k}, \\
 I_{c,n_1,k} &= \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) I_{m,n_1,k} - \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) Q_{m,n_1,k},
 \end{aligned}
 \tag{2.41}$$

тогда

$$I_{c,k}(\tilde{\lambda}) = \sum_{n_1=1}^{N_1} I_{c,n_1,k},$$

$$Q_{c,k}(\tilde{\lambda}) = \sum_{n_1=1}^{N_1} Q_{c,n_1,k}.$$
(2.42)

При составлении схемы коррелятора использованы значения параметров  $\tilde{\psi}'_m = 0$ , в данном виде реализуются promt-компоненты коррелятора опытного образца УНАП. Под promt-компонентами традиционно понимаются корреляционные суммы, согласованные с приходящим сигналом по фазе дальномерного кода [2, 22].

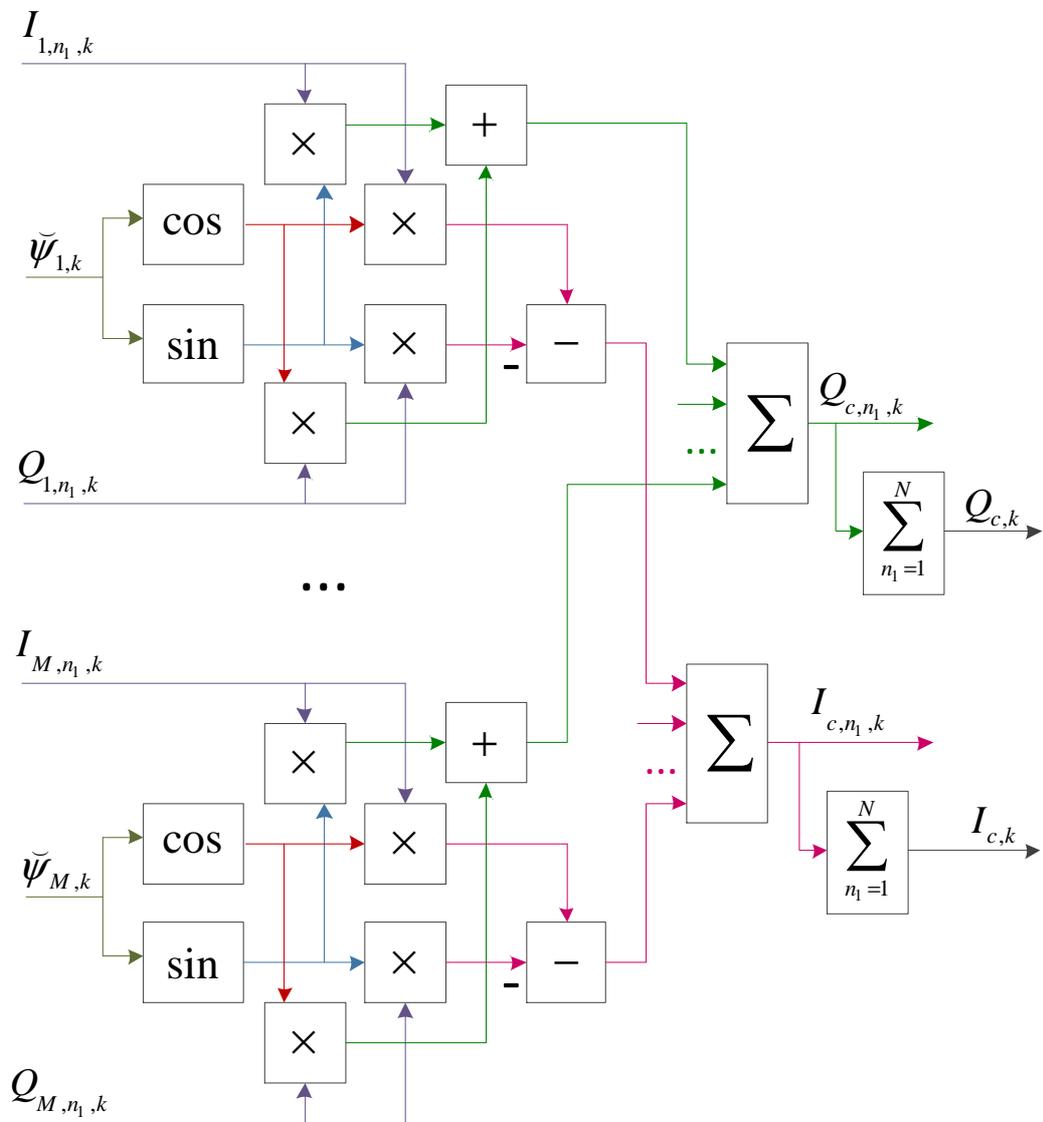


Рисунок 27. Структурная схема формирования  $I_{c,k}$ ,  $Q_{c,k}$   
(«совместных» квадратур)

Суммы  $I_{c,k}$ ,  $Q_{c,k}$  в дальнейшем используются и в других алгоритмах обработки, поэтому схема их формирования вынесена на отдельный рисунок 27.

Следует заметить, что при получении дискриминационного отсчета, соответствующего любой из разностей фаз, ДРФ использует сигналы всех доступных антенн. Иначе говоря, для оценки разности фаз сигнала в двух точках пространства можно использовать реализации сигнала не только в этих точках пространства, но и дополнительно в любых других точках.

В качестве  $\tilde{\psi}_{m,k}$  согласно (2.13) используются экстраполяции РФ  $\tilde{\psi}_{m,k}$ , которые в режиме слежения близки к истинным РФ. Это позволяет производить пересчет фазы из одной точки пространства в другую. Следовательно, чем меньше СКОш экстраполированных значений  $\tilde{\psi}_{m,k}$ , тем лучше работает дискриминатор, что в свою очередь увеличивает точность слежения.

Возможна и другая интерпретация синфазного сложения сигналов при формировании «совместных» квадратур  $I_{c,k}$ ,  $Q_{c,k}$ . Ввиду линейности корреляторов, совместные квадратуры можно рассматривать как результат корреляционной обработки сигнала активной фазированной антенной решетки (АФАР) из  $M$ -элементов. Причем во время работы ССРФ фокусировка АФАР производится на соответствующий каналу НКА (см. рисунок 28).

Число элементов в импровизированной непериодичной АФАР-УНАП невелико, поэтому ожидать существенного усиления в направлении НКА не приходится. Но т.к. разнесение антенн значительно больше длины волны, её диаграмма направленности будет иметь множество лепестков. Между лепестками образуются нули, глубина которых зависит от множества факторов. Тем не менее, можно ожидать провалы в нулях не менее десятка дБ, а это значит – существенное подавление помех со многих направлений.

Из этого следует важный вывод – помехоустойчивость УНАП может зависеть от направления прихода помехи.

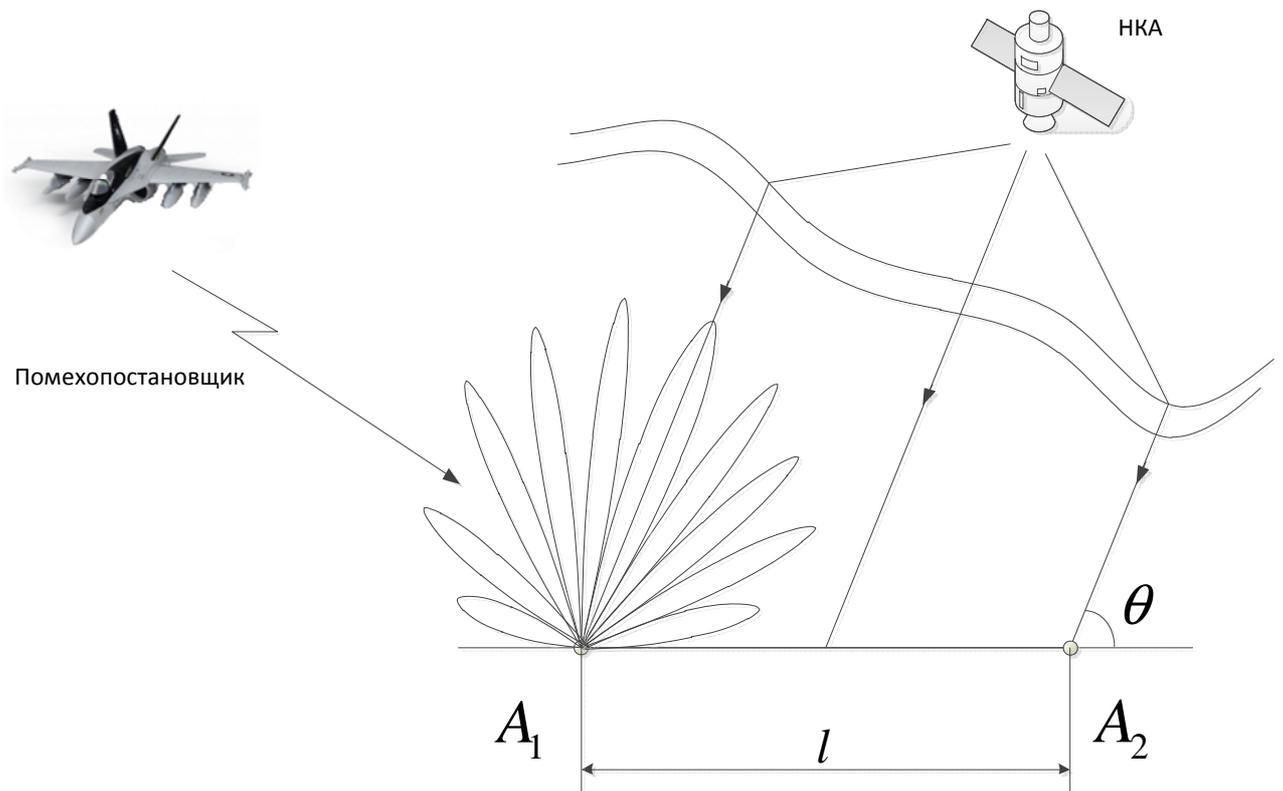


Рисунок 28. Фокусировка на НКА

Для реализации разработанного алгоритма необходимо определить только вектор градиента и матрицу гессиана логарифма функции правдоподобия. Для интерпретации работы полученных алгоритмов и составления модели формируемых оценок необходимо располагать дискриминационными и флуктуационными характеристиками дискриминаторов. Приведем результаты расчета этих характеристик.

### 2.3.2 Дискриминационная характеристика ДРФ

Дискриминационной характеристикой (ДХ) дискриминатора в широком смысле будем называть функцию

$$U_{\lambda,j}(\lambda - \tilde{\lambda}) = M(u_{\lambda,j}(\tilde{\lambda})), \quad (2.43)$$

а в узком смысле – ту же функцию, но при равенстве всех элементов  $\tilde{\lambda}$ , кроме  $\lambda_j$ , их истинным значениям [23]:

$$U_{\lambda,j} = M(u_{\lambda,j}(\tilde{\lambda}_j)) \Big|_{\lambda_i = \tilde{\lambda}_i, i \neq j}. \quad (2.44)$$

Под крутизной дискриминационной характеристики понимают [23]:

$$S_{\lambda,j} = \left. \frac{\partial U_{\lambda,j}}{\partial \lambda_j} \right|_{\lambda_j = \tilde{\lambda}_j} \quad (2.45)$$

в точке равенства опорного параметра  $\tilde{\lambda}_j$  истинному  $\lambda_j$  при фиксированных значениях других параметров.

В П.2.9 Приложения приведен расчет дискриминационной характеристики синтезированного дискриминатора и его крутизны методами теории вероятностей. Приведем итоговые результаты. Дискриминационная характеристика ДРФ:

$$\begin{aligned} U_{\psi,j}(\delta\lambda) &\stackrel{df}{=} M \left[ u_{\psi,j}(\tilde{\lambda}) \right] \approx \\ &\approx 2\Upsilon \cdot \left( \frac{AL}{2} \right)^2 \rho^2 (\delta\tau_k) \operatorname{sinc} \left( \frac{(\delta\psi'_{j,k} + \delta\omega_k)T}{2} \right) \times \\ &\times \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \operatorname{sinc} \left( \frac{(\delta\omega_k + \delta\psi'_{m,k})T}{2} \right) \sin \left( \delta\psi_{j,k} - \delta\psi_{m,k} + \frac{(\delta\psi'_{j,k} - \delta\psi'_{m,k})T}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.46)$$

где под  $\delta\lambda_j$  понимается рассогласование между истинным и опорным значением параметров:

$$\begin{aligned} \delta\psi_{m,k} &\stackrel{df}{=} \psi_{m,k} - \tilde{\psi}_{m,k}, \quad \delta\tau_k = \tau_k - \tilde{\tau}_k, \\ \delta\psi'_{m,k} &\stackrel{df}{=} \psi'_{m,k} - \tilde{\psi}'_{m,k}, \quad \delta\omega_k \stackrel{df}{=} \omega_k - \tilde{\omega}_k. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Крутизна дискриминационной характеристики (2.46) по параметру  $\delta\psi_{j,k}$

$$\begin{aligned} S_{\psi} &= \left. \frac{\partial U_{\psi,j}(\delta\lambda)}{\partial \psi_{j,k}} \right|_{\delta\psi_j=0} = \\ &= 2\Upsilon \cdot \left( \frac{AL}{2} \right)^2 \rho^2 (\delta\tau_k) \operatorname{sinc} \left( \frac{(\delta\omega_k + \delta\psi'_{j,k})T}{2} \right) \times \\ &\times \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \operatorname{sinc} \left( \frac{(\delta\omega_k + \delta\psi'_{m,k})T}{2} \right) \cos \left( \delta\psi_{m,k} + \frac{(\delta\psi'_{j,k} - \delta\psi'_{m,k})T}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.48)$$

в частности, при совпадении всех опорных параметров с истинными значениями соответствующих информативных параметров получаем

$$S_{\psi} \Big|_{\delta\lambda=0} = 2Y \cdot \left( \frac{AL}{2} \right)^2 \cdot (M - 1). \quad (2.49)$$

### Проверка аналитических результатов

Здесь и далее результаты аналитического расчета характеристик дискриминатора проверяются вычислительными экспериментами с помощью статистического моделирования. Общая функциональная схема проведения экспериментов приведена на рисунке 29.

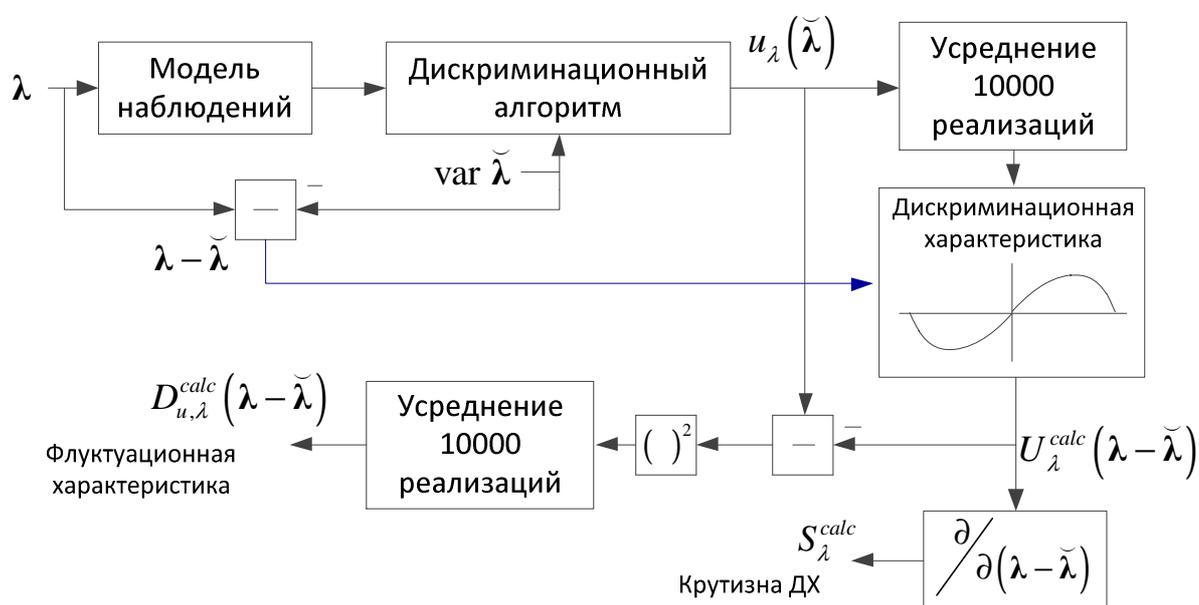


Рисунок 29. Схема проведения вычислительных экспериментов

Вычислительные эксперименты проводились в среде MATLAB.

Аналитическая и экспериментальная ДХ ДРФ приведены на рисунке 30. Помимо ДХ на рисунок нанесена линейная функция с производной, равной аналитическому значению крутизны. Результаты экспериментов не выявили отклонений в аналитических расчетах.

Крутизна ДХ растет линейно с увеличением числа антенн.

Апертура дискриминационной характеристики имеет ширину в один цикл фазы, то есть  $2\pi$ . Таким образом, неоднозначность относительных фазовых измерений, производимых ССРФ, составляет  $2\pi N_{\psi}$ ,  $N_{\psi} \in \mathbb{Z}$ .

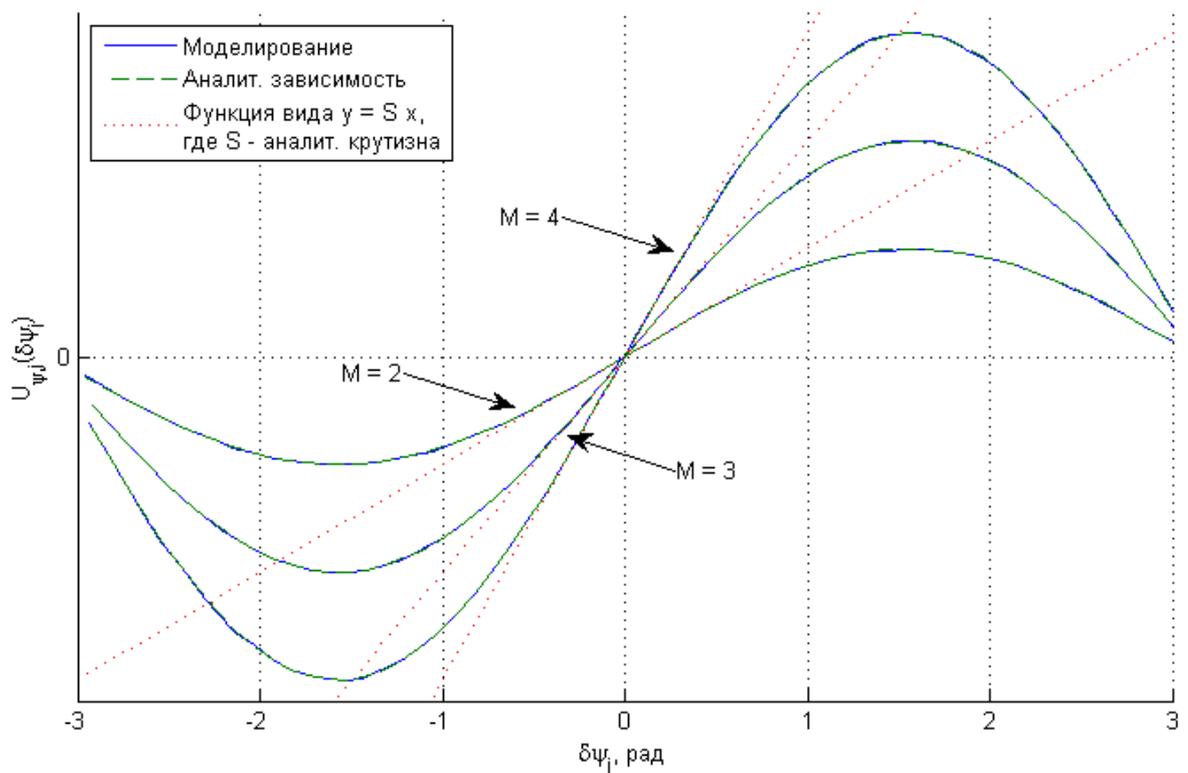


Рисунок 30. Аналитические и экспериментальные дискриминационные характеристики ДРФ (совпадают)

### 2.3.3 Флуктуационная характеристика ДРФ

Под флуктуационной характеристикой (ФХ) дискриминатора по одному из параметров  $\lambda_j$  будем понимать дисперсию случайной составляющей на выходе дискриминатора как функцию отклонений значений опорных параметров от значений соответствующих информативных параметров, т.е.:

$$D_{\eta_\lambda}(\delta\lambda) \stackrel{df}{=} M \left[ \left( u_{\lambda_j}(\tilde{\lambda}) - M \left[ u_{\lambda_j}(\tilde{\lambda}) \right] \right)^2 \right]. \quad (2.50)$$

В частном случае представляет интерес рассмотрение  $D_{\eta_\lambda}(\delta\lambda)$  при нулевых отклонениях по всем информативным параметрам, т.е.

$$D_{\eta_\lambda}(0) = M \left[ \left( u_{\lambda_j}(\tilde{\lambda}) - E \left[ u_{\lambda_j}(\tilde{\lambda}) \right] \right)^2 \right]_{\delta\lambda=0}. \quad (2.51)$$

Наряду с (2.50), (2.51) в радиоавтоматике [2, 23] для характеристики следящих систем часто используется дисперсия случайного процесса, пересчитанного с выхода дискриминатора к «дискриминируемому параметру»

$$\lambda_{eq,j,k} = \frac{u_{\lambda,j}}{S_{\lambda,j}} + \tilde{\lambda}_{j,k}. \quad (2.52)$$

которая определяется выражением

$$D_{\tilde{\lambda}}(0) \stackrel{df}{=} \frac{M \left[ \left( u_{\lambda,j}(\tilde{\lambda}) - M \left[ u_{\lambda,j}(\tilde{\lambda}) \right] \right)^2 \right]_{\delta\lambda=0}}{S_{\lambda}^2}. \quad (2.53)$$

В дальнейшем для краткости дисперсию (2.53) будем называть *дисперсией шума эквивалентных наблюдений*.

В линейном приближении величину (2.52) можно интерпретировать как измерение параметра, произведенное дискриминатором (см. Главу 3). Отсюда название – *эквивалентное наблюдение*. Дисперсия эквивалентных наблюдений, в этом случае, является дисперсией производимых измерений параметра, а значит, определяет и итоговую ошибку слежения за параметром. На этом основании (2.53) является одной из основных характеристик дискриминатора.

В П.2.10 Приложения приведен вывод флуктуационных характеристик ДРФ. Приведем итоговый результат:

$$\begin{aligned} D_{\eta_{\psi}}(\delta\lambda) &= (2\Upsilon A_{IQ,k} \sigma_{IQ,k})^2 \times \\ &\times \left\{ (M-1) \rho^2(\delta\tau_k) \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\delta\omega_k + \delta\psi'_{j,k}}{2} T \right) + \right. \\ &+ \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \rho^2(\delta\tau_k) \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\delta\omega_k + \delta\psi'_{m,k}}{2} T \right) + \frac{2\sigma_{IQ,k}^2 (M-1)}{A_{IQ,k}^2} + \\ &+ \sum_{\substack{a=1 \\ a \neq j}}^M \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq j, a}}^M \rho(\delta\tau_k) \operatorname{sinc} \left( \frac{\delta\omega_k + \delta\psi'_{a,k}}{2} T \right) \rho(\delta\tau_k) \times \\ &\left. \times \operatorname{sinc} \left( \frac{\delta\omega_k + \delta\psi'_{b,k}}{2} T \right) \cos \left( \frac{\delta\psi'_{a,k}}{2} T + \delta\psi_{a,k} - \frac{\delta\psi'_{b,k}}{2} T - \delta\psi_{b,k} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Дисперсия в точке истинных значений

$$D_{\eta_{\psi}}(0) = 2 \left( 2\Upsilon A_{IQ,k} \sigma_{IQ,k} \right)^2 (M-1) \left( 1 + \frac{M-2}{2} + \frac{\sigma_{IQ,k}^2}{A_{IQ,k}^2} \right). \quad (2.55)$$

Дисперсия шума эквивалентных наблюдений

$$D_{\tilde{\eta}_{\psi}}(0) = \frac{1}{(M-1)q} \left( 1 + \frac{M-2}{2} + \frac{1}{2q} \right), \quad (2.56)$$

где

$$q \stackrel{df}{=} \frac{E}{N_0} = \frac{A_{IQ}^2}{2\sigma_{IQ,k}^2}, \quad (2.57)$$

$$\sigma_{IQ,k}^2 \stackrel{df}{=} \sigma_{n,k}^2 L/2, \quad A_{IQ} \stackrel{df}{=} \frac{A_k L}{2} \quad (2.58)$$

- дисперсия и амплитуда квадратурных компонент.

Как уже было замечено ранее, использование УНАП наблюдений всех доступных РЧБ – нетривиальный результат синтеза. Из (2.56) следует, что использование всех доступных сигналов позволяет снизить дисперсию эквивалентных наблюдений по сравнению с дискриминатором РФ (2.29), использующим реализации сигналов только двух РЧБ. Наиболее заметен выигрыш при низком отношении сигнал/шум - до  $(M-1)$  раз при  $q \ll 1$ . Для работы НАП более характерна область  $q \geq 1$  (17 дБГц и выше при времени накопления 20 мс). На рисунке 31 приведены зависимости выигрыша в дисперсии эквивалентных наблюдений РФ при увеличении числа используемых в дискриминаторе сигналов.

Из приведенных графиков можно сделать вывод, что в интересующем диапазоне отношений сигнал/шум при использовании 3-4 антенн выигрыш от совместной обработки сигналов ДРФ для корня из дисперсии (СКО) шума эквивалентных наблюдений составляет 15-30%.

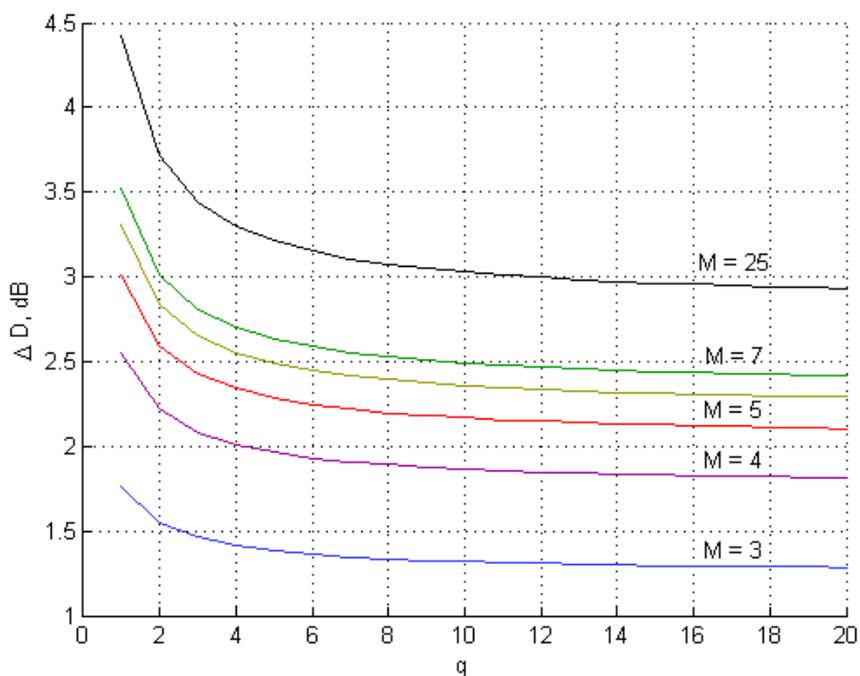


Рисунок 31. Снижение дисперсии эквивалентных наблюдений за счет обработки сигналов всех РЧБ (относительно дисперсии для  $M = 2$ )

#### Проверка аналитических результатов

На рисунке 32 изображены зависимости дисперсии шума эквивалентных наблюдений дискриминатора РФ.

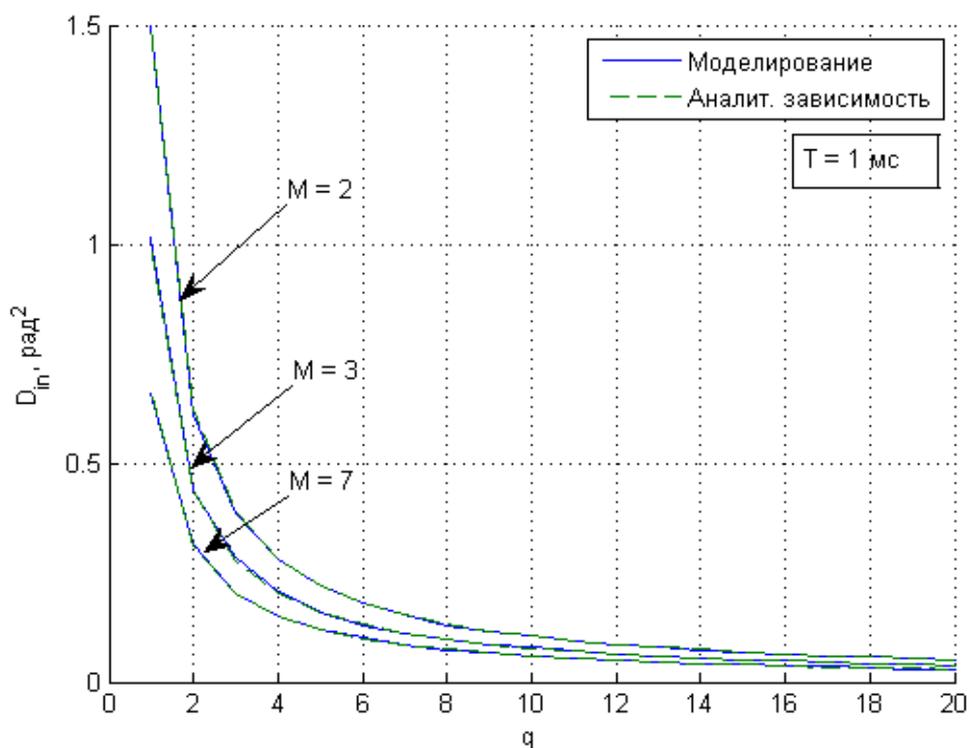


Рисунок 32. Аналитическая и экспериментальная зависимости дисперсии шума эквивалентных наблюдений ДРФ (совпадают)

Графики построены как функции от отношения сигнал/шум для различного числа используемых антенн. На графике наложены друг на друга аналитические зависимости и результаты проведенного моделирования работы схемы, изображенной на рисунке 29. Расчет и моделирование проводилось при  $T = 1$  мс.

Аналитические характеристики достаточно точно совпадают с результатами моделирования, в том числе при варьировании отношения сигнал/шум и числа приемных точек. Таким образом, проведенные эксперименты не выявили ошибок в результатах аналитического расчета. Результаты статистического моделирования подтвердили ожидаемое снижение дисперсии при увеличении числа антенн.

## 2.4 Синтез и анализ дискриминатора частоты

### 2.4.1 Алгоритм дискриминатора частоты

Синтез дискриминатора частоты (ДЧ)  $\omega_k$  проведен в П.2.11 Приложения, в результате получен следующий алгоритм (см. рисунок 33):

$$u_{\omega}(\tilde{\omega}_k) = I_{c,k} I'_{c,k} + Q_{c,k} Q'_{c,k}, \quad (2.59)$$

где  $I_{c,k}, Q_{c,k}$  определяются выражением (2.36), а компоненты производных совмещенных корреляционных сумм  $I'_{c,k}, Q'_{c,k}$ :

$$\begin{aligned} I'_{c,k}(\tilde{\lambda}_k) &= \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) I'_{m,k} - \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) Q'_{m,k}, \\ Q'_{c,k}(\tilde{\lambda}_k) &= \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) Q'_{m,k} + \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) I'_{m,k}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

где

$$\begin{aligned} I'_{m,k}(\tilde{\lambda}) &= -\sum_{l=1}^L l T_d y_{m,k,l} G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k}) \sin(\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)); \\ Q'_{m,k}(\tilde{\lambda}) &= \sum_{l=1}^L l T_d y_{m,k,l} G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k}) \cos(\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)). \end{aligned} \quad (2.61)$$

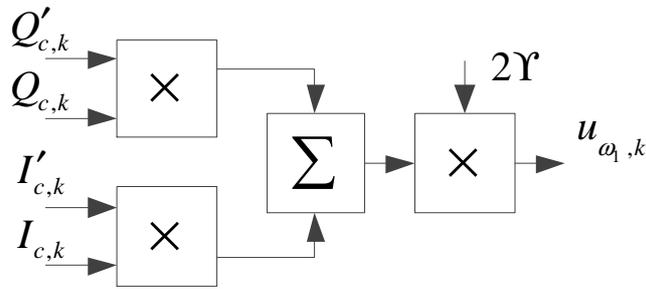


Рисунок 33. Структурная схема дискриминатора частоты

Синтезированный алгоритм требует корреляторов с особой структурой - умножением опорного сигнала на линейно возрастающую функцию  $I T_d$ . Переработка структуры коррелятора – сложная операция, а увеличение их числа – существенный недостаток, поэтому реализация (2.61) трудно реализуема на практике. Для адаптации алгоритмов можно поступить двумя способами:

- 1) Использовать аппроксимацию (2.61) суммой взвешенных корреляционных сумм;
- 2) Использовать вместо синтезированного дискриминатора сумму частотных дискриминаторов каждой приемной точки, реализуемых на имеющихся корреляторах.

В первом случае используется приближенное тождество:

$$\begin{aligned}
 I'_{m,k}(\tilde{\lambda}) &\approx I'^{appr}_{m,k}(\tilde{\lambda}) = -T_1 \sum_{n_1=1}^{N_1} n_1 Q_{m,n_1,k}, \\
 Q'_{m,k}(\tilde{\lambda}) &\approx Q'^{appr}_{m,k}(\tilde{\lambda}) = T_1 \sum_{n_1=1}^{N_1} n_1 I_{m,n_1,k}.
 \end{aligned}
 \tag{2.62}$$

Аппроксимация (2.62) работает тем лучше, чем больше  $N_1$ . При практической реализации УНАП характерное значение  $N_1 = 20$ .

В случае использования аппроксимации (2.62) расчет (2.60) упрощается (см. схему на рисунке 34):

$$\begin{aligned}
I'_{c,k}{}^{appr}(\tilde{\lambda}_k) &= \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) I'_{m,k}{}^{appr} - \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) Q'_{m,k}{}^{appr} = -T_1 \sum_{n_1=1}^{N_1} n_1 Q_{c,n_1,k} \\
Q'_{c,k}{}^{appr}(\tilde{\lambda}_k) &= \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) Q'_{m,k}{}^{appr} + \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) I'_{m,k}{}^{appr} = T_1 \sum_{n_1=1}^{N_1} n_1 I_{c,n_1,k}.
\end{aligned}
\tag{2.63}$$

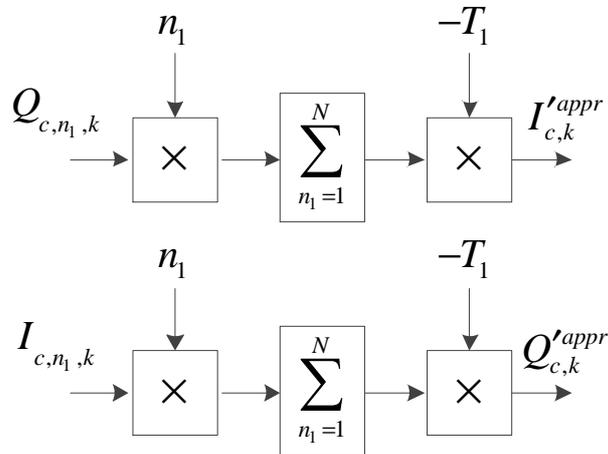


Рисунок 34. Расчет производных совместных корреляционных сумм

Выражение (2.59) совпадает по форме с известным алгоритмом частотного дискриминатора [2] с одной антенной, полученным в результате синтеза некогерентной оптимальной системы слежения за частотой при низких отношениях сигнал/шум.

Как и в случае с совместными квадратурными суммами  $I_{c,k}, Q_{c,k}$ , их производные  $I'_{c,k}, Q'_{c,k}$  можно интерпретировать как синфазные суммы корреляционных компонент отдельных приемных точек, где синфазность достигается выравниванием по фазе на основе опорных значений РФ. Таким образом, производится, своего рода, когерентное суммирование сигналов различных антенн. Тогда синтезированный ДЧ – дискриминатор частоты сигнала, принятого АФАР, сфокусированной на НКА.

Для анализа зависимостей  $I'_{c,k}, Q'_{c,k}$  от расстройки по частоте удобно использовать представления (2.42) и (2.62). Интерпретация принципа работы синтезированного дискриминатора иллюстрирована рисунком 35 (без учета шумовых процессов).

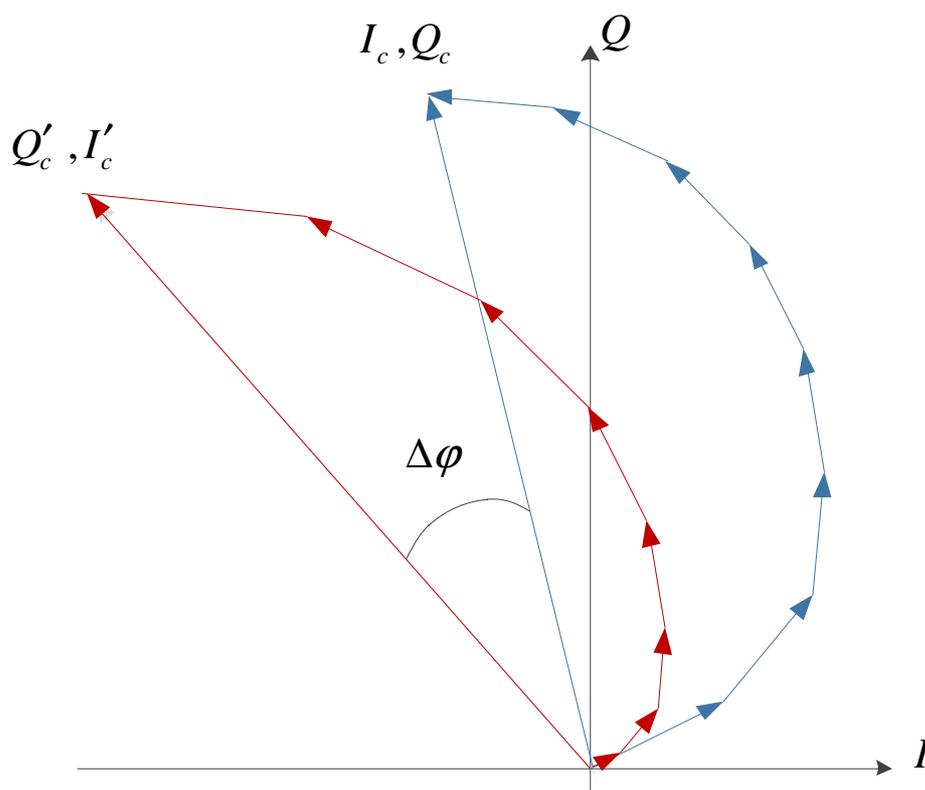


Рисунок 35. Сдвиг фазы между квадратурными суммами и их производными при наличии расстройки по частоте

Наличие расстройки по частоте  $\delta\omega_{1,k}$  между приходящим сигналом и сигналом опорным приводит к тому, что комплексный сигнал коррелятора  $(I_{c,n_1,k}, Q_{c,n_1,k})$  получает фазовый сдвиг  $-\delta\omega_{1,k}T_1 / 2$  с каждой инкрементацией  $n_1$ . При формировании совместных квадратурных сумм  $I_{c,k}, Q_{c,k}$  производится суммирование векторов  $(I_{c,n_1,k}, Q_{c,n_1,k})$  с равными весами. Но при формировании сумм  $I'_{c,k}, Q'_{c,k}$ , чем больше номер  $n_1$ , тем больше вес слагаемого в сумме. Наиболее значимыми в сумме становятся последние слагаемые, сдвиг фазы которых максимален относительно исходной позиции. Дискриминатор (2.59) есть скалярное произведение итоговых векторов, причем один из них предварительно получает дополнительный фазовый сдвиг на 90 градусов. Итоговый сигнал дискриминатора пропорционален синусу угла  $\Delta\varphi$ , получившемуся между векторами  $(Q'_{c,k}, I'_{c,k})$  и  $(I_{c,k}, Q_{c,k})$ . Угол же  $\Delta\varphi$  есть функция от расстройки по частоте  $\delta\omega_{1,k}$ .

Но складывать сигналы различных антенн при формировании дискриминационного отчета можно и некогерентно. При низкой динамике вращения объекта  $\psi'_{m,k}$  близки к нулю, тогда все  $M$  частотных дискриминаторов являются дискриминаторами частоты  $\omega_{1,k}$ . Сумма дискриминаторов в этом случае – дискриминатор с пропорционально возросшей крутизной характеристики. Существенное преимущество данного подхода – независимость слежения за частотой от ССРФ.

Сделать независимым ДЧ от ССРФ может использование в нем опорных параметров  $\forall m: \tilde{\psi}_{m,k} = 0$  и замена «совместных» квадратур на корреляционные суммы сигналов соответствующей антенны. Дискриминационная функция в этом случае соответствует главной диагонали матричного представления дискриминатора (см. (2.173) Приложения) и принимает вид

$$u_{\omega,main}(\tilde{\omega}_k) = 2Y \sum_{m=1}^M I_{m,k} I'_{m,k} + Q_{m,k} Q'_{m,k}, \quad (2.64)$$

что можно интерпретировать как «найти дискриминационный отклик классического частотного дискриминатора [2] для сигнала каждой антенны, а затем просуммировать результат». Дискриминаторы (2.59) и (2.64) могут быть использованы в одной и той же реализации УНАП. Например, переход на упрощенный дискриминатор (2.64) может производиться при индикации срыва слежения за РФ.

Структурная схема частотного дискриминатора представлена в двух частях. Первая часть (рис. 33) – соответствует выражению (2.59). Вторая часть описывает формирования сумм (2.61) в приближении (2.62) и представлена на рисунке 34.

#### 2.4.2 Дискриминационная характеристика ДЧ

В П.2.12 Приложения представлен расчет ДХ синтезированного ЧД и её крутизны в точке истинных значений.

Дискриминационная характеристика ДЧ (2.59) описывается формулой

$$\begin{aligned}
U_{\omega}(\delta\lambda) = M[u_{\omega}(\tilde{\omega}_k)] &= 2\tilde{\Upsilon} \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{a,b}\right) A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \times \\
&\left\{ \frac{\text{sinc}(\alpha_{a,k})}{\beta_{b,k}} \times \left[ \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \cos(\gamma_{ab}) - \cos(\alpha_{b,k} - \gamma_{ab}) \right] + \right. \\
&\left. + \frac{\text{sinc}(\alpha_{b,k})}{\beta_{a,k}} \times \left[ \text{sinc}(\alpha_{a,k}) \cos(\gamma_{ab}) - \cos(\alpha_{a,k} + \gamma_{ab}) \right] \right\}, \quad (2.65)
\end{aligned}$$

где

$$\alpha_{m,k} \stackrel{df}{=} \frac{(\delta\omega_k + \delta\psi'_{m,k})T}{2}, \quad (2.66)$$

$$\gamma_{ab} \stackrel{df}{=} \delta\psi'_{a,k} - \delta\psi'_{b,k} + \frac{(\delta\psi'_{a,k} - \delta\psi'_{b,k})T}{2}. \quad (2.67)$$

Для упрощения формулы рассмотрим срез  $\forall a, b \in \{1..M\} : \delta\psi'_a = \delta\psi'_b$  ;  
 $\delta\psi'_{a,k} = \delta\psi'_{b,k}$  (в частности равны нулю)  $\rightarrow \alpha_{a,k} = \alpha_{b,k} = \alpha_k ; \beta_{a,k} = \beta_{b,k} = \beta_k$  :

$$\begin{aligned}
U_{\omega}(\delta\lambda) \Big|_{\delta\psi'_a = \delta\psi'_b, \delta\psi'_a = \delta\psi'_b} &= M[u_{\omega}(\tilde{\omega}_{1,k})] \Big|_{\delta\psi'_a = \delta\psi'_b, \delta\psi'_a = \delta\psi'_b} = \\
&= 2\tilde{\Upsilon} \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{a,b}\right) A_{IQ,k}^2 T \rho^2(\delta\tau_k) \frac{\text{sinc}(\alpha_k)}{\alpha_k} \left[ \text{sinc}(\alpha_k) - \cos(\alpha_k) \right]. \quad (2.68)
\end{aligned}$$

Крутизна дискриминационной характеристики в точке истинных значений

$$S_{\omega_i} = 2\tilde{\Upsilon} \frac{1}{12} A_{IQ,k}^2 T^2 M^2. \quad (2.69)$$

Выражение (2.68) описывает дискриминационную характеристику ДЧ (2.59) в указанном срезе аргументов, выражение (2.69) - её крутизну.

Крутизна дискриминационной характеристики упрощенного дискриминатора (2.64) описывается выражением

$$S_{\omega,main} = 2\tilde{\Upsilon} \frac{1}{12} A_{IQ,k}^2 T^2 M, \quad (2.70)$$

а сама дискриминационная характеристика - выражением

$$\begin{aligned}
 U_{\omega, \text{main}}(\delta\lambda) &= M[u_{\omega, \text{main}}(\tilde{\omega}_k)] = \\
 &= 2\Upsilon \sum_{m=1}^M \frac{A_{IQ,k}^2 T \rho^2(\delta\tau_{m,k}) \text{sinc}(\alpha_{m,k})}{2 \alpha_{m,k}} [\text{sinc}(\alpha_{m,k}) - \cos(\alpha_{m,k})].
 \end{aligned}
 \tag{2.71}$$

### Проверка аналитических результатов

В соответствии со схемой 29 было проведено статистическое моделирование с целью верификации полученных аналитических зависимостей для ДХ и её крутизны.

Аналитическая и экспериментальная (полученная в результате моделирования) ДХ ДЧ представлены на рисунке 36 для  $T = 1$  мс. Помимо ДХ на график нанесена линейная функция с производной, равной аналитическому значению крутизны. Результаты экспериментов не выявили отклонений в аналитических расчетах.

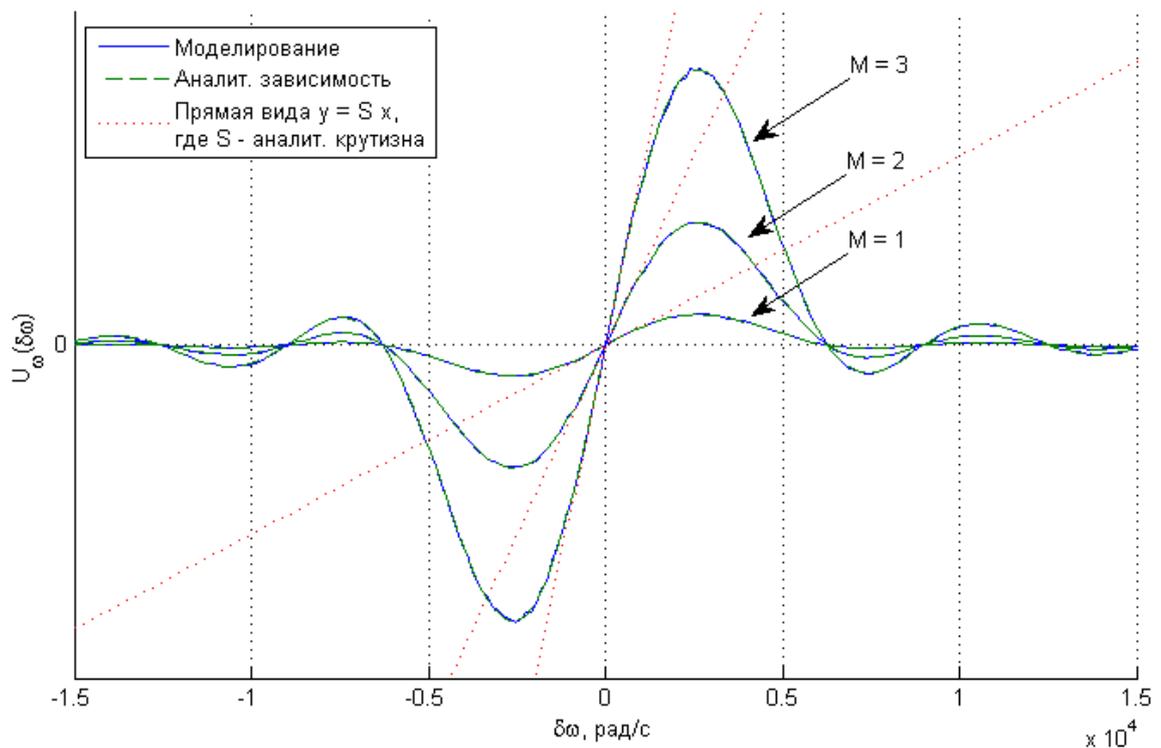


Рисунок 36. Дискриминационная характеристика и её крутизна для синтезированного дискриминатора частоты

Как и ожидалось, крутизна дискриминационной характеристики растет квадратично с увеличением числа антенн.

Ширина апертуры дискриминационной характеристики составляет 2000 Гц (по 1000 Гц в каждую сторону) при  $T = 1$  мс. Она пропорционально уменьшается с увеличением  $T$ , при  $T = 20$  мс равна 100 Гц.

Дискриминационная характеристика симметрична, имеет несколько точек устойчивого равновесия. Помимо точки устойчивого равновесия в нуле, есть две дополнительные точки рядом с краями апертуры, крутизна в которых ниже крутизны в нуле примерно в 6.7 раз. При дальнейшей отстройке частоты наблюдаются и другие точки устойчивого равновесия, но крутизна характеристики в них ещё меньше.

### 2.4.3 Флуктуационная характеристика ДЧ

Расчет ФХ синтезированного ДЧ проведен в П.2.13 Приложения. Если принять дополнительное условие  $\forall i, j \in \{1..M\}: \delta\psi_{i,k} = \delta\psi_{j,k} = \delta\psi_k$ , то выражение для выходной ФХ принимает компактный вид:

$$D_{\eta_{\omega}}(\delta\omega) \Big|_{\substack{\delta\psi'_i = \delta\psi'_j = 0 \\ \delta\psi_{i,k} = \delta\psi_{j,k} = \delta\psi_k}} = \frac{(2\Upsilon)^2}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ}^2 T^2 \rho^2(\delta\tau_k) M^3 \left( 1 + \frac{2\sigma_{IQ}^2}{\rho^2(\delta\tau_k) A_{IQ}^2 M} \right). \quad (2.72)$$

Для нахождения дисперсии шума эквивалентных наблюдений, поделим полученное выражение (2.72) на квадрат крутизны, задаваемой выражением (2.69), и запишем

$$D_{\tilde{\eta}_{\omega}}(0) = \frac{6}{qMT^2 \rho^2(\delta\tau_k)} \left( 1 + \frac{1}{qM \rho^2(\delta\tau_k)} \right). \quad (2.73)$$

Дисперсия шума эквивалентных наблюдений для упрощенного дискриминатора (2.64), представляющего собой сумму независимых частотных дискриминаторов  $M$  точек, определяется формулой

$$D_{\tilde{\eta}_{\omega,main}}(0) = \frac{6}{qMT^2 \rho^2(\delta\tau_k)} \left( 1 + \frac{1}{q\rho^2(\delta\tau_k)} \right). \quad (2.74)$$

Сравнение выражений (2.73) и (2.74) приводит к выводу о том, что дисперсии шумов эквивалентных наблюдений этих дискриминаторов при

нормальных и средних отношениях с/ш практически совпадают, в то время как при  $q \ll 1$  синтезированный дискриминатор обладает в  $M$  раз меньшей приведенной дисперсией.

Графики выигрыша по дисперсии шумов эквивалентных наблюдений за счет использования синтезированного дискриминатора с когерентным сложением сигналов различных РЧБ (2.59) вместо упрощенного дискриминатора (2.64) приведены на рисунке 37 при варьировании числа приемных точек при прочих равных условиях.

При  $M=3$  выигрыш более 1 дБ (около 12% по СКО) достигается при  $q$  менее 2.2, что при  $T = 20$  мс соответствует  $q_{c/n0}$  менее 20.5 дБГц, а при  $T = 5$  мс – 26.5 дБГц. Таким образом, практическая польза от синтезированного ДЧ будет достигаться только при условии, что при низких отношениях сигнал/шум удастся сохранить слежения за РФ. Если динамика вращения объекта такова, что слежение за РФ работает без срывов только при отношении сигнал/шум более 23-25 дБГц, то от использования синтезированного ДЧ можно отказаться в пользу упрощенного ДЧ (2.64).

Снижение дисперсии шумов эквивалентных наблюдений частоты за счет использования совместной обработки сигналов РЧБ различных антенн отображено на графиках на рисунке 38. Это отношение дисперсии (2.73) к ней же, но в случае обработки сигнала РЧБ только одной антенны ( $M = 1$ ).

Из графиков можно сделать вывод, что совместная обработка сигналов различных РЧБ позволяет существенно снизить дисперсию эквивалентных наблюдения частоты. Так, при использовании 2 антенн дисперсия снижается более чем в два раза, а при использовании 3 антенн – более чем в три раза.

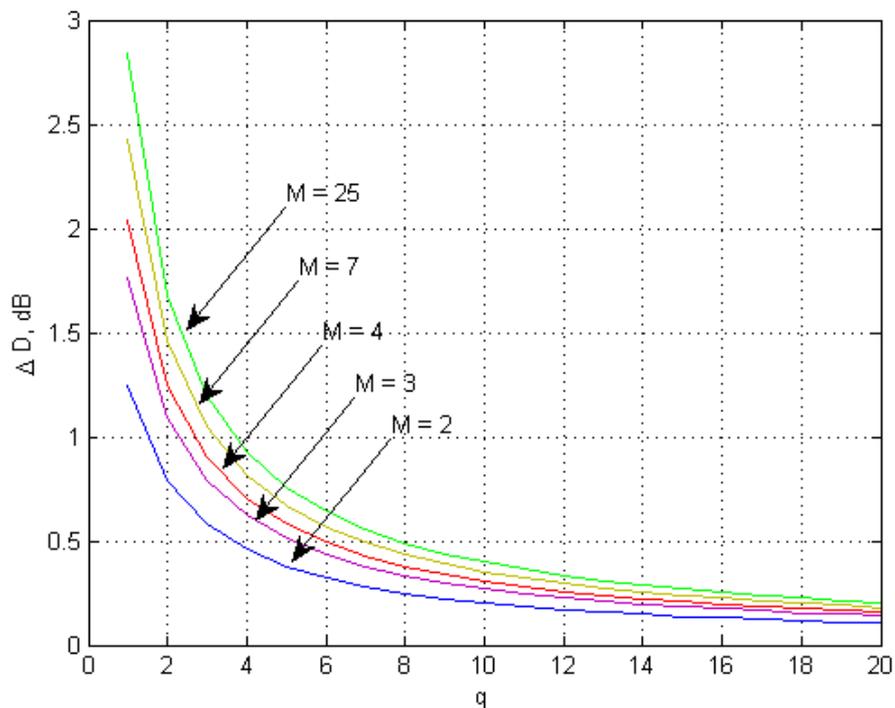


Рисунок 37. Снижение дисперсии эквивалентных наблюдений частоты и задержки за счет использования синтезированных дискриминаторов с когерентным сложением вместо дискриминаторов с некогерентным сложением

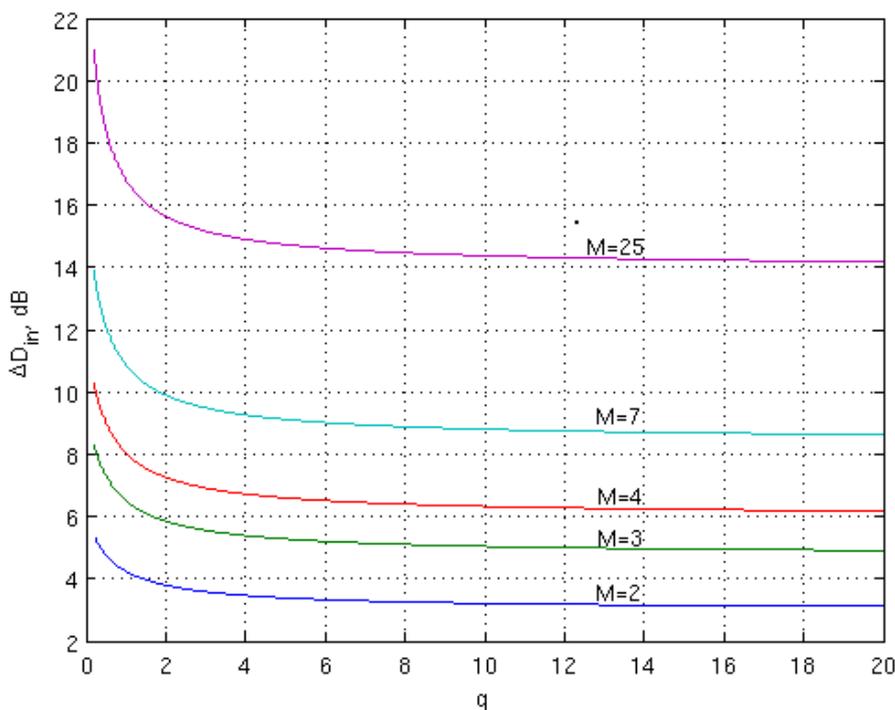


Рисунок 38. Снижение дисперсии эквивалентных наблюдений ДЧ и ДЗ за счет совместной обработки сигналов РЧБ

## Проверка аналитических результатов

Как и ранее, воспользуемся статистическим моделированием для проверки результатов аналитических расчетов. На рисунке 39 представлены графики дисперсии шумов эквивалентных наблюдений при  $T = 1$  мс,  $M = 3$ :

- аналитическая зависимость (2.73) для ДЧ (2.59),
- результат проведения статистических экспериментов для ДЧ (2.59),
- аналитическая зависимость (2.74) для ДЧ (2.64)

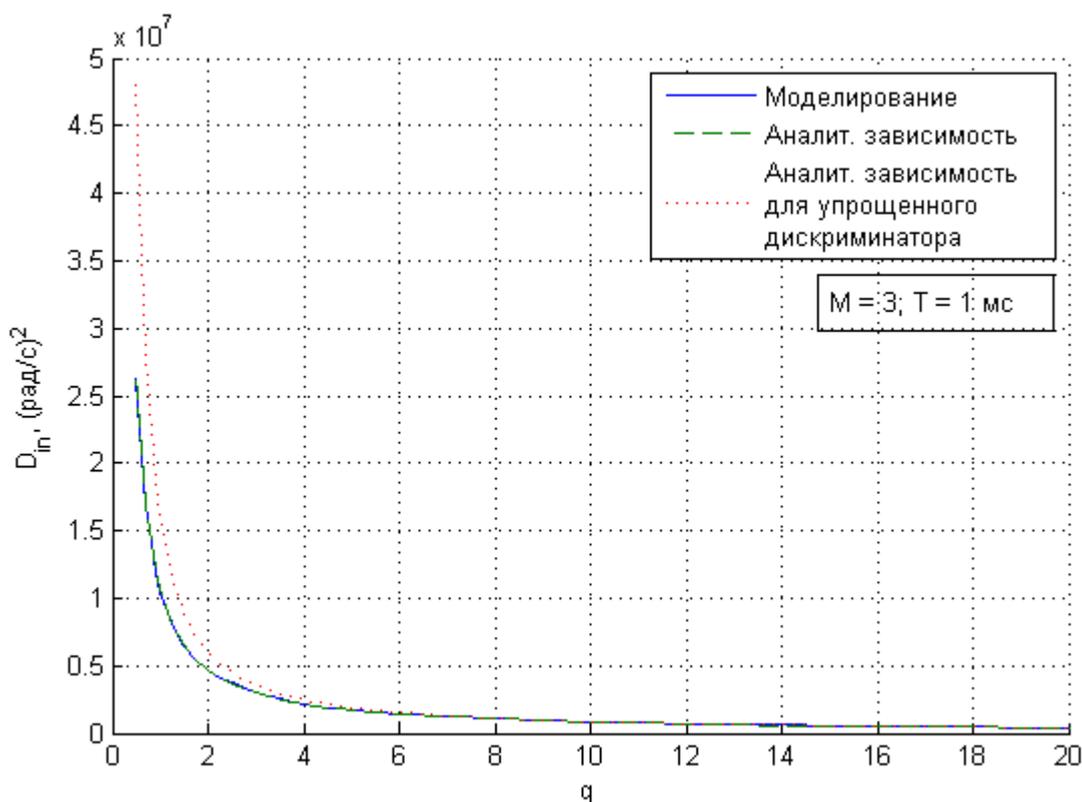


Рисунок 39. Аналитическая и экспериментальная зависимости дисперсии шумов эквивалентных наблюдений частоты

Проведенное статистическое моделирование не выявило отклонений экспериментальных данных от ожидаемых аналитических зависимостей.

## 2.5 Синтез и анализ дискриминатора задержки

### 2.5.1 Алгоритм дискриминатора задержки

В П.2.14 Приложения проведен синтез дискриминатора задержки (ДЗ) навигационных радиосигналов. Компонента векторного дискриминатора, соответствующая параметру  $\tau_k$  (см. схему на рисунке 40):

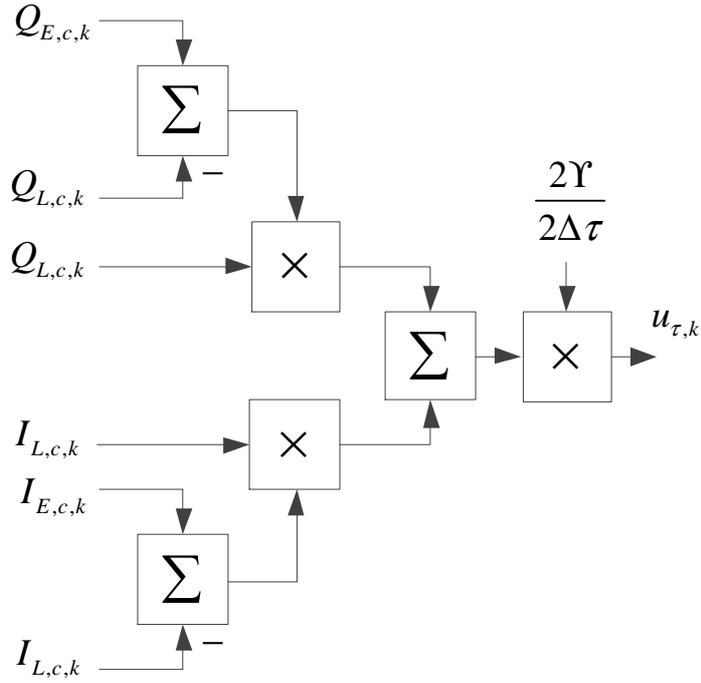


Рисунок 40. Структурная схема дискриминатора задержки

$$u_{\tau}(\tilde{\tau}_k) = 2\Upsilon \frac{(Q_{E,c,k} - Q_{L,c,k})Q_{c,k} + (I_{E,c,k} - I_{L,c,k})I_{c,k}}{2\Delta\tau}, \quad (2.75)$$

где  $I_{E,c,k}$ ,  $Q_{E,c,k}$  и  $I_{L,c,k}$ ,  $Q_{L,c,k}$  - опережающие и запаздывающие совместные квадратурные корреляционные суммы:

$$\begin{aligned} I_{E,c,k}(\tilde{\lambda}_k) &= \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) I_{E,m}(\tilde{\lambda}_k) - \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) Q_{E,m}(\tilde{\lambda}_k), \\ Q_{E,c,k}(\tilde{\lambda}_k) &= \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) Q_{E,m}(\tilde{\lambda}_k) + \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) I_{E,m}(\tilde{\lambda}_k), \\ I_{L,c,k}(\tilde{\lambda}_k) &= \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) I_{L,m}(\tilde{\lambda}_k) - \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) Q_{L,m}(\tilde{\lambda}_k), \\ Q_{L,c,k}(\tilde{\lambda}_k) &= \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) Q_{L,m}(\tilde{\lambda}_k) + \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) I_{L,m}(\tilde{\lambda}_k), \end{aligned} \quad (2.76)$$

где  $I_{E,m,k}$ ,  $Q_{E,m,k}$  и  $I_{L,m,k}$ ,  $Q_{L,m,k}$  - классические опережающие и запаздывающие корреляционные суммы для сигналов РЧБ  $m$ -ой антенны:

$$\begin{aligned}
I_{E,m}(\tilde{\lambda}_k) &= \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_{c,m}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k - \Delta\tau) \cos(\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)), \\
Q_{E,m}(\tilde{\lambda}_k) &= \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_{c,m}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k - \Delta\tau) \sin(\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)), \\
I_{L,m}(\tilde{\lambda}_k) &= \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_{c,m}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k + \Delta\tau) \cos(\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)), \\
Q_{L,m}(\tilde{\lambda}_k) &= \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_{c,m}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k + \Delta\tau) \sin(\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)).
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Индексы  $E$  и  $L$  – от англоязычных обозначений Early (ранняя) и Late (поздняя).

Выражение (2.75) описывает дискриминатор задержки дальномерного кода сигнала (фазы дальномерного кода). При  $M = 1$  совместные корреляционные суммы переходят в корреляционные суммы канала обработки сигнала с выхода РЧБ первой антенны, а выражение – в известное выражение для дискриминатора задержки некогерентного приемника [2]. В англоязычной литературе этот дискриминатор получил название “quasi-coherent dot product power discriminator” [5].

Как и ранее, совместные корреляционные суммы можно интерпретировать как результат корреляционной обработки сигналов с выхода РЧБ первой антенны, «подпитанный» сигналами остальных антенн. С помощью опорных параметров РФ производится выравнивание сигналов РЧБ остальных антенн с сигналом РЧБ первой и их когерентное сложение. Результат обрабатывается известным дискриминатором задержки. Дискриминатор хорошо выполняет свои функции, когда опорные параметры РФ близки к истинным РФ. Иначе, когерентное сложение может превратиться в сложение в противофазе.

Используя интерпретацию АФАР, описанную в п. 2.3.1, ДЗ (2.75) – известный в литературе дискриминатор задержки сигнала, принятого фазированной антенной решеткой, сфокусированной на НКА.

Если ССРФ по какой-то причине работает с большими ошибками или ненадежно, когерентное сложение можно заменить некогерентным. Как и в случае с ДЧ, произвести отдельный расчет дискриминационного отклика для корреляционных сумм сигналов РЧБ всех антенн, а затем сложить результат:

$$u_{\tau, \text{main}}(\tilde{\tau}_k) = 2\Upsilon \frac{\sum_{m=1}^M (I_{m,k} (I_{E,m,k} - I_{L,m,k}) + Q_{m,k} (Q_{E,m,k} - Q_{L,m,k}))}{2\Delta\tau}. \quad (2.78)$$

В матричном представлении дискриминатора (2.75) ДЗ (2.78) соответствует сумме элементов главной диагонали (см. П.2.14 Приложения), поэтому он в обозначении получил дополнительный признак “main”.

Структурная схема алгоритма вычисления корреляционных сумм (2.77) аналогична схеме, изображенной на рисунках 26, 27, с той разницей, что используются выходы генератора дальномерного кода  $G_{c,m}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k + \Delta\tau)$  или  $G_{c,m}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k - \Delta\tau)$  вместо  $G_{c,m}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k)$ .

### 2.5.2 Дискриминационная характеристика ДЗ

В П.2.15 Приложения изложен расчет ДХ для ДЗ. В общем случае ДХ задается выражением

$$\begin{aligned} U_{\tau}(\delta\lambda) &= M [u_{\tau}(\tilde{\tau}_k)] = \\ &= \frac{2\Upsilon}{2\Delta\tau} \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{a,b}\right) \cos(\delta\psi_{b,k} - \delta\psi_{a,k} + \alpha_{b,k} - \alpha_{a,k}) \times \\ &\times A_{IQ,k}^2 \text{sinc}(\alpha_{a,k}) \text{sinc}(\alpha_{b,k}) 2\rho(\delta\tau_k) (\rho(\delta\tau_k - \Delta\tau) - \rho(\delta\tau_k + \Delta\tau)). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Для упрощения формулы рассмотрим срез  $\forall a, b \in \{1..M\}: \delta\psi'_{a,k} = \delta\psi'_{b,k}, \delta\psi_{a,k} = \delta\psi_{b,k}$  (в частности равны нулю)  $\rightarrow \alpha_{a,k} = \alpha_{b,k} = \alpha_k$ :

$$\begin{aligned} U_{\tau}(\delta\lambda) \Big|_{\delta\psi'_a = \delta\psi'_b, \delta\psi_a = \delta\psi_b} &= M [u_{\tau}(\tilde{\tau}_k)] \Big|_{\delta\psi'_a = \delta\psi'_b; \delta\psi_a = \delta\psi_b} = \\ &= \frac{2\Upsilon}{2\Delta\tau} A_{IQ,k}^2 \text{sinc}^2(\alpha_k) \rho(\delta\tau_k) (\rho(\delta\tau_k - \Delta\tau) - \rho(\delta\tau_k + \Delta\tau)) M^2. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Выражение (2.80) описывает дискриминационную характеристику ДЗ (2.75). Крутизна дискриминационной характеристики (2.80) описывается выражением

$$S_{\tau} = \frac{M \left[ u_{\tau}(\delta\tau_k) \right]}{\delta\tau_k} \Bigg|_{\substack{\delta\psi'_a = \delta\psi'_b; \delta\psi_a = \delta\psi_b \\ \delta\omega=0; \delta\tau=0;}} = \frac{2\Upsilon}{2\Delta\tau} A_{IQ}^2 \frac{2}{\tau_y} M^2 \quad (2.81)$$

где  $\tau_y$  - длительность символа ПСП ДК навигационного радиосигнала СРНС.

Крутизна ДХ синтезированного ДЗ увеличивается как квадрат от числа используемых антенн и амплитуды сигнала.

ДХ упрощенного дискриминатора (2.78):

$$U_{\tau,main}(\delta\lambda) \Big|_{\delta\psi'_a = \delta\psi'_b, \delta\psi_a = \delta\psi_b} = M \left[ u_{\tau,main}(\tilde{\tau}_k) \right] \Big|_{\delta\psi'_a = \delta\psi'_b; \delta\psi_a = \delta\psi_b} = \quad (2.82)$$

$$= \frac{2\Upsilon}{2\Delta\tau} A_{IQ,k}^2 \text{sinc}^2(\alpha_k) \rho(\delta\tau_k) (\rho(\delta\tau_k - \Delta\tau) - \rho(\delta\tau_k + \Delta\tau)) M,$$

её крутизна

$$S_{\tau,main} = \frac{M \left[ u_{\tau,main}(\delta\tau_k) \right]}{\delta\tau_k} \Bigg|_{\substack{\delta\psi'_a = \delta\psi'_b; \delta\psi_a = \delta\psi_b \\ \delta\omega=0; \delta\tau=0;}} = \frac{2\Upsilon}{2\Delta\tau} A_{IQ}^2 \frac{2}{\tau_y} M. \quad (2.83)$$

#### *Проверка аналитических результатов*

На рисунке 41 представлены результаты статистического моделирования, проведенного с целью верифицировать дискриминационную характеристику синтезированного ДЗ. Для сравнения на рисунке приведены ожидаемые, согласно аналитическим исследованиям, аналитическая ДХ (2.80) и линейная функция с коэффициентом наклона, равным аналитическому значению крутизны ДХ (2.81).

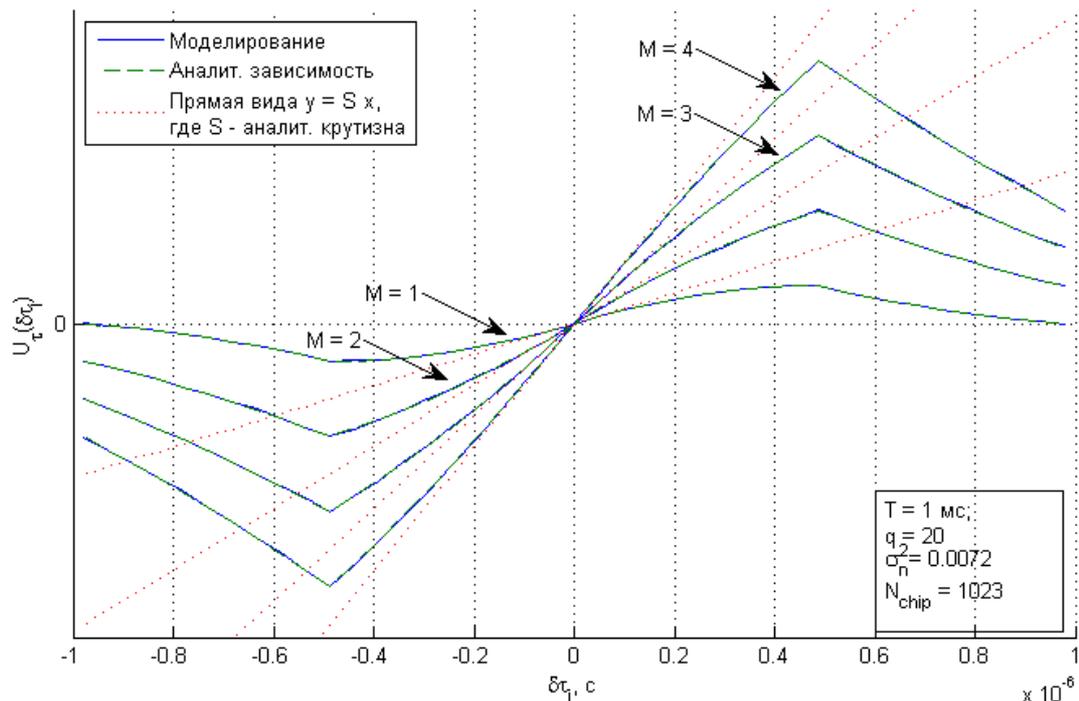


Рисунок 41. Дискриминационная характеристика и её крутизна для синтезированного ДЗ с когерентным сложением

Эксперименты проводились с использованием ДК сигнала С/А GPS и временем накопления  $T = 1$  мс.

Проведенные статистические эксперименты не выявили отклонений расчетных характеристик от характеристик, полученных моделированием. Подтверждается квадратичный рост крутизны с увеличением числа антенн.

Ширина апертуры ДХ составляет две длительности символа ДК принимаемого сигнала. Характеристика симметрична и имеет только одну выраженную точку равновесия.

### 2.5.3 Флуктуационная характеристика ДЗ

Расчет ФХ ДЗ проведен в П.2.16 Приложения. ФХ ДЗ (2.75) в точке истинных значений опорных параметров определяется формулой

$$D_{\eta_r}(0) = \left( \frac{2\Upsilon}{2\Delta\tau} \right)^2 2\sigma_{IQ}^2 (1 - \rho(2\Delta\tau)) A_{IQ}^2 M^3 \left( 1 + \frac{2\sigma_{IQ}^2}{A_{IQ}^2 M} \right). \quad (2.84)$$

Дисперсия шума эквивалентных наблюдений получается делением (2.84) на квадрат крутизны ДХ ДЗ:

$$D_{\tilde{\eta}_\tau}(0) = \frac{\Delta\tau\tau_y \left(1 + \frac{1}{qM}\right)}{2qM}. \quad (2.85)$$

Дисперсия шума эквивалентных наблюдений ДЗ с некогерентным сложением (2.78) описывается выражением

$$D_{\tilde{\eta}_\tau, main}(0) = \frac{\Delta\tau\tau_y \left(1 + \frac{1}{q}\right)}{2qM}. \quad (2.86)$$

Снижение дисперсии шума эквивалентных наблюдений за счет использования синтезированного ДЗ с когерентным сложением (2.75) по сравнению с ДЗ с некогерентным сложением (2.78) совпадает с аналогичными результатами для ДЧ (см. графики на рисунке 31). В точности как и снижение дисперсии эквивалентных наблюдений задержки за счет использования совместной обработки сигналов РЧБ различных антенн отображено на графиках на рисунке 38 и совпадает с аналогичными для ДЧ. Следовательно, выводы о преимуществах использования совместной обработки сигналов и применения когерентного/некогерентного сложения в дискриминаторах для ДЧ и ДЗ общие.

#### *Проверка аналитических результатов*

На рисунке 42 отображены результаты статистического моделирования синтезированного ДЗ ДК с когерентным сложением при воздействии шумов. Как и ранее, эксперименты проводились в соответствии со схемой, изображенной на рисунке 29.

Результаты моделирования хорошо согласуются с аналитическими зависимостями, противоречий не выявлено. Подтверждается ожидаемое снижение дисперсии эквивалентных наблюдений задержки с увеличением числа антенн УНАП.

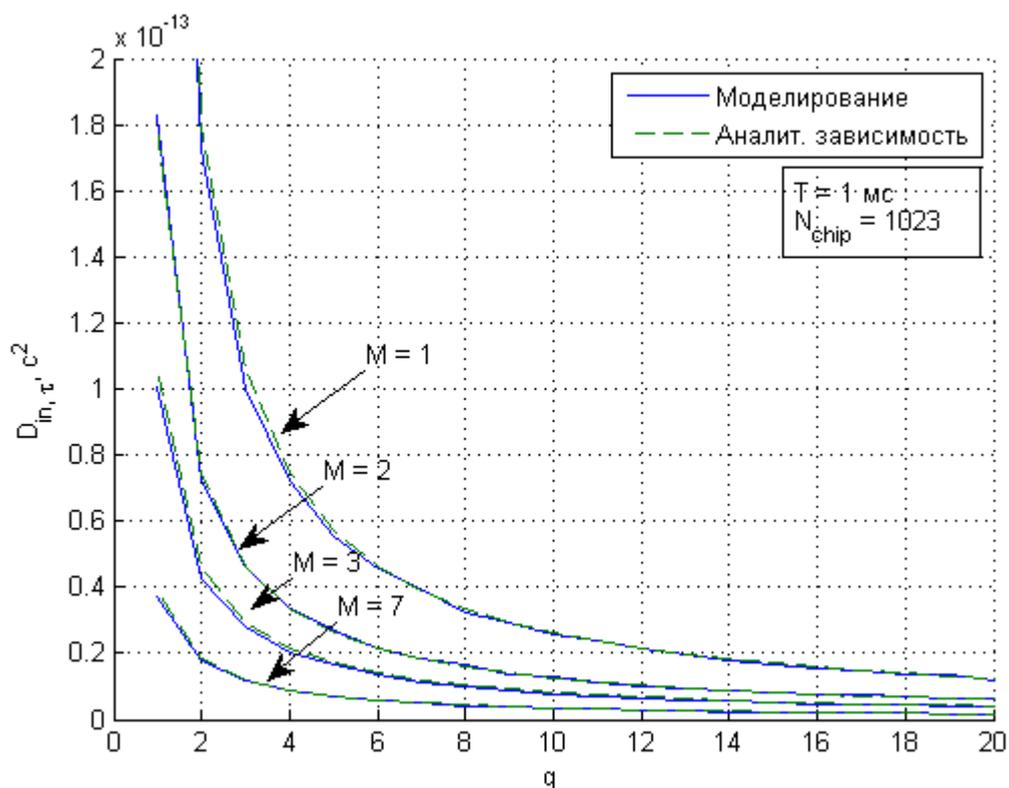


Рисунок 42. Аналитические и экспериментальные зависимости дисперсии эквивалентных наблюдений задержки

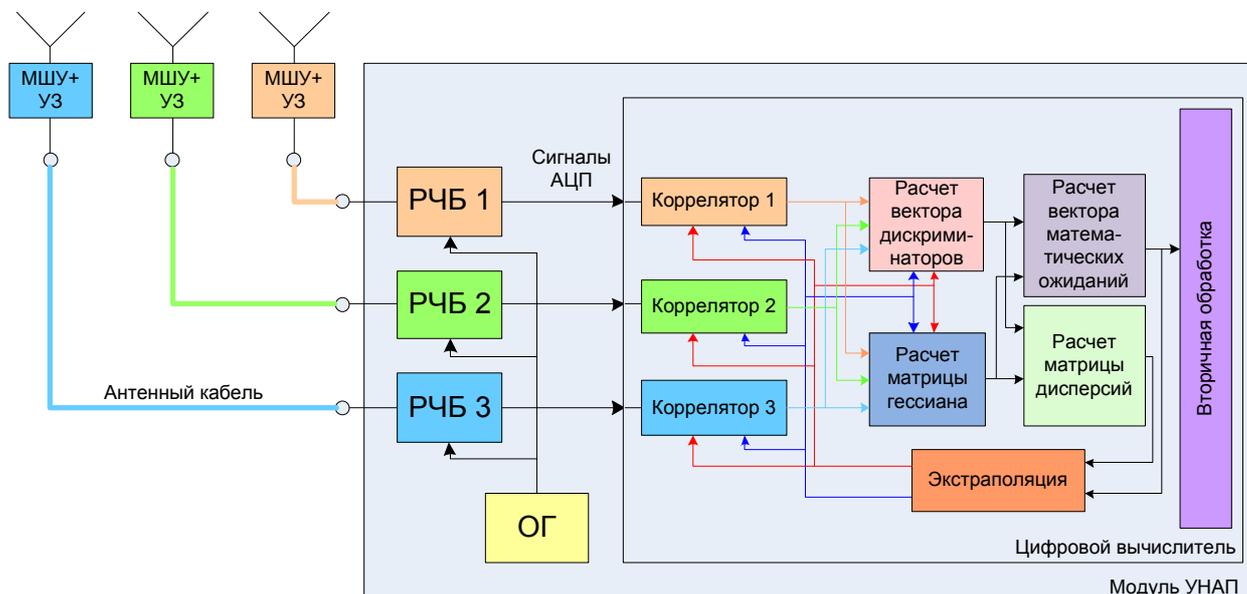


Рисунок 43. Структурная схема УНАП, реализующей квазиоптимальный алгоритм оценивания параметров сигналов промежуточной частоты

Как уже было сказано в начале главы, результаты преобразования выражений для остальных элементов градиента и гессиана логарифма функции правдоподобия опущены. Структурная схема УНАП, реализующей

квазиоптимальный алгоритм оценивания параметров сигналов ПЧ представлена на рисунке 43.

Результаты имитационного моделирования, включая сравнительный анализ различных алгоритмов обработки, приводится в Главе 3.

## 2.6 Пять шагов по упрощению квазиоптимального алгоритма фильтрации

Упростим квазиоптимальный алгоритм обработки навигационных сигналов (2.10) на основании дополнительных допущений. Принимаемые допущения не имеют строго математического обоснования и могут приводить к снижению характеристик точности, чувствительности, помехоустойчивости. Тем не менее, алгоритмы обработки сигналов большинства НАП успешно используют подобные упрощения. Последствия их применения далее проверяются моделированием.

### 2.6.1 Снижение размерности системы фильтрации за счет пренебрежения отдельными корреляционными связями

Выражения (2.10) задают рекурсивную систему фильтрации, формирующую требуемые измерения параметров сигналов промежуточной частоты. Проблема практической реализации такой системы – высокая размерность её вектора состояния  $\mathbf{x}_k$ . Напомним, вектор состояния  $\mathbf{x}_k$  в (1.24) вводится как:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \left| \mathbf{x}_{\psi 2,k}^T \quad \dots \quad \mathbf{x}_{\psi M,k}^T \quad \mathbf{x}_{\omega,k}^T \quad \tau_k \right|^T = \\ &= \left| \psi_{2,k} \quad \psi'_{2,k} \quad \psi''_{2,k} \quad \dots \quad \psi_{M,k} \quad \psi'_{M,k} \quad \psi''_{M,k} \quad \omega_k \quad \omega'_k \quad \tau_k \right|^T. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Если УНАП имеет 3 антенны, то вектор состояния состоит из 9 элементов, а матрица дисперсий ошибок фильтрации содержит 44 индивидуальных элемента (она симметричная).

Шаг к упрощению алгоритмов – пренебрежение корреляционной связью между  $\tau_k$ ,  $\mathbf{x}_{\omega,k}$ ,  $\mathbf{x}_{\psi 2,k}$  и  $\mathbf{x}_{\psi 3,k}$ . В квазиоптимальном алгоритме фильтрации (2.10)

это приводит к равенству нулю недиагональных элементов блочной матрицы дисперсий ошибок фильтрации. Упрощенный квазиоптимальный некогерентный алгоритм фильтрации в этом случае принимает вид отдельных алгоритмов меньшей размерности – ССЗ, ССЧ и двух (в общем случае  $M-1$ ) ССРФ:

$$\begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{\psi 2,k} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\psi 3,k} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\omega,k} \\ \tilde{\tau}_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{F}_{\psi 2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_{\psi 3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{F}_{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{\psi 2,k-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{\psi 3,k-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{\omega,k-1} \\ \hat{\tau}_{k-1} \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_{\psi 2,k} = \mathbf{F}_{\psi 2} \hat{\mathbf{x}}_{\psi 2,k-1} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\psi 3,k} = \mathbf{F}_{\psi 3} \hat{\mathbf{x}}_{\psi 3,k-1} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\omega,k} = \mathbf{F}_{\omega} \hat{\mathbf{x}}_{\omega,k-1} \\ \tilde{\tau}_k = \hat{\tau}_{k-1} \end{cases} \quad (2.88)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{\psi 2,k} \\ \hat{\mathbf{x}}_{\psi 3,k} \\ \hat{\mathbf{x}}_{\omega,k} \\ \hat{\tau}_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{\psi 2,k} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\psi 3,k} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\omega,k} \\ \tilde{\tau}_k \end{vmatrix} + \begin{matrix} \mathbf{D}_{\psi 2} & \mathbf{D}_{\psi 23} & \mathbf{D}_{\psi 2\omega} & \mathbf{D}_{\psi 2\tau} \\ \mathbf{D}_{\psi 23} & \mathbf{D}_{\psi 3} & \mathbf{D}_{\psi 3\omega} & \mathbf{D}_{\psi 3\tau} \\ \mathbf{D}_{\psi 2\omega} & \mathbf{D}_{\psi 3\omega} & \mathbf{D}_{\omega} & \mathbf{D}_{\omega\tau} \\ \mathbf{D}_{\psi 2\tau} & \mathbf{D}_{\psi 3\tau} & \mathbf{D}_{\omega\tau} & D_{\tau} \end{matrix} \begin{vmatrix} \mathbf{Grad}_{\psi 2,k} \\ \mathbf{Grad}_{\psi 3,k} \\ \mathbf{Grad}_{\omega,k} \\ u_{\tau,k} \end{vmatrix} + \mathbf{Hess}_x \left( \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{\psi 2,k} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\psi 3,k} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\omega,k} \\ \tilde{\tau}_k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{\psi 2,k} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\psi 3,k} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\omega,k} \\ \tilde{\tau}_k \end{vmatrix} \right) \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{\psi 2,k} &= \tilde{\mathbf{x}}_{\psi 2,k} + \mathbf{D}_{\psi 2,k} \left[ \mathbf{Grad}_{\psi 2,k} + \mathbf{Hess}_{\psi'2} \tilde{\psi}'_{2,k} \right] \\ \hat{\mathbf{x}}_{\psi 3,k} &= \tilde{\mathbf{x}}_{\psi 3,k} + \mathbf{D}_{\psi 3,k} \left[ \mathbf{Grad}_{\psi 2,k} + \mathbf{Hess}_{\psi'3} \tilde{\psi}'_{3,k} \right] \\ \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{x}}_{\omega,k} &= \tilde{\mathbf{x}}_{\omega,k} + \mathbf{D}_{\omega,k} \mathbf{Grad}_{\omega,k} \\ \hat{\tau}_k &= \tilde{\tau}_k + D_{\tau,k} u_{\tau,k} \end{aligned} \quad (2.90)$$

или в общем случае

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{\psi m,k} &= \tilde{\mathbf{x}}_{\psi m,k} + \mathbf{D}_{\psi m,k} \left[ \mathbf{Grad}_{\psi m,k} + \mathbf{Hess}_{\psi'm} \tilde{\psi}'_{m,k} \right], \quad m = 2..M, \\ \hat{\mathbf{x}}_{\omega,k} &= \tilde{\mathbf{x}}_{\omega,k} + \mathbf{D}_{\omega,k} \mathbf{Grad}_{\omega,k}, \\ \hat{\tau}_k &= \tilde{\tau}_k + D_{\tau,k} u_{\tau,k}, \end{aligned} \quad (2.91)$$

где под  $\mathbf{Hess}_{\psi'm}$  понимается соответствующий  $\tilde{\psi}'_{m,k}$  (т.е. второму элементу вектора  $\tilde{\mathbf{x}}_{\psi m,k}$ ) вектор-столбец гессиана  $\mathbf{Hess}_x$ , векторы  $\hat{\mathbf{x}}_{\omega,k}$  и  $\hat{\mathbf{x}}_{\psi m,k}$  являются фильтрационными оценками векторов состояния (1.21) и (1.22) соответственно:

$$\mathbf{x}_{\omega,k} = \left| \omega_k \quad \omega'_k \right|^T, \quad (2.92)$$

$$\mathbf{x}_{\psi m,k} = \left| \psi_{m,k} \quad \psi'_{m,k} \quad \psi''_{m,k} \right|^T, \quad m = 2..M, \quad (2.93)$$

для вектора опорных параметров  $\check{\mathbf{x}}_k$  остается в силе представление (2.12),

векторы  $\mathbf{Grad}_{\psi m,k}$  определяются выражением

$$\mathbf{Grad}_{\psi m,k} = \left| u_{\psi m,k} \quad u_{\psi' m,k} \quad 0 \right|^T, \quad u_{\psi' m,k} = \frac{\partial}{\partial \psi'_{m,k}} \ln L_k(\check{\mathbf{x}}_k), \quad m = 2..M, \quad (2.94)$$

а вектор  $\mathbf{Grad}_{\omega,k}$

$$\mathbf{Grad}_{\omega,k} = \left| u_{\omega,k} \quad 0 \right|^T. \quad (2.95)$$

Аналогично для расчета матриц дисперсий ошибок фильтрации:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi m,k}^{-1} &= \mathbf{D}_{\check{\mathbf{x}}\psi m,k}^{-1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{\psi m,k}} \left( \frac{\partial \ln L_k(\check{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}_{\psi m,k}} \right)^T, \quad \mathbf{D}_{\check{\mathbf{x}}\psi m,k} = \mathbf{F}_{\psi} \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi m,k-1} \mathbf{F}'_{\psi} + \mathbf{G}_{\psi} D_{\xi_{\psi}} \mathbf{G}'_{\psi}, \\ \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k}^{-1} &= \mathbf{D}_{\check{\mathbf{x}}\omega,k}^{-1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{\omega,k}} \left( \frac{\partial \ln L_k(\check{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}_{\omega,k}} \right)^T, \quad \mathbf{D}_{\check{\mathbf{x}}\omega,k} = \mathbf{F}_{\omega} \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1} \mathbf{F}'_{\omega} + \mathbf{G}_{\omega} D_{\xi_{\omega}} \mathbf{G}'_{\omega}, \\ D_{\tau,k}^{-1} &= D_{\check{\tau},k}^{-1} - \frac{\partial^2 \ln L_k(\check{\mathbf{x}}_k)}{\partial \tau_k^2}, \quad D_{\check{\tau},k} = D_{\hat{\tau},k-1} + D_{\xi_{\tau}}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Напомним, что векторы и матрицы  $\mathbf{G}_{\psi}$ ,  $\mathbf{G}_{\omega}$ ,  $\mathbf{F}_{\psi}$ ,  $\mathbf{F}_{\omega}$  определяются выражениями (1.21), (1.22).

Таким образом, при принятом упрощении комплексная система фильтрации (2.10) с перекрестными связями между выходами всех дискриминаторов распалась на  $M + 1$  следящие системы. Следует заметить, что системы слежения не являются полностью независимыми. Для расчета отсчетов каждого из дискриминаторов используются экстраполированные оценки с выходов каждой из систем.

### 2.6.2 Упрощение ССРФ за счет пренебрежения коррекцией гессианом

Представление (2.91) отличается от привычного вида расширенного фильтра Калмана разложением корректирующей функции на дискриминатор

(градиент логарифма функции правдоподобия) и корректирующий гессиан (матрица вторых производных функций правдоподобия). Можно пренебречь корректирующими слагаемыми гессиана, тогда выражения для вектора математических ожиданий ССРФ принимают вид:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\psi m, k} = \tilde{\mathbf{x}}_{\psi m, k} + \mathbf{D}_{\psi m, k} \mathbf{Grad}_{\psi m}, m = 2..M. \quad (2.97)$$

Пренебрежение элементами гессиана в корректирующей функции приводит к смещению оценок, зависящему от производной РФ. Компенсировать это смещение позволяет инженерный прием, часто применяемый в алгоритмах обработки НАП. При расчете мгновенных РФ следует оценки (2.97) интерпретировать не как параметры кусочно-линейной аппроксимации функции мгновенных РФ, а как среднее значение на РФ  $k$ -м интервале. Подробнее о расчете мгновенных РФ в этом случае изложено ниже, в параграфе, посвященном моделированию алгоритмов.

### 2.6.3 Упрощение ССРФ за счет пренебрежения дискриминатором производной РФ

Как отмечалось ранее, общепринятой практикой при построении НАП является пренебрежение дискриминаторами производных, если используются дискриминаторы их первообразных. Связано это с тем, что дискриминаторы производных, при построении их на тех же корреляционных суммах, что и дискриминаторов первообразных, вносят пренебрежимо малый вклад в улучшение точности слежения [2]. Аналогичная ситуация имеет место и с дискриминаторами производных разностей фаз, исключим их из структуры фильтров, приняв равными нулю:

$$\left( \mathbf{Grad}_{\psi m} \right)_2 = u_{\psi', m} = 0. \quad (2.98)$$

Т.к. третий компонент  $\mathbf{Grad}_{\psi m}$  равен нулю согласно (2.94), то выражения (2.91) с учетом (2.97) упрощаются:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{\psi m,k} &= \tilde{\mathbf{x}}_{\psi m,k} + \tilde{\mathbf{K}}_{\psi m,k} u_{\psi m,k}, \quad m = 2..M, \\
\hat{\mathbf{x}}_{\omega,k} &= \tilde{\mathbf{x}}_{\omega,k} + \tilde{\mathbf{K}}_{\omega,k} u_{\omega,k}, \\
\hat{\tau}_k &= \tilde{\tau}_k + \tilde{K}_{\tau,k} u_{\tau,k},
\end{aligned} \tag{2.99}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{K}}_{\psi m,k} &= \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{D}_{\psi m,k})_{11} & (\mathbf{D}_{\psi m,k})_{21} & (\mathbf{D}_{\psi m,k})_{31} \end{array} \right|^T \\
\tilde{\mathbf{K}}_{\omega,k} &= \left| \begin{array}{cc} (\mathbf{D}_{\omega,k})_{11} & (\mathbf{D}_{\omega,k})_{21} \end{array} \right|^T, \quad \tilde{K}_{\tau,k} = D_{\tau,k}
\end{aligned} \tag{2.100}$$

- первые столбцы соответствующих матриц дисперсий ошибок фильтрации.

Как и в случае с отброшенными элементами гессиана, приближение (2.99) приводит к меньшему увеличению погрешности, если интерпретировать результаты оценивания как средние значения РФ на  $k$ -м интервале.

#### 2.6.4 Использование эквивалентных наблюдений дискриминаторов

В уравнениях квазиоптимальной фильтрации эволюция коэффициентов (2.100) зависит от наблюдаемых процессов (см. (2.10)). Это требует пересчета матричных уравнений для дисперсии ошибок фильтрации на каждом такте работы, что приводит к большим вычислительным затратам.

Устранить данный недостаток можно, если использовать методику синтеза с использованием эквивалентных наблюдений [2, 22, 23]. В этом случае применяется допущение о том, что выходной сигнал дискриминатора может быть представлен как:

$$\begin{aligned}
u_{\lambda,j} &= S_{\lambda,j} (\lambda_{eq,j,k} - \tilde{\lambda}_{j,k}), \\
\lambda_{eq,j,k} &= \lambda_{j,k} + \tilde{\eta}_{\lambda_j},
\end{aligned} \tag{2.101}$$

где  $\lambda_{eq,j,k}$  называют эквивалентным наблюдением,  $\tilde{\eta}_{\lambda_j}$  принимают за БГШ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $D_{\tilde{\eta}_{\lambda_j}}$  равной дисперсии шума эквивалентных наблюдений ((2.56) для ДРФ, (2.73) для ДЧ, (2.85) для ДЗ), то есть дисперсии шума на выходе дискриминатора, поделенной на

квадрат крутизны  $S_{\lambda,j}$  дискриминационной характеристики дискриминатора,  $S_{\lambda,j}$  - крутизна ДХ дискриминатора в точке истинных значений ((2.49) для ДРФ, (2.69) для ДЧ, (2.81) для ДЗ).

С учетом (2.99) под  $\lambda_j$  следует понимать  $\psi_m$ ,  $\omega$  или  $\tau$ .

Если выполняется (2.101), то логарифм функции правдоподобия для эквивалентного наблюдения может быть записан как

$$\ln L_{eq,j,k} = C - \frac{(\lambda_{eq,j,k} - \check{\lambda}_{j,k})^2}{2D_{\check{\eta}}}, \quad (2.102)$$

его производная

$$u_{eq,\lambda,j} = \frac{\partial \ln L_{eq,j,k}(\check{\lambda}_{j,k})}{\partial \lambda_{j,k}} = \frac{\lambda_{eq,j,k} - \check{\lambda}_{j,k}}{D_{\check{\eta}}} = \frac{1}{D_{\check{\eta}}} \frac{u_{\lambda,j}}{S_{\lambda,j}}. \quad (2.103)$$

Из выражения (2.103), в частности, следует, что если дискриминатор квазиоптимальной системы оценивания представим в линейном виде (2.101), то его дисперсия шумов эквивалентных наблюдений есть обратная величина крутизны ДХ, а его выходная ФХ совпадает с крутизной ДХ [23].

В дальнейшем будем использовать представление (2.103).

Кусочные гессианы логарифма функции правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{\psi m,k}} \left( \frac{\partial \ln L_{eq,k}(\check{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}_{\psi m,k}} \right)^T = \begin{vmatrix} -D_{\check{\eta}\psi}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (2.104)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{\omega,k}} \left( \frac{\partial \ln L_{eq,k}(\check{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}_{\omega,k}} \right)^T = \begin{vmatrix} -D_{\check{\eta}\omega}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (2.105)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_{eq,k}(\check{\mathbf{x}}_k)}{\partial \tau_k^2} = -D_{\check{\eta}\tau}^{-1}. \quad (2.106)$$

Определим выражения для коэффициентов (2.100) с учетом выражений (2.104), (2.105), (2.106) при использовании в качестве дискриминаторов (2.103).

Коэффициенты ССЗ (коэффициенты дискретного фильтра первого порядка)

Дисперсия экстраполяционной ПВ:

$$D_{\hat{\tau},k} = D_{\hat{\tau},k-1} + D_{\xi_{\tau}} \quad (2.107)$$

Дисперсия оценки  $\tau$ , она же коэффициент при ДЗ в ССЗ при дискриминаторе (2.103):

$$K_{eq,\tau,k} = D_{\tau,k} = \frac{1}{\frac{1}{D_{\hat{\tau},k-1} + D_{\xi_{\tau}}} + 1/D_{\hat{\eta}\tau}} = D_{\hat{\eta}\tau} \frac{D_{\hat{\tau},k-1} + D_{\xi_{\tau}}}{D_{\hat{\eta}\tau} + D_{\hat{\tau},k-1} + D_{\xi_{\tau}}}. \quad (2.108)$$

Коэффициенты ССЧ (коэффициенты дискретного фильтра второго порядка)

Необходимые преобразования для определения выражений коэффициентов ССЧ и ССРФ проведены в П.2.17 Приложения. Приведем результаты.

Элементы матрицы дисперсии ошибок фильтрации, они же коэффициенты ССЧ при дискриминаторе (2.103):

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{K}}_{\omega,k})_1 &= (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k})_{11} = D_{\hat{\eta}\omega} \frac{(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{11} + 2(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{21} T + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{22} T^2}{D_{\hat{\eta}\omega} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{11} + 2(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{21} T + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{22} T^2}, \\ (\tilde{\mathbf{K}}_{\omega,k})_2 &= (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k})_{21} = D_{\hat{\eta}\omega} \frac{(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{21} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{22} T}{D_{\hat{\eta}\omega} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{11} + 2(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{21} T + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{22} T^2}, \end{aligned} \quad (2.109)$$

где

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k})_{22} &= \frac{A}{D_{\hat{\eta}\omega} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{11} + 2(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{21} T + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{22} T^2}, \\ A &= \left( D_{\hat{\eta}\omega} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{11} + 2(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{21} T + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{22} T^2 \right) \times \\ &\quad \times \left( (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{22} + D_{\xi_{\omega}} \right) - \left( (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{21} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega,k-1})_{22} T \right)^2 \end{aligned} \quad (2.110)$$

- дисперсия ошибки оценок производной частоты.

### Коэффициенты ССРФ

Элементы матрицы дисперсий ошибок фильтрации, они же коэффициенты ССРФ при дискриминаторе РФ:

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathbf{K}}_{\psi,k}\right)_1 &= \left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)_{11} = \\ &= \frac{\det\left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)\left(EK - F^2\right)}{\left(A + D_{\hat{\eta}\psi}^{-1} \det\left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)\right)\left(EK - F^2\right) + B(CF - BK) + C(BF - CE)}, \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathbf{K}}_{\psi,k}\right)_2 &= \left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)_{21} = \\ &= \frac{\det\left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)(CF - BK)}{\left(A + D_{\hat{\eta}\psi}^{-1} \det\left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)\right)\left(EK - F^2\right) + B(CF - BK) + C(BF - CE)}, \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathbf{K}}_{\psi,k}\right)_3 &= \left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)_{31} = \\ &= \frac{\det\left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)(BF - CE)}{\left(A + D_{\hat{\eta}\psi}^{-1} \det\left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)\right)\left(EK - F^2\right) + B(CF - BK) + C(BF - CE)}, \end{aligned} \quad (2.113)$$

где

$$\left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)_{22} = \frac{\det\left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)\left(\left(A + D_{\hat{\eta}\psi}^{-1} \det\left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)\right)K - C^2\right)}{\left(A + D_{\hat{\eta}\psi}^{-1} \det\left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)\right)\left(EK - F^2\right) + B(CF - BK) + C(BF - CE)}, \quad (2.114)$$

$$\left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)_{32} = \frac{\det\left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)\left(CB - \left(A + D_{\hat{\eta}\psi}^{-1} \det\left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)\right)F\right)}{\left(A + D_{\hat{\eta}\psi}^{-1} \det\left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)\right)\left(EK - F^2\right) + B(CF - BK) + C(BF - CE)}, \quad (2.115)$$

$$\left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)_{33} = \frac{\det\left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)\left(\left(A + D_{\hat{\eta}\psi}^{-1} \det\left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)\right)E - B^2\right)}{\left(A + D_{\hat{\eta}\psi}^{-1} \det\left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)\right)\left(EK - F^2\right) + B(CF - BK) + C(BF - CE)}, \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned} A &= \left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)_{22} \left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)_{33} - \left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)_{32}^2, \\ B &= \left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)_{32} \left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)_{31} - \left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)_{21} \left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)_{33}, \\ C &= \left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)_{21} \left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)_{32} - \left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)_{22} \left(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi,k}\right)_{31}, \end{aligned} \quad (2.117)$$

$$\begin{aligned}
E &= \left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right)_{11} \left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right)_{33} - \left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right)_{31}^2, \\
F &= \left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right)_{31} \left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right)_{21} - \left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right)_{11} \left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right)_{32}, \\
K &= \left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right)_{11} \left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right)_{22} - \left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right)_{21}^2,
\end{aligned} \tag{2.118}$$

детерминант матрицы дисперсий ошибок экстраполяции

$$\det \left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right) = \left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right)_{11} A + \left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right)_{21} B + \left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right)_{31} C. \tag{2.119}$$

а её элементы

$$\begin{aligned}
\left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right)_{11} &= \left( \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi, k-1} \right)_{11} + 2 \left( \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi, k-1} \right)_{21} T + \left( \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi, k-1} \right)_{22} T^2, \\
\left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right)_{21} &= \left( \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi, k-1} \right)_{21} + \left( \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi, k-1} \right)_{31} T + \left( \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi, k-1} \right)_{22} T + \left( \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi, k-1} \right)_{32} T, \\
\left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right)_{31} &= \left( \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi, k-1} \right)_{31} + \left( \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi, k-1} \right)_{32} T, \\
\left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right)_{22} &= \left( \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi, k-1} \right)_{22} + 2 \left( \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi, k-1} \right)_{32} T + \left( \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi, k-1} \right)_{33} T^2, \\
\left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right)_{32} &= \left( \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi, k-1} \right)_{32} + \left( \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi, k-1} \right)_{33} T, \\
\left( \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\psi, k} \right)_{33} &= \left( \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\psi, k-1} \right)_{33} + D_{\xi\psi}.
\end{aligned} \tag{2.120}$$

Рекурсивные уравнения фильтрации с использованием эквивалентных наблюдений принимают вид:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{\psi m, k} &= \tilde{\mathbf{x}}_{\psi m, k} + \mathbf{K}_{\psi, k} u_{\psi m, k} / S_{\psi}, \\
\hat{\mathbf{x}}_{\omega, k} &= \tilde{\mathbf{x}}_{\omega, k} + \mathbf{K}_{\omega, k} u_{\omega, k} / S_{\omega}, \\
\hat{\tau}_k &= \tilde{\tau}_k + K_{\tau, k} u_{\tau, k} / S_{\tau},
\end{aligned} \tag{2.121}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\psi, k} &= \tilde{\mathbf{K}}_{\psi, k} / D_{\tilde{\eta}\psi}, \\
\mathbf{K}_{\omega, k} &= \tilde{\mathbf{K}}_{\omega, k} / D_{\tilde{\eta}\omega}, \\
K_{\tau, k} &= \tilde{K}_{\tau, k} / D_{\tilde{\eta}\tau}.
\end{aligned} \tag{2.122}$$

При записи (2.121) учтено, что  $D_{\tilde{\eta}\psi} = S_{\psi}^{-1}$ ,  $D_{\tilde{\eta}\omega} = S_{\omega}^{-1}$ ,  $D_{\tilde{\eta}\tau} = S_{\tau}^{-1}$ .

### 2.6.5 Использование постоянных коэффициентов

Дисперсионные уравнения с течением времени стремятся к установившемуся значению. Поэтому в большинстве приложений теории

оптимальной фильтрации к НАП [2, 22] в алгоритме квазиоптимальной фильтрации используют установившиеся значения весовых коэффициентов, пренебрегая оптимизацией характеристик системы на время переходного процесса. Чтобы результаты диссертационного исследования имели большую практическую значимость, описание итоговой структуры и моделирование приведено для случая постоянных весовых коэффициентов.

Элементы матриц дисперсией ошибок фильтрации в установившемся режиме находятся из условия:

$$D_{\tau,k-1} = D_{\tau,k}, \mathbf{D}_{\hat{x}\omega,k-1} = \mathbf{D}_{\hat{x}\omega,k}, \mathbf{D}_{\hat{x}\psi m,k-1} = \mathbf{D}_{\hat{x}\psi m,k-1}. \quad (2.123)$$

Например, для системы первого порядка дисперсионные уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} D_{\hat{\tau},k-1} &= D_{\hat{\eta}\tau} \frac{D_{\hat{\tau},k-1} + D_{\xi\tau}}{D_{\hat{\eta}\tau} + D_{\hat{\tau},k-1} + D_{\xi\tau}} \rightarrow \\ D_{\hat{\tau},k-1} D_{\hat{\eta}\tau} + D_{\hat{\tau},k-1}^2 + D_{\hat{\tau},k-1} D_{\xi\tau} &= D_{\hat{\eta}\tau} D_{\hat{\tau},k-1} + D_{\hat{\eta}\tau} D_{\xi\tau} \rightarrow \\ D_{\hat{\tau},k-1}^2 + D_{\hat{\tau},k-1} D_{\xi\tau} - D_{\hat{\eta}\tau} D_{\xi\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (2.124)$$

Корни уравнения (2.124)

$$D_{\hat{\tau}} = \frac{-D_{\xi\tau} + \sqrt{D_{\xi\tau}^2 + 4D_{\hat{\eta}\tau}D_{\xi\tau}}}{2} = D_{\xi\tau} \frac{\sqrt{1 + 4\frac{D_{\hat{\eta}\tau}}{D_{\xi\tau}} - 1}}{2}. \quad (2.125)$$

Тогда искомым весовой коэффициент равен

$$K_{\tau} = \frac{D_{\hat{\tau}}}{D_{\hat{\eta}\tau}} = \frac{D_{\xi\tau}}{D_{\hat{\eta}\tau}} \frac{\sqrt{1 + 4\frac{D_{\hat{\eta}\tau}}{D_{\xi\tau}} - 1}}{2}. \quad (2.126)$$

Для систем второго и третьего порядка выражения громоздки, определять коэффициенты установившегося режима проще итеративно – приняв

$$\mathbf{K}_{\psi,k} \approx \mathbf{K}_{\psi,ks}, \mathbf{K}_{\omega,k} \approx \mathbf{K}_{\omega,ks}, ks = 10..20. \quad (2.127)$$

Если темп работы высок (длительность одного шага значительно меньше 20 мс), то для установившихся значений матриц дисперсий ошибок фильтрации

можно использовать аналитические выражения из [2]. Они получаются при решении дисперсионных уравнений в непрерывном времени.

Итоговые выражения для реализации упрощенного квазиоптимального некогерентного алгоритма оценки задержки, частоты и разности фаз сигналов (УКА), принимаемых на множестве пространственно разнесенных точек, принимают вид:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\psi m,k} = \tilde{\mathbf{x}}_{\psi m,k} + \mathbf{K}_{\psi} u_{\psi m,k} / S_{\psi} \quad (2.128)$$

- система слежения за разностью фаз сигналов РЧБ m-ой и 1-ой антенн,

$$\hat{\mathbf{x}}_{\omega,k} = \tilde{\mathbf{x}}_{\omega,k} + \mathbf{K}_{\omega,k} u_{\omega,k} / S_{\omega} \quad (2.129)$$

- система слежения за частотой,

$$\hat{\tau}_k = \tilde{\tau}_k + K_{\tau,k} u_{\tau,k} / S_{\tau} \quad (2.130)$$

- система слежения за задержкой.

Схема УНАП, реализующей данный алгоритм, приведена на рисунке 44.

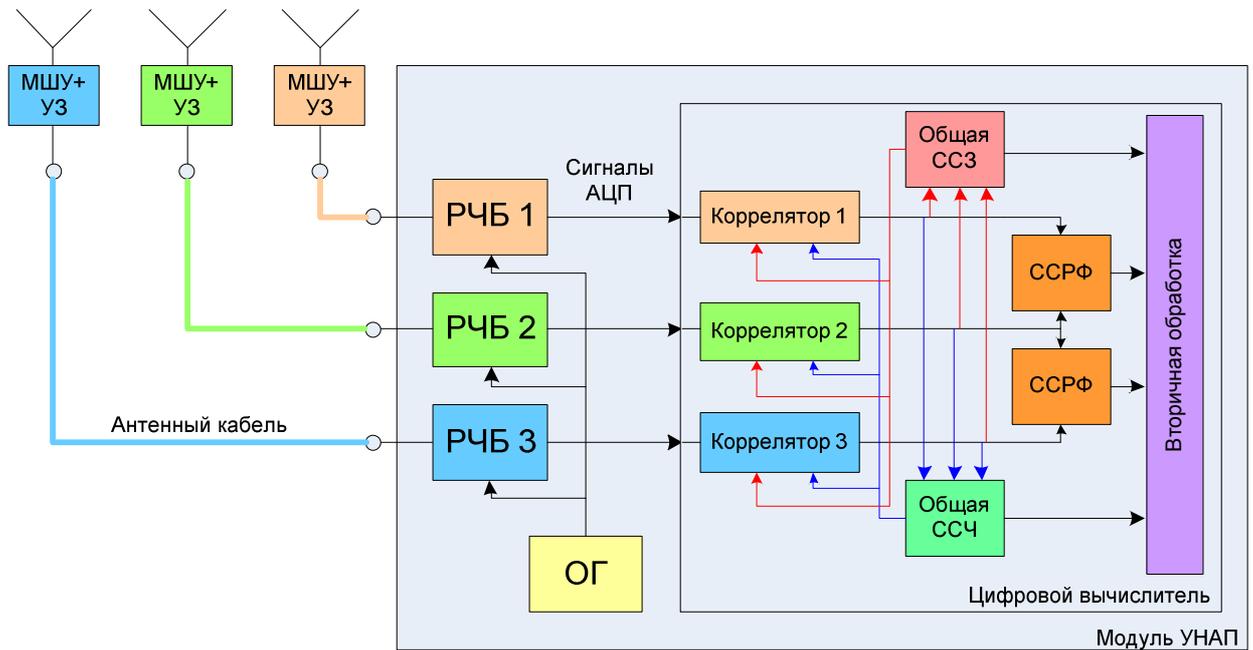


Рисунок 44. Схема УНАП, реализующей упрощенный квазиоптимальный алгоритм оценивания параметров сигналов промежуточной частоты (на примере трехантенной УНАП)

На устройство УНАП, реализующей фильтрационные алгоритмы (2.128)-(2.130), получены патенты РФ [35, 36].

Относительно параметров шумов эквивалентных наблюдений  $\psi_m$ ,  $\omega$  или  $\tau$  рекурсивные алгоритмы (2.128), (2.129), (2.130) являются линейными цифровыми фильтрами с постоянными коэффициентами. Важная характеристика этих линейных систем – шумовая полоса пропускания [2, 53], которая определяется через коэффициенты (2.126), (2.127) как

$$\Delta f = \frac{Num}{2T(K_1K_2T - K_3T^2)(K_3T^2 - 2K_2T - 4K_1 + 8)},$$

$$Num = 4K_1^2K_2T - 6K_1K_2^2T^2 + 7K_1K_2K_3T^3 - 2K_1K_3^2T^4 -$$

$$- 4K_1K_3T^2 + 4K_2^2T^2 - 4K_2K_3T^3 + K_3^2T^4. \quad (2.131)$$

Доказательство выражения (2.131) объемно, поэтому в работе опущено.

Полоса систем второго и третьего порядка получается из общего выражения при обнулении старших коэффициентов. Например, шумовая полоса пропускания ССЗ получается из общего выражения при принятии второго и третьего коэффициента равными нулю:

$$\Delta f_1 = \frac{K_\tau}{4T - 2K_\tau T}. \quad (2.132)$$

## 2.7 Выводы по главе

Практически реализуемые алгоритмы обработки навигационных сигналов позволяет получить допущение о нормальности апостериорной ПВ вектора состояния. Такие алгоритмы принято называть квазиоптимальными. В литературе описаны алгоритмы квазиоптимального оценивания вектора состояния в гауссовом приближении с разложением нелинейных функций в точке экстраполированных значений вектора состояния. В работе же получен квазиоптимальный алгоритм оценивания вектора состояния в гауссовом приближении при использовании разложения нелинейных функций в другой точке, названной «опорной». Опорная точка определяет параметры опорных сигналов коррелятора, а её выбор становится привилегией разработчика.

Общие результаты синтеза квазиоптимального алгоритма оценивания применены для получения некогерентных алгоритмов оценки параметров

сигналов промежуточной частоты, принятых на множестве пространственно разнесенных точек. Эти алгоритмы позволяют, с одной стороны, проводить прямую оценку разности фаз сигналов, а, с другой, реализовывать некогерентную обработку, исключаящую оценку «общей» фазы сигналов, принимаемых всеми антенными элементами. Опорная точка алгоритмов в работе выбрана так, что опорные сигналы всех корреляторов в каналах обработки одного НКА совпадают, что существенно упрощает реализацию алгоритмов.

Для многомерной нормальной апостериорной ПВ оценки по критериям минимума среднего риска как при простой, так и при квадратичной функциях потерь, совпадают. Поэтому синтезированный квазиоптимальный алгоритм соответствует обоим критериям оптимальности.

Подробно приведены результаты синтеза и анализа основных дискриминаторов – дискриминатора задержки, дискриминатора частоты и дискриминатора разности фаз.

Полученный алгоритм дискриминатора разности фаз нетривиален, ранее не описывался в литературе. Для формирования дискриминационного отсчета в нем используются наблюдения сигналов из всех доступных приемных точек, что позволяет снизить дисперсию его эквивалентных наблюдений. Его дискриминационная характеристика периодична, период равен одному циклу фазы. Таким образом, формируемые оценки разности фаз имеют неопределенность с шагом в  $2\pi$ .

Алгоритмы дискриминаторов частоты и задержки можно рассматривать как известные дискриминаторы, сигнал на вход которых поступает от специального алгоритма, производящего фокусировку диаграммы направленности антенной системы УНАП на НКА на основании экстраполяций разностей фаз синтезированного алгоритма. Отсюда сделан вывод о том, что характеристики помехоустойчивости синтезированного алгоритма зависят от направления прихода помехи.

Для синтезированных дискриминаторов частоты, задержки и разности фаз получены аналитические выражения для расчета дискриминационных характеристик и дисперсий шумов на выходе дискриминаторов.

Приведены краткие результаты моделирования, подтверждающие достоверность аналитических формул для дискриминационных и флуктуационных характеристик.

Разработан ориентированный на практическую реализацию в УНАП некогерентный алгоритм оценки задержки, частоты и разностей фаз сигналов промежуточной частоты. Алгоритм основан на квазиоптимальном алгоритме оценки соответствующих параметров сигналов при следующих дополнительных допущениях: пренебрежение отдельными корреляционными связями между оцениваемыми параметрами, пренебрежение в уравнениях фильтрации членом, описывающим коррекцию гессианом, пренебрежение дискриминатором производной разности фаз, использование постоянных значений весовых коэффициентов в алгоритмах обработки. Данный алгоритм включает системы слежения за частотой, задержкой и набора систем слежения за разностями фаз с перекрестными связями по формируемым оценкам вектора состояния через корреляторы УНАП

Система слежения за разностью фаз обладает тем свойством, что на неё практически не влияет нестабильность опорного генератора. Выбор её полосы обусловлен только отношением сигнал/шум и динамикой вращательного движения. Возможность выбора полосы на основании динамики вращательного движения, а не совокупности динамики вращательного/поступательного движения и нестабильности опорного генератора, позволяет повысить характеристики данного алгоритма относительно известных решений. Некогерентный режим работы корреляторов при этом обеспечивает подстройку частоты и задержки при низких отношениях сигнал/шум и высокой мощности помех.

## **ГЛАВА 3 РЕЗУЛЬТАТЫ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И НАТУРНЫХ ИСПЫТАНИЙ**

В предыдущей главе синтезирован упрощенный квазиоптимальный некогерентный алгоритм (УКА) (2.128)-(2.130) оценивания параметров сигналов промежуточной частоты, принимаемых на множестве пространственно разнесенных точек. Этот алгоритм достаточно прост для реализации в УНАП, в то же время, реализует некогерентный метод обработки сигналов и непосредственное слежение за разностью фаз.

В настоящей главе проводится сравнение характеристик УКА с потенциальными характеристиками и характеристиками других алгоритмов.

### **3.1 Сравнение характеристик алгоритмов посредством имитационного моделирования, проверка высказанных гипотез**

Аналитический расчет характеристик синтезированных алгоритмов затруднен. Можно составить аналитические выражения при принятии ряда допущений, но погрешность такой аппроксимации не предсказуема. Выявить соотношение характеристик оптимального, квазиоптимального и упрощенного квазиоптимального алгоритмов проще посредством имитационного моделирования.

Для проведения имитационного моделирования и сбора статистики необходимо провести моделирование:

1) входных воздействий, что в случае рассматриваемой задачи сводится к моделированию процессов параметров сигналов и моделированию наблюдений им соответствующих;

2) работы алгоритмов обработки сформированных наблюдений;

3) управляющего алгоритма, запускающего модели наблюдений и обработки и собирающий необходимую статистику, характеризующую исследуемый алгоритм.

В среде MATLAB создана программа, реализующая соответствующий функционал.

Модель входных воздействий и наблюдений соответствует принятым при синтезе моделям (1.14), (1.25). В основном исследовались характеристики слежения за разностью фаз. Поэтому для сокращения времени моделирования и числа влияющих параметров дисперсии формирующих шумов и начального распределения для задержки, частоты и производной частоты устремлены к нулю. Иначе говоря, изменение данных параметров полагается детерминированным. Кроме того, при моделировании рассматривался случай двухантенной УНАП, то есть слежение только за одной разностью фаз. С одной стороны, это позволяет существенно снизить время моделирования (которое для набора достаточной статистики всё равно составляет месяцы), с другой – получить собственные, «рафинированные» характеристики слежения за разностью фаз, без учета перекрестных влияний с задержкой и частотой.

Моделирование производится при трех различных интенсивностях вращательного движения, условно названными «низкой динамикой», «средней динамикой» и «высокой динамикой». Отличаются они дисперсией формирующего шума. Так как дисперсия формирующего шума является малоинформативным параметром для человеческого восприятия, в таблице 3.1 приведено соответствие различных типов динамики величине среднеквадратического взаимного ускорения приемных антенн (см. [2]) и частоте вращения метровой базы.

Таблица 3.1 Интенсивность вращательного движения

Тип динамики	Среднеквадратическое взаимное ускорение, м/с <sup>2</sup>	Вращение метровой базы, град/с
Низкая динамика	0.03	5
Средняя динамика	0.25	45
Высокая динамика	1	360

Соответствие частоте вращения установлено по примерному равенству ошибок слежения в рабочем диапазоне отношений сигнал/шум (параметры алгоритмов слежения при этом остаются неизменными). Вращение производится в плоскости, перпендикулярной фронту навигационного радиосигнала.

Показательны зависимости оптимальных значений шумовой полосы ССРФ УКА от отношения сигнал/шум при различной динамике вращательного движения. Их графики приведены на рисунке 45.

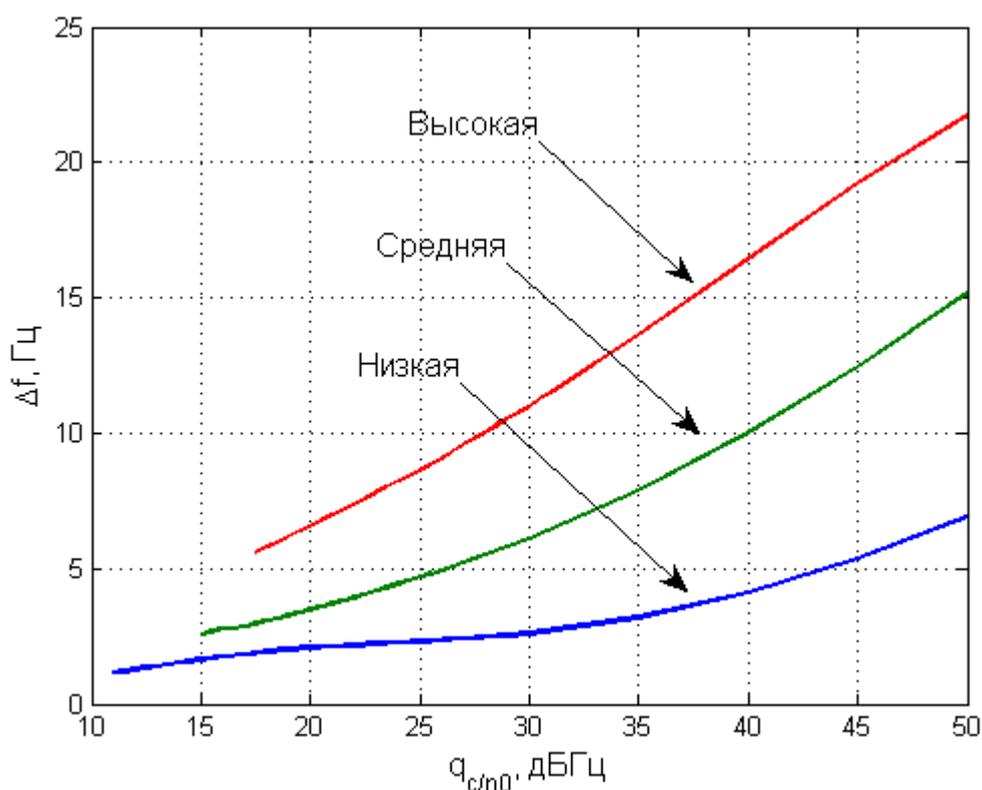


Рисунок 45. Оптимальная полоса пропускания ССРФ упрощенного квазиоптимального алгоритма для различных типов динамики вращательного движения

В качестве алгоритмов обработки используются следующие:

- 1) Алгоритм формирования оптимальных оценок на основе численного решения уравнений Стратоновича в двух вариациях: при простой и квадратичной функции потерь (см. гл. 1).

2) Квазиоптимальный алгоритм нормального приближения плотностей вероятностей (2.10), то есть алгоритм, формирующий оптимальные оценки в приближении нормальности апостериорной ПВ вектора состояния (см. гл. 2).

3) Упрощенный квазиоптимальный алгоритм (2.128), полученный из алгоритма (2.10) на основании ряда дополнительных допущений (см. гл. 2)

4) Референсный алгоритм, использующийся в существующей УНАП, в котором осуществляется слежения за абсолютными фазами сигналов (с использованием ФАП 3-го порядка), а разности фаз формируются в результате вычисления разности сформированных оценок фаз (см. рисунок 46).

Четвертый алгоритм выбран для сравнения характеристик разрабатываемого в диссертации алгоритма обработки с используемыми в настоящее время алгоритмами. Он соответствует алгоритму, применяемому в УНАП предыдущего поколения, выпускаемого ведущей организацией. Алгоритм ФАП известен, опубликован в [2]. Полоса используемых систем фазовой автоподстройки 20 Гц, алгоритм дискриминатора фазы

$$u_{\varphi,m,k} = -\arctg\left(\frac{Q_{m,k}}{I_{m,k}}\right). \quad (3.1)$$

Для получения предельных характеристик референсного алгоритма динамика поступательного движения отсутствует.

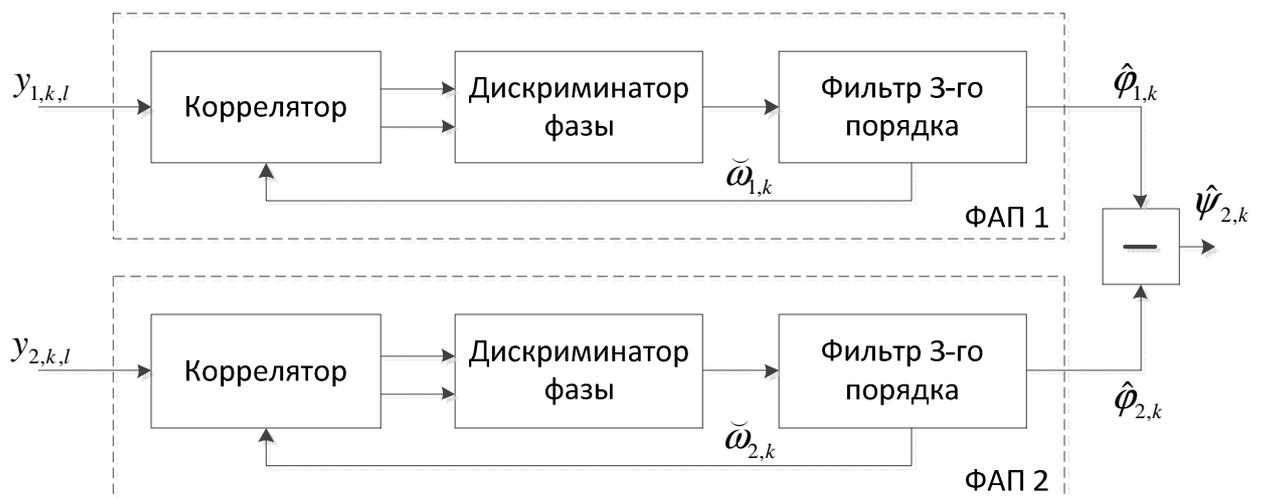


Рисунок 46. Референсный алгоритм слежения за разностью фаз

Управляющий алгоритм производит многократных запуск моделирования наблюдений и работы алгоритмов и производит сбор статистики

среднеквадратических ошибок (СКОш) оценки мгновенных разностей фаз различными алгоритмами. Время моделирования для одной реализации варьируется: для средней и высокой динамики время одной реализации составляет 4 секунды, при низкой динамике увеличивается в 10 раз.

На основании собранной статистики строятся зависимости СКОш для различных алгоритмов как функции различных параметров, например отношения сигнал/шум или помеха/сигнал.

Как отмечалось ранее, интерпретировать оценки РФ упрощенной ССРФ (2.128) следует как оценки средней РФ и производных средней РФ. Восстановление мгновенной разности фаз по оценкам РФ упрощенной ССРФ (2.128) следует производить по формуле (см. рисунок 47):

$$\hat{\psi}_{k,l} = \begin{cases} \frac{\hat{\psi}_k + \hat{\psi}_{k-1}}{2} + \frac{(\hat{\psi}_k - \hat{\psi}_{k-1})}{T} l T_d, & l < L/2, \\ \hat{\psi}_k + \hat{\psi}'_k (l - L/2) T_d, & l \geq L/2. \end{cases} \quad (3.2)$$

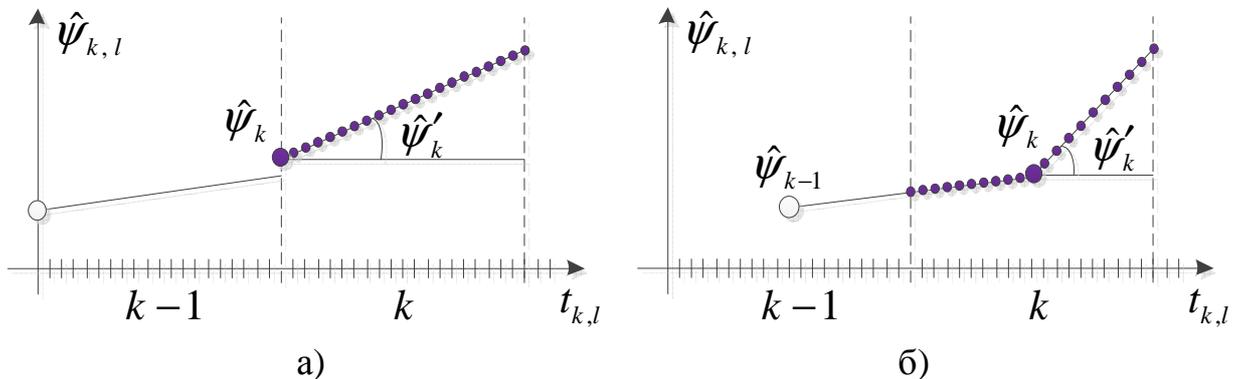


Рисунок 47. Расчет мгновенных РФ: (а) по оценкам параметров кусочно-линейной аппроксимации (б) по оценкам средней РФ и её производной

Для сравнения, расчет оценок мгновенной РФ по измерениям параметрам кусочно-линейной аппроксимации задается выражением

$$\hat{\psi}_{k,l} = \hat{\psi}_k + \hat{\psi}'_k (l - 1) T_d. \quad (3.3)$$

### 3.1.1 Анализ точности слежения за разностью фаз

На рисунках 48-50 отображены полученные моделированием зависимости СКОш оценки РФ различными алгоритмами при различных значениях отношения сигнал/шум.

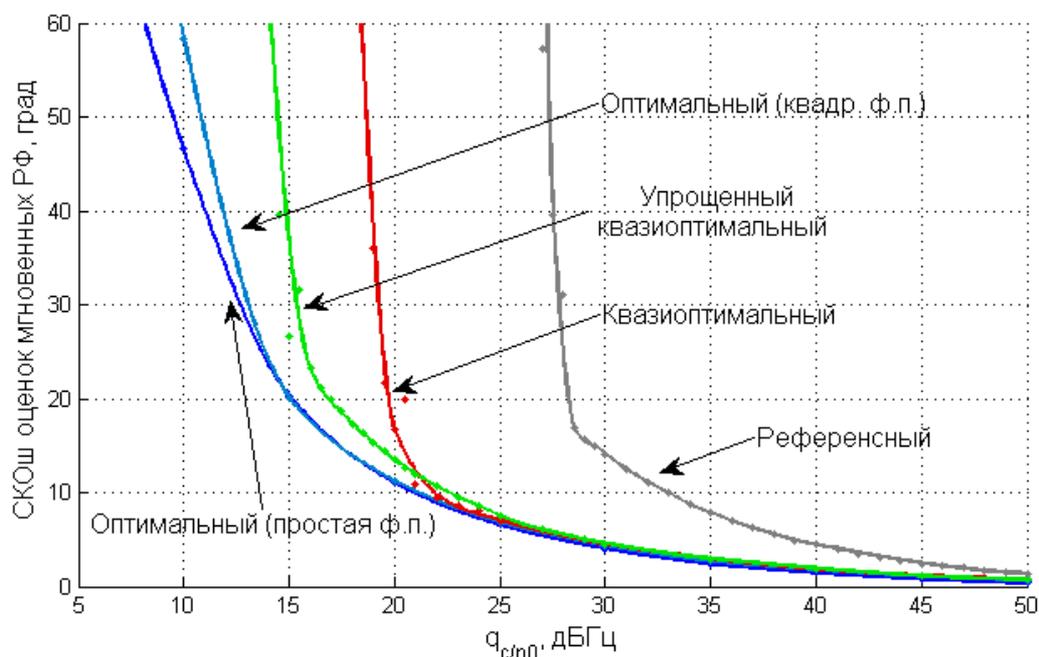


Рисунок 48. Среднеквадратическая ошибка оценивания мгновенных разностей фаз при низкой динамике вращательного движения

Здесь и далее под «оптимальным» алгоритмом понимается алгоритм, основанный на численном решении уравнений Стратоновича для апостериорной плотности вероятности (см. Главу 1). Графики, расположенные на разных рисунках, отличаются динамикой вращательного движения. Из них следует вывод, что разработанные алгоритмы существенно превосходят референсный по точности формируемых оценок во всем диапазоне отношений сигнал/шум и при различных интенсивностях динамики вращений.

Говоря о точности, в первую очередь интересуются погрешностями при штатной эксплуатации УНАП – при приеме сигналов номинальной мощности, что соответствует отношению сигнал/шум около 45 дБГц.

Точность оценок, формируемых квазиоптимальным и упрощенным квазиоптимальным алгоритмами, при средних и высоких отношениях сигнал/шум практически совпадает с потенциальными характеристиками,

задаваемыми точностью оценок оптимальных алгоритмов. При работе по сигналам номинальной мощности точностные характеристики упрощенного квазиоптимального алгоритма, предлагаемого к реализации в УНАП, близки к потенциальным.

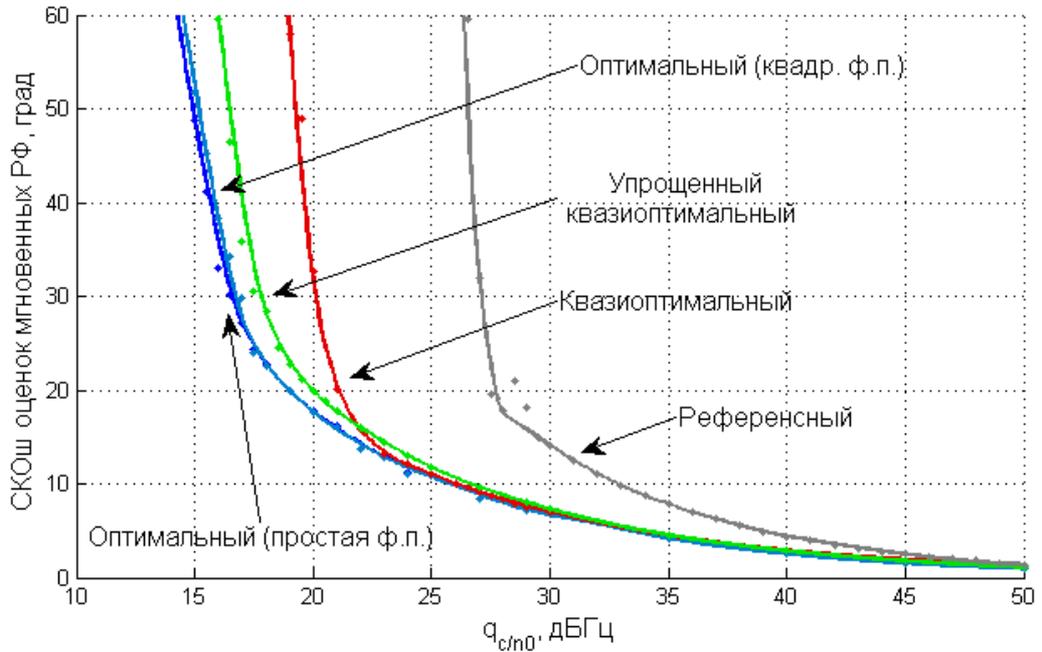


Рисунок 49. Среднеквадратическая ошибка оценивания мгновенных разностей фаз при средней динамике вращательного движения

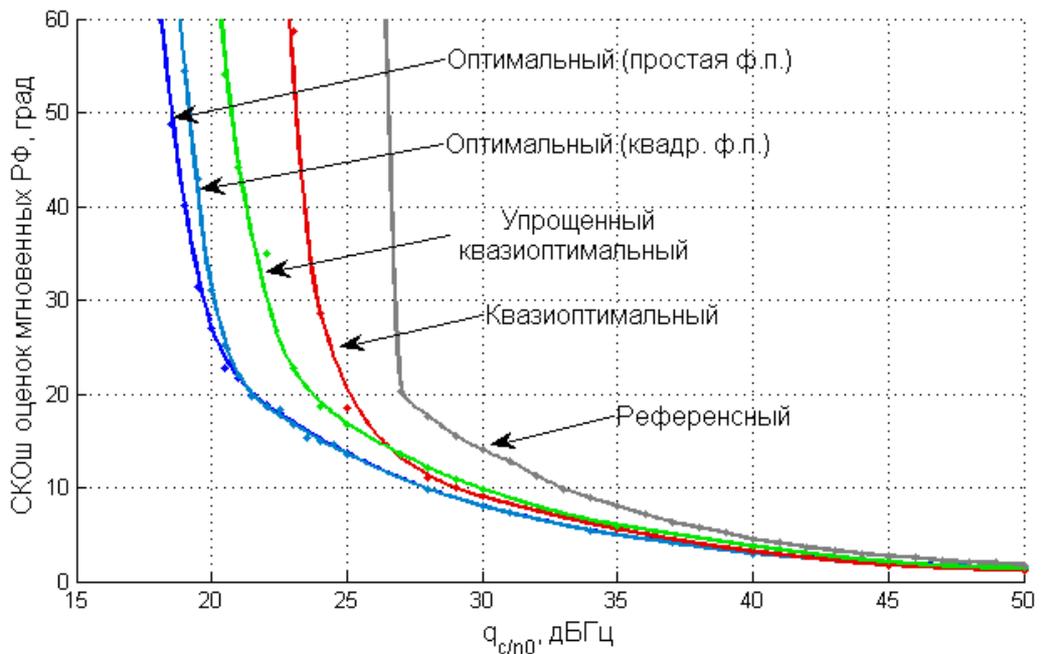


Рисунок 50. Среднеквадратическая ошибка оценивания мгновенных разностей фаз при высокой динамике вращательного движения

Точность оценок референсного алгоритма несколько хуже. Чем меньше динамика вращательного движения, тем меньше ошибки созданных алгоритмов. Погрешности же референсного алгоритма не снижаются – при его использовании отсутствует возможность снизить шумовую полосу, т.к. она ограничена динамикой поступательного движения и нестабильностью опорного генератора и фиксирована на уровне 20 Гц.

В таблице 3.2 приведены значения СКОш оценок различных алгоритмов при отношении сигнал/шум 45 дБГц. Из таблицы следует вывод, что использование созданных алгоритмов позволяет повысить точность измерений разности фаз от 25% при высокой динамике вращений до 3 раз при низкой динамике.

Показательно, что при высокой динамике вращательного движения точности слежения ССРФ УКА и референсного алгоритма становятся близки. Это хорошо согласуется с тем фактом, что при высокой динамике и 45 дБГц шумовая полоса ССРФ УКА близка к 20 Гц, то есть к полосе ФАП референсного алгоритма (см. рисунок 45).

Таблица 3.2 Среднеквадратическая ошибка оценки РФ при  $q_{c/n0} = 45$  дБГц, град

Тип алгоритма\Тип динамики	Низкая	Средняя	Высокая
Оптимальный:			
- простая функция потерь	0.75	1.5	2
- квадратичная ф. потерь	0.75	1.5	2
Квазиоптимальный	0.75	1.5	2
Упрощ. квазиоптимальный	0.75	1.5	2
Референсный	2.5	2.5	2.5

Повышение точности оценок – полезное свойство. Но практически более значимо не снижение динамических и шумовых ошибок при большом отношении сигнал/шум, а улучшение характеристик при малой мощности

сигнала или большом уровне помех. При благоприятных условиях динамические и шумовые ошибки всё равно, как правило, оказываются меньше дополнительных источников погрешности. Характеристики же при низком отношении сигнал/шум определяют чувствительность и помехоустойчивость НАП. Рассмотрим их подробнее.

### 3.1.2 Чувствительность слежения за разностью фаз

Под чувствительностью алгоритма слежения будем понимать граничное отношение сигнал/шум, при котором вероятность срыва слежения за одну реализацию заданной длительности превысит 0.5.

При моделировании ССРФ чувствительности примерно соответствует отношению сигнал/шум, при котором СКОш оценки РФ достигает шестой части цикла (3 СКОш примерно равны половине цикла фазы). При превышении шестой части цикла по СКОш становятся вероятны «перескоки фазы», что существенно усложняет формирование измерений параметров ориентации (см. рисунок 51).

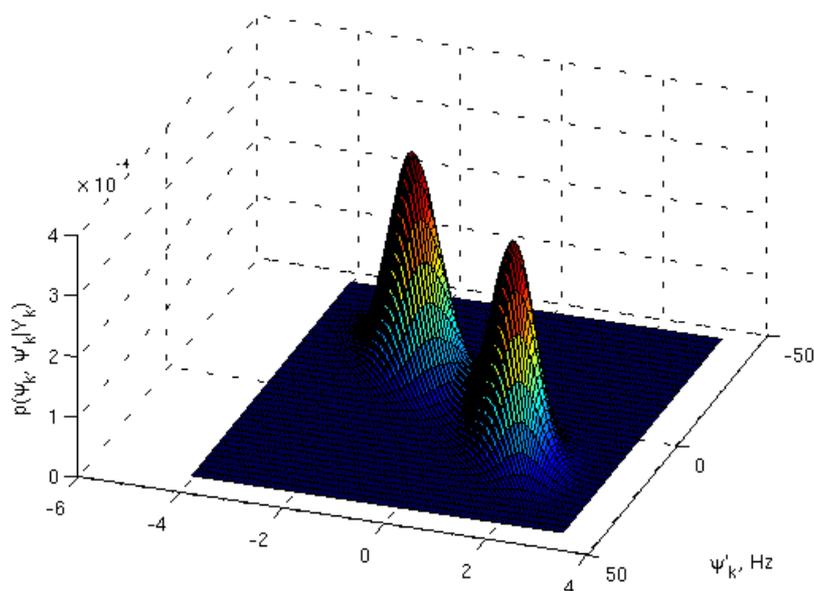


Рисунок 51. Возникновение второго максимума апостериорной ПВ, приводящее к «перескоку фазы»

Вновь обратимся к рисункам 48-50. Из них следует интересный вывод, что хотя квазиоптимальный алгоритм обеспечивает чуть лучшие

характеристики при средних отношениях сигнал/шум по сравнению с его упрощенной версией, граница его неработоспособности наступает раньше. Этот алгоритм сложнее, и нарушение принятых допущений приводит к быстрому выводу его из рабочего режима.

Характеристики чувствительности алгоритмов приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 Чувствительность алгоритма слежения за РФ, дБГц

Тип алгоритма\Тип динамики	Низкая, 40 с	Средняя, 4 с	Высокая, 4 с
Оптимальный:			
- простая функция потерь	8	14	18
- квадратичная ф. потерь	10	14	18.5
Квазиоптимальный	18	19	23
Упрощ. квазиоптимальный	14	16	20
Референсный	27	27	27

Упрощенный квазиоптимальный алгоритм проигрывает оптимальным в чувствительности около 2-6 дБ. Следует отметить, что если для определения границы чувствительности выбрать порог ниже (20-50 градусов по СКОш), то соотношение в целом сохранится.

Чувствительность же референсного алгоритма значительно ниже, чем у разработанных алгоритмов. Она определяется чувствительностью ФАП и ограничена уровнем 27 дБГц. Данное значение хорошо согласуется с опытом разработки когерентных систем и публикациями [2, 20]. Упрощенный квазиоптимальный алгоритм превосходит референсный на 7-13 дБ.

Другой важный вывод из данных таблицы о соотношении чувствительности ССРФ и УНАП в целом. При средней и высокой динамике вращений чувствительность ССРФ значительно ниже, чем чувствительность ССЗ и ССЧ современных приемников. При низкой динамике вращений эти показатели близки. А значит, чувствительность УНАП в целом в режиме слежения определяется чувствительностью ССРФ. Чувствительность УНАП в

этом случае можно оценить как -186 - -180 дБВт (имеется в виду возможность решения угломерной задачи, выполнять классические НВО можно и без участия ССРФ).

Исключением могут служить стационарные УНАП, динамика вращения которых минимальна (обусловлена движением НКА). В этом случае чувствительность УНАП определяется ССЗ и ССЧ, её можно оценить как -190 - -186 дБВт.

Т.к. чувствительность УНАП предыдущего поколения можно оценить как -173 дБВт, применение разработанного УКА позволяет повысить чувствительность УНАП на 7-17 дБ в зависимости от интенсивности вращений объекта.

### **3.1.3 Помехоустойчивость слежения за разностью фаз**

Под помехоустойчивость алгоритма слежения будем понимать граничное отношение помеха/сигнал ( $J/S$ ), при котором вероятность срыва слежения за одну реализацию заданной длительности превысит 0.5.

Как сказано выше, помехоустойчивость алгоритмов зависит от направления прихода помехи. Рассмотрим идеализированный тест – помеха всегда приходит перпендикулярно базе. С одной стороны, это дает некоторую интегральную оценку помехоустойчивости для различных соотношений между направлениями на помеху и спутник, с другой, значительно упрощает моделирование.

В качестве помехового воздействия использовалась шумовая полосовая помеха, под мощностью помехи понимается её мощность в полосе сигнала. Тестовый навигационный сигнал – ВТ ГЛОНАСС.

Как и при анализе чувствительности, при моделировании ССРФ показателю помехоустойчивости примерно соответствует отношение помеха/сигнал, при котором СКОш оценки РФ достигает шестой части цикла.

Следует отметить, что оценить помехоустойчивость алгоритмов УНАП по характеристикам чувствительности нельзя. Наличие помехового воздействия

не эквивалентно увеличению дисперсии шума наблюдений. Помехи, в отличие от шумов, коррелированы между антеннами.

На рисунках приведены зависимости СКОш оценок мгновенных РФ от отношения  $J/S$ . В таблице 3.4 собраны следующие из графиков значения помехоустойчивости различных алгоритмов.

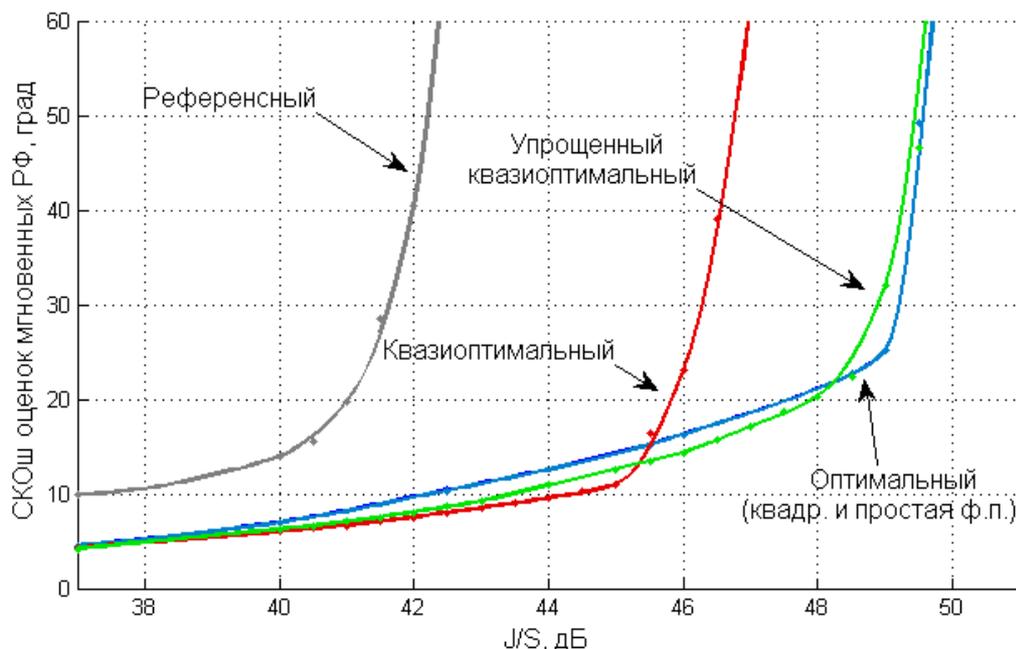


Рисунок 52. Среднеквадратическая ошибка оценивания мгновенных разностей фаз при низкой динамике вращательного движения

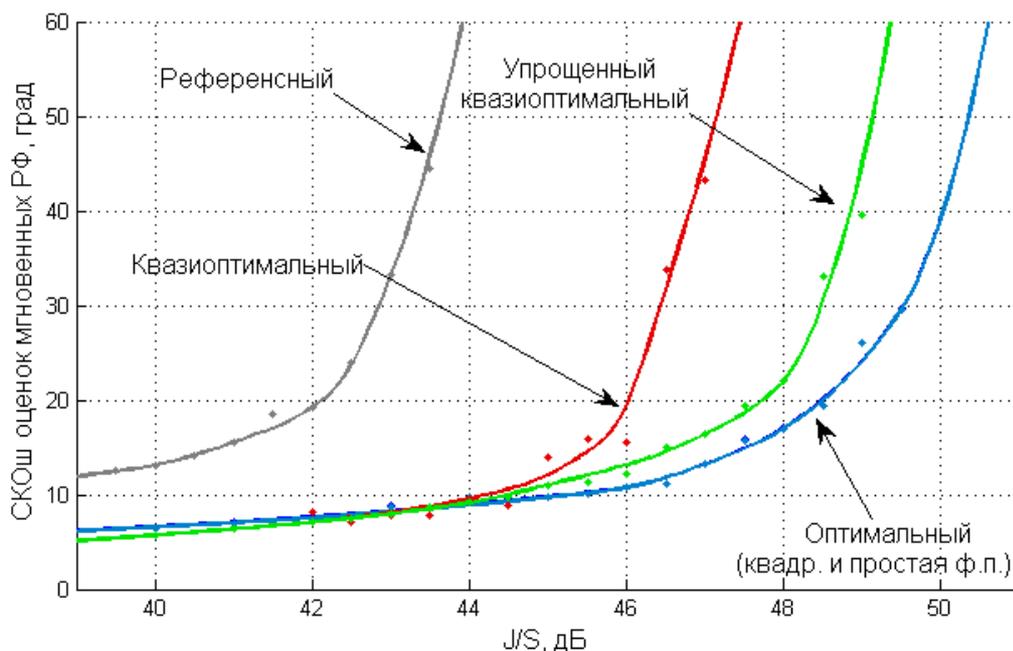


Рисунок 53. Среднеквадратическая ошибка оценивания мгновенных разностей фаз при средней динамике вращательного движения

Созданные алгоритмы значительно более помехоустойчивы, чем референсный.

Квазиоптимальный алгоритм обладает не только меньшей чувствительностью, но и меньшей помехоустойчивостью по сравнению с его упрощенным вариантом. Причины этого явления те же, что и в случае с чувствительностью. Разница составляет около 2 дБ.

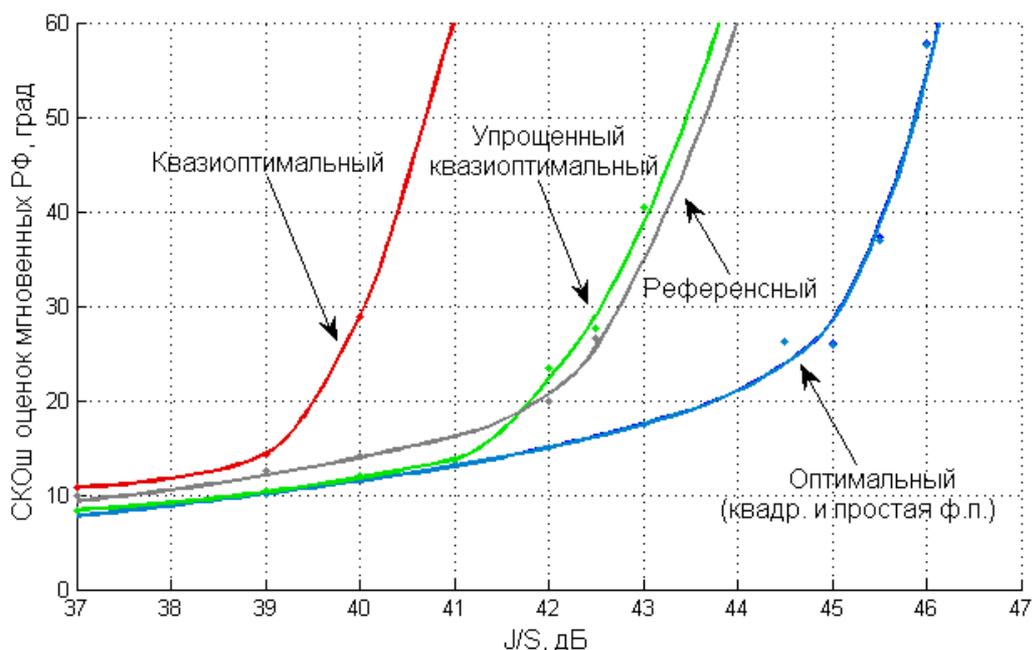


Рисунок 54. Среднеквадратическая ошибка оценивания мгновенных разностей фаз при высокой динамике вращательного движения

Таблица 3.4 Помехоустойчивость алгоритма слежения за РФ, дБ

Тип алгоритма\Тип динамики	Низкая, 40 с	Средняя, 4 с	Высокая, 4 с
Оптимальный:			
- простая функция потерь	49.5	50.5	46
- квадратичная ф. потерь	49.5	50.5	46
Квазиоптимальный	47	47.5	41
Упрощ. квазиоптимальный	49.5	49.5	44
Референсный	42	44	44

Наиболее помехоустойчивы оказываются оптимальные алгоритмы. Они превосходят референсный на 2-8 дБ.

Упрощенный квазиоптимальный отстаёт от оптимальных на 1 дБ, превосходит референсный на 4-8 дБ при средней и высокой динамике вращений.

Таким образом, упрощенный квазиоптимальный алгоритм является хорошим компромиссом между характеристиками точности, помехоустойчивости, чувствительности и сложностью алгоритма.

### **3.2 Имитационное моделирование работы УНАП**

В параграфе 3.2 приведены результаты работы моделирования работы алгоритмов для специфичных частных случаев. В качестве моделей параметров использовались Марковские процессы, принятые при синтезе. Алгоритмы слежения за разностью фаз рассматривались обособленно, слежение за частотой и задержкой принималось идеальной.

Тем не менее, важно иметь возможность моделировать поведение алгоритмов в комплексе – с перекрестным влиянием и воздействиями, характерными для движения реальных объектов, т.е. проводить моделирование максимально приближенное к реальным условиям работы УНАП.

Для этого была составлена имитационная модель УНАП в условиях приема сигналов СРНС и заданных параметрах движения объекта.

Разработанная модель включает в себя/учитывает:

- 1) Движение НКА по Кеплеровским орбитам вокруг Земли;
- 2) Перемещение центра масс объекта по произвольным законам (разложения проекций в ряд вплоть до ускорения – третьей производной координаты; шаблоны – покой, взлет по спирали, прямолинейное движение, случайное движение);
- 3) Вращение трехэлементного базиса, задающего ориентацию, по произвольным законам (разложение в ряд вплоть до третьей

производной углов поворота; шаблоны – вращение вокруг оси координат, вращение вокруг оси скорости, случайное вращение);

- 4) Привязку произвольной конфигурации приемных точек в пространстве к базису, задающему ориентацию (шаблоны – правильный треугольник, ромб);
- 5) Пересчет взаимного движения приемных точек и спутников в параметры принимаемых сигналов с учетом нестабильности опорного генератора;
- 6) Задание для каждого канала индивидуальных энергетических параметров, дополнительных нестабильностей опорного генератора, помех и т.п.;
- 7) Упрощенные квазиоптимальные алгоритмы фильтрации (в установившемся режиме/с динамическим расчетом коэффициентов) с возможностью их асинхронной параллельной работы, собственными корреляционными суммами и периодами, а так же референсный алгоритм на основе двух систем ФАП с полосой 20 Гц.
- 8) Статистические эквиваленты корреляторов с учетом дальномерного кода СРНС, модуляции навигационным сообщением и дополнительным меандром для системы ГЛОНАСС;
- 9) Синтезированные дискриминационные алгоритмы с индивидуальными параметрами для каждого канала обработки;
- 10) Сохранение информации о состоянии системы с выбранным периодом;
- 11) Систему вывода информации (см. рисунок рисунке 55) о положении и ориентации объекта, направлениях на спутники, процессах в следящих системах во временном и спектральном представлениях, ошибках оценивания, срыве слежения.

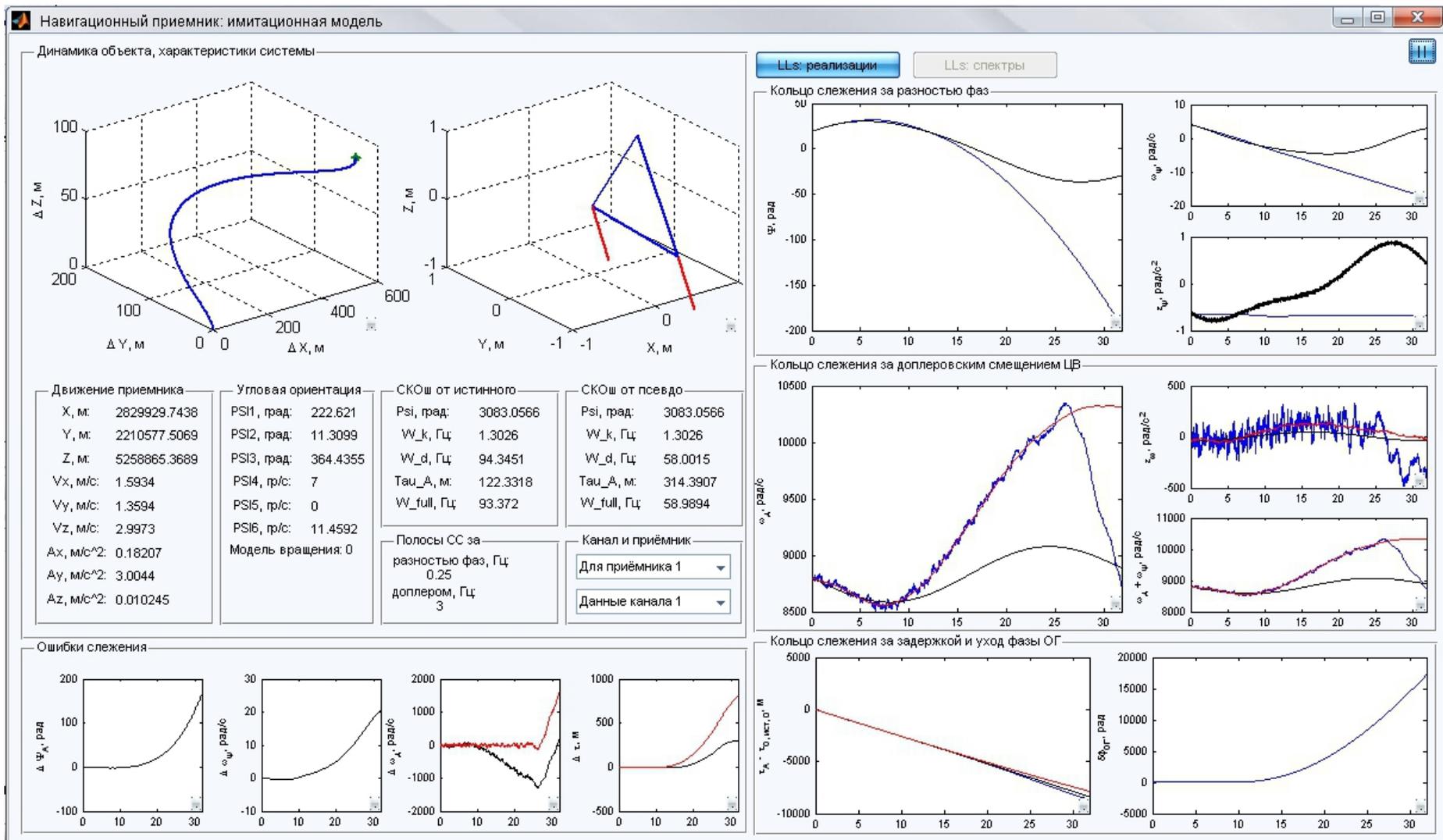


Рисунок 55. Окно вывода информации имитационной модели УНАП

Моделирование подтвердило работоспособность синтезированных алгоритмов во всем диапазоне условий функционирования навигационной аппаратуры. Также модель является важным подспорьем при реализации алгоритмов в конечных устройствах.

Модель позволяет определить точность формируемых при тех или иных параметрах измерений. В качестве примера приведем зависимость точности оценки разности фаз, поступательного доплеровского смещения и задержки огибающей сигнала при следующих условиях

- 1) время накопления в корреляторах  $T = 5$  мс;
- 2) прием производится в трех точках, образующих правильный треугольник со стороной 1 м;
- 3) приемные точки неподвижны относительно земли, относительная динамика определяется движением навигационных спутников;
- 4) полосы следящих систем (используются коэффициенты фильтров установившегося режима) составляют 0.25Гц для системы слежения за разностью фаз, 3Гц для системы слежения за поступательным доплеровским смещением, 1Гц для системы слежения за задержкой дальномерного кода;
- 5) усреднение производится по реализациям длительностью 40 с, число реализаций от 150 до 200 в зависимости от участка;
- 6) в качестве дискриминатора РФ используется синтезированный алгоритм; для сравнения добавлены результаты слежения при использовании ДРФ сигналов, принимаемых в двух приемных точках (на графике 56 обозначены как « $M = 3$ » и « $M = 2$ »);
- 7) дискриминаторы параметров  $\psi'_k$  приняты равными нулю, как и крутизна их дискриминационных характеристик и дисперсия выходных отсчетов;
- 8) используются постоянные коэффициенты рекурсивных фильтров, соответствующие выбранным полосам следящих систем.
- 9) преднамеренные помехи отсутствуют.

Параметры фильтров, принятые при моделировании, могут обеспечивать слежение за параметрами сигналов УНАП потребителя, вращающегося с угловой скоростью до 5 градусов в секунду вокруг вектора скорости во время низкочастотного «взлета» по спиральной траектории.

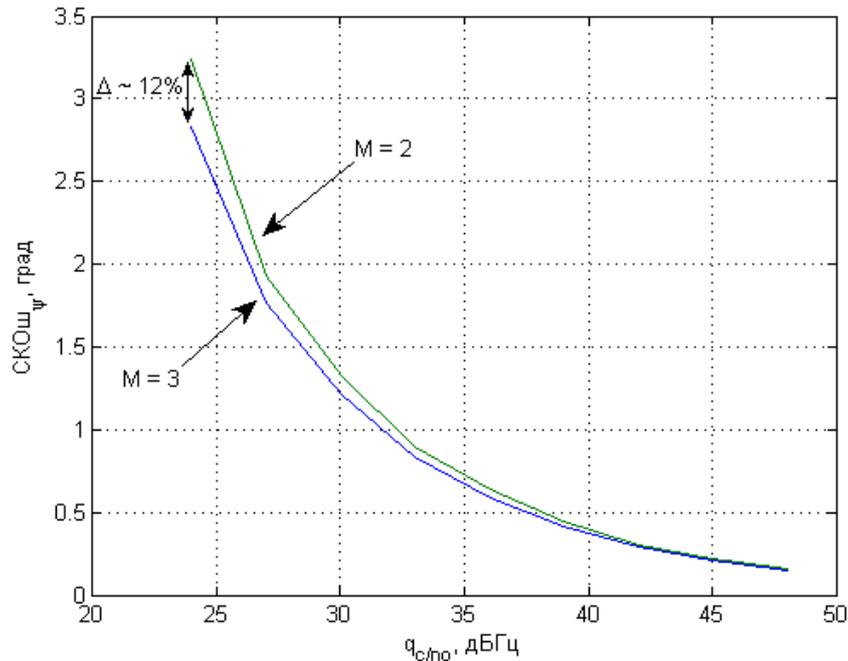


Рисунок 56. Среднеквадратическая ошибка слежения за РФ

На рисунке 56 представлен график полученных зависимостей СКОш (среднеквадратических ошибок) оценки разности фаз от отношения сигнал/шум. На рисунках 57, 58 представлены соответствующие СКОш оценивания поступательного доплеровского смещения и задержки дальномерного кода сигнала. При  $q_{c/no,min} = 18$  дБГц наблюдалась нестабильная работа системы – с вероятностью около 50% за 40-секундный интервал работы происходил срыв слежения за поступательным доплеровским смещением. До срыва точность слежения за разностью фаз составляла около 6 градусов.

Срыв слежения за разностью фаз при использовании референсного алгоритма происходит при отношении сигнал/шум  $q_{c/no,PLL,min} = 30$  дБГц. Таким образом, зафиксировано повышение чувствительности следящих систем на 12 дБГц. Есть большой потенциал увеличения этого показателя, т.к. применение динамически изменяющихся коэффициентов позволяет снизить пороговое

значение отношения/сигнал шум для систем ССЗ и ССЧ до величин около 12 дБГц.

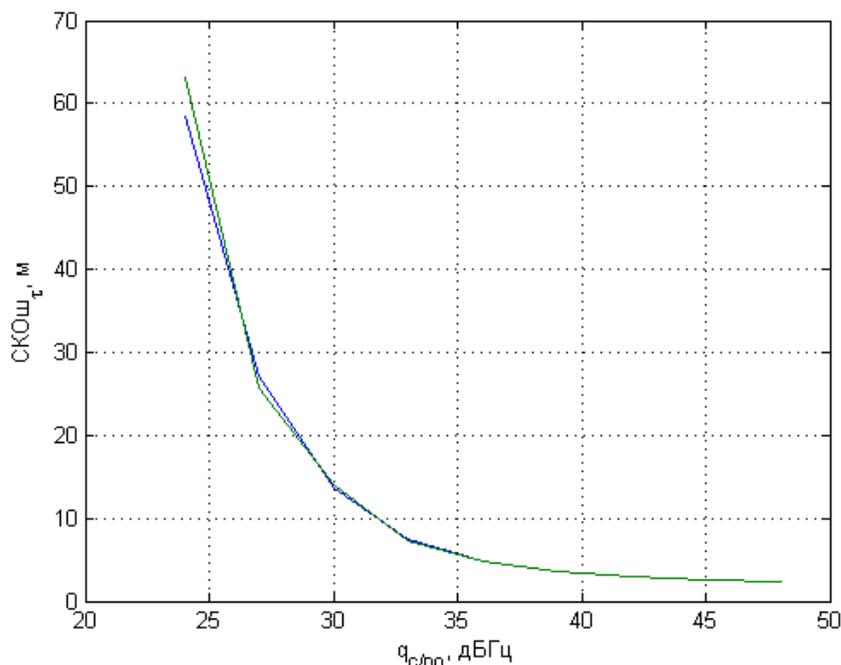


Рисунок 57. Среднеквадратическая ошибка слежения за задержкой дальномерного кода

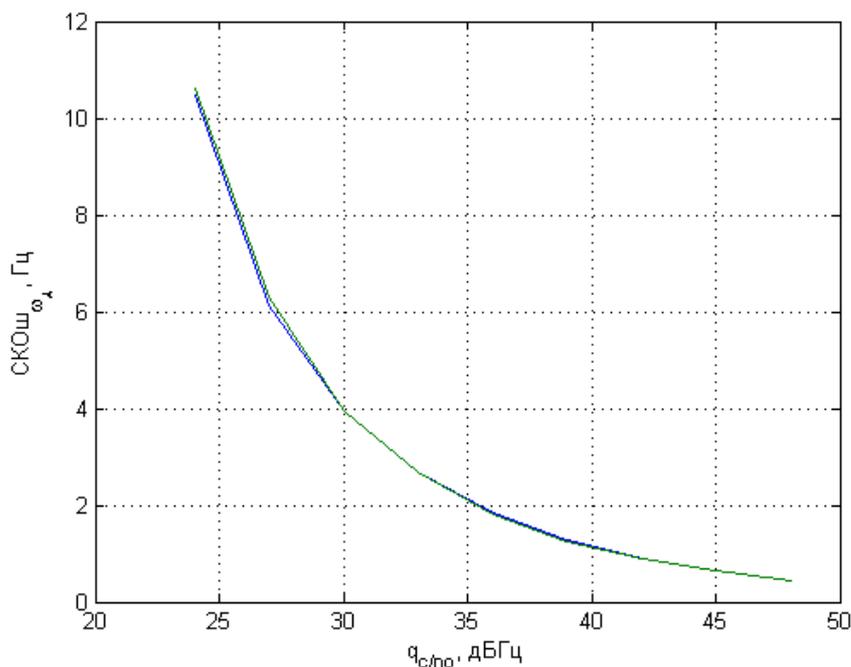


Рисунок 58. Среднеквадратическая ошибка слежения за поступательным доплеровским смещением частоты

Выигрыш в точности оценивания разности фаз по СКОш за счет использования в дискриминаторе наблюдений в трех точках вместо двух

составил в исследуемом диапазоне от 4 до 12% (возрастает при уменьшении отношения с/ш).

Приведенные результаты соответствуют одной из множества возможных конфигураций и приведены здесь для подтверждения работоспособности УКА и повышения характеристик при его применении. Приведенные характеристики не стоит рассматривать как предельные для УНАП. Существенно их повысить позволяет увеличение времени когерентного накопления, адаптация полос следящих систем под интенсивность динамических воздействий.

### **3.3 Результаты натурального испытания опытного образца УНАП, реализующего упрощенный квазиоптимальный алгоритм фильтрации**

Специалистами ОАО «НИИ КП» проведена реализация упрощенного квазиоптимального алгоритма в УНАП в рамках создания опытного образца при выполнении ОКР «Перспектива-С». Опытный образец прошел госиспытания, в том числе проверку на выполнение требований ТЗ по точности и помехоустойчивости.

К сожалению, ТЗ не включало требования чувствительности, поэтому данные натуральных испытаний чувствительности отсутствуют.

Опытный образец УНАП выполнил строгие требования ТЗ к точности измерений, составляющие 2 угловых минуты СКОш при длине базы 2 метра. Для сравнения, в качестве характеристик аналогов, перечисленных во Введении, заявляются величины около 5 угловых минут в схожих условиях. Эти данные не позволяют надежно верифицировать ожидаемое увеличение точности измерения параметров сигналов, но, как минимум, свидетельствуют о работоспособности предложенного упрощенного квазиоптимального алгоритма и достойном уровне его точностных характеристик.

В рамках проведения госиспытаний выполнена проверка помехоустойчивости опытного образца, что отражено в Протоколе испытаний

№3.1 по п.3.1 «Программы и методик государственных испытаний навигационной аппаратуры потребителей глобальных навигационных спутниковых систем для подвижных бронированных объектов СВ и ВДВ с угломерным каналом «НАП-УК» (индекс 14Ц830), ЦДКТ.464315.013 ПМ».

Приведем выдержки из протокола.

«Материально-техническое обеспечение:

- спектроанализатор Rohde&Schwarz ZVL6 с контрольной антенной;
- генератор сигналов Rohde&Schwarz SMBV100A;
- антенна спиральная частотного диапазона L1 ЦДКТ.464659.041;
- источник питания АКПП-1101;
- технологическая ПЭВМ с установленным ПМО “RsQt33”;
- переходы коаксиальные с N(f) на CP-50-155;
- кабели радиочастотные.»

«Для проверки помехоустойчивости изделия в целом (с использованием антенной системы) на крыше здания ОАО «НИИ КП» проводились испытания по реальным навигационным сигналам ВТ(L1) ГНСС ГЛОНАСС при условии воздействия широкополосной помехи в указанном диапазоне.»

«Мощность полезного сигнала на входе антенного усилителя принималась равной минус 157 дБВт. Контроль мощности помехи в месте приема сигнала осуществлялся при помощи спектроанализатора ZVL6 с пассивной контрольной антенной. Мощность помехи определялась спектроанализатором в полосе ВТ-сигнала (10МГц).»

В качестве приемных антенн в составе УНАП использовались антенны БА41 типа чок-ринг, входящие в состав изделия 14Ц830. Полоса ССРФ УНАП зафиксирована на уровне 1 Гц, что примерно соответствует оптимальному значению полосы при низкой динамике вращательных движений (см. рисунок 45).

Схема проведения испытаний приводится в протоколе, она представлена на рисунке 59.

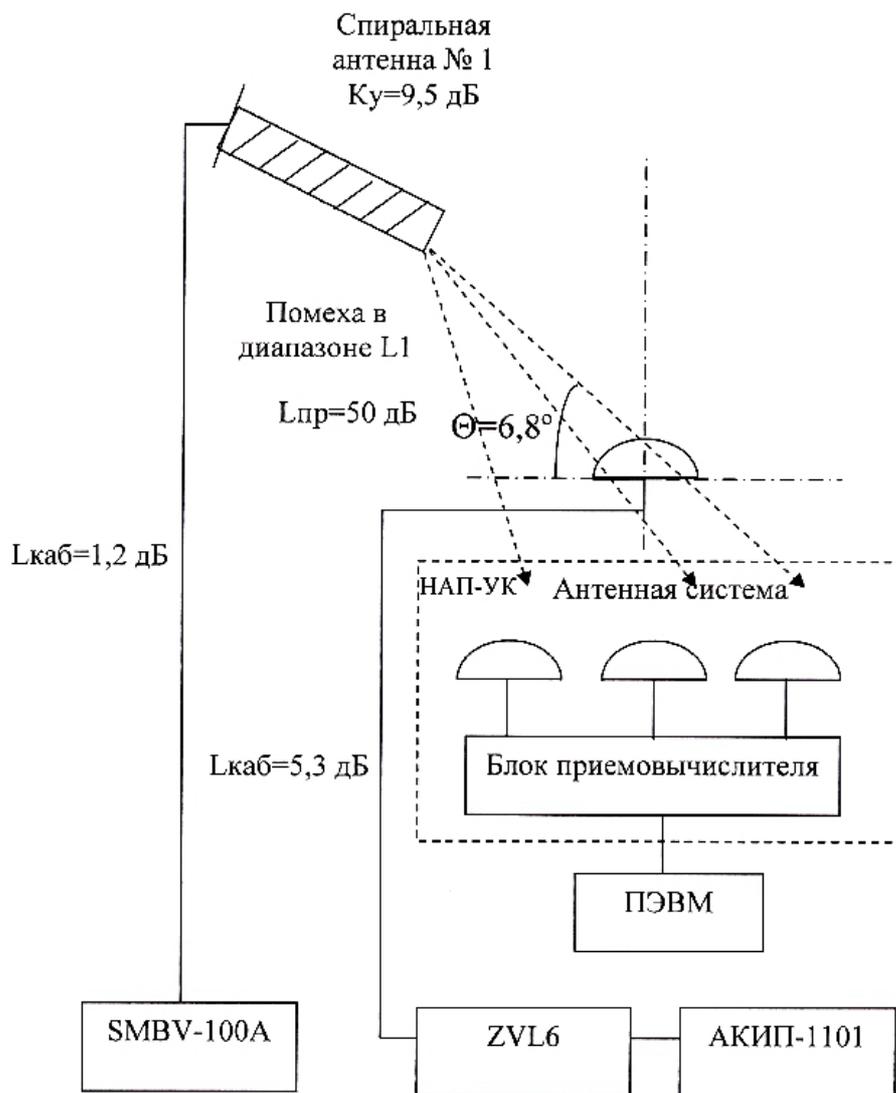


Рисунок 59. Схема проведения испытаний помехоустойчивости опытного образца УНАП

Результаты испытаний НАП-УК по проверке обеспечения «слежения» за ВТ(L1) сигналами НКА ГНСС ГЛОНАСС при воздействии широкополосной помехи (без поддержки автономной системы навигации) представлены в таблице 3.5.

Заключение, сделанное в протоколе: «В результате испытаний установлено, что НАП-УК без поддержки автономной системы навигации обеспечивает <...> «слежение» за сигналами ВТ (L1) НКА ГНСС ГЛОНАСС при воздействии одиночной широкополосной помехи, мощность которой на входе антенного усилителя в полосе полезного сигнала (ВТ) превышает мощность полезного сигнала <...> на 48 дБ в режиме слежения». Данные

результаты соответствуют результатом моделирования, приведенным в таблице 3.4.

Таблица 3.5. Результаты испытаний НАП-УК по проверке обеспечения «слежения» за ВТ(L1) сигналами НКА ГНСС ГЛОНАСС при воздействии широкополосной помехи (без поддержки автономной системы навигации)

Отношение помеха/сигнал (J/S), дБ	Мощность помехи на входе антенного усилителя, дБВт	Мощность полезного сигнала на входе антенного усилителя, дБВт	Наличие захвата
35	-122	-157	да
40	-117		да
42	-115		да
44	-113		да
46	-111		да
<b>48</b>	<b>-109</b>		<b>да</b>
50	-107		нет

К сожалению, аналогичные испытания УНАП предыдущего поколения (навигационная аппаратура потребителей КНС ГЛОНАСС/GPS с функцией определения дирекционного угла 14Ц823 (“Грот-У”), выпускается предприятием с 2003 года) не проводились. В то же время, для данного изделия проводились испытания на помехоустойчивость одного канала обработки, которая составила 40 дБ. Так как в данном образце УНАП каждый канал обработки содержит систему ФАП третьего порядка с полосой пропускания 20 Гц, то помехоустойчивость всей УНАП определяется помехоустойчивостью ФАП (см., например,[2]). Таким образом, помехоустойчивость изделия 14Ц823 при работе по ВТ сигналу ГЛОНАСС составляет 40 дБ. Следовательно, экспериментально установлено, что разработанный в диссертации упрощенный

квазиоптимальный некогерентный алгоритм обработки навигационных сигналов в УНАП позволяет повысить помехоустойчивость на 8 дБ.

Выводы из доступных результатов натуральных испытаний опытного образца УНАП, реализующего разработанный упрощенный квазиоптимальный некогерентный алгоритм оценивания параметров сигналов, следующие:

- проведенные натурные испытания подтверждают работоспособность разработанного в диссертации упрощенного квазиоптимального некогерентного алгоритма оценивания параметров сигналов в УНАП с улучшенными характеристиками точности и помехоустойчивости;

- помехоустойчивость опытного образца УНАП соответствует результатам моделирования и аналитических расчетов.

### **3.4 Выводы по главе**

Проведено совместное моделирование работы разработанных алгоритмов и одного референсного. В качестве референсного выступает алгоритм, применяемый в УНАП предыдущего поколения, разработанной ведущей организацией ОАО «НИИ космического приборостроения». Его можно описать как независимое слежение за фазами сигналов различных антенн с помощью широкополосных систем ФАП, с последующим нахождением оценки разности фаз как разности оценок фаз.

Алгоритмы, формирующие оценки параметров на основании численного решения уравнений Стратоновича, задают уровень потенциальных характеристик. Характеристики квазиоптимального алгоритма позволяют контролировать правомерность сделанных допущений, в результате которых был сформирован упрощенный алгоритм.

Моделирование показывает существенное превосходство упрощенного квазиоптимального алгоритма над референсным по характеристикам помехоустойчивости, точности, чувствительности. Ожидается, что его применение позволит повысить чувствительность УНАП на 7-17 дБ. При низкой динамике вращений помехоустойчивость может быть повышена на 6-8

дБ (до значений около 50 дБ для ВТ сигналов ГЛОНАСС). Наиболее ощутим прирост характеристик для объектов с низкой динамикой вращательных движений.

Характеристики упрощенного квазиоптимального алгоритма отстают от потенциальных по чувствительности от 2 до 6 дБ, по помехоустойчивости не более 2 дБ.

Переход от квазиоптимального алгоритма к упрощенному привел к небольшому, практически не значимому, снижению точности формируемых оценок при большом отношении сигнал/шум, но при этом значительно повысил характеристики чувствительности и помехоустойчивости. Этот факт объясняется более простым устройством алгоритма.

Составлена подробная имитационная модель УНАП с упрощенным квазиоптимальным алгоритмом и референсным алгоритмом, учитывающая множество факторов: от движения спутниковой группировки до конфигурации антенной системы и нестабильности опорного генератора. Эта модель призвана максимально точно воспроизводить условия, в которых работают алгоритмы обработки сигналов УНАП. Проведено имитационное моделирование, подтверждающее выводы об улучшении характеристик разработанного упрощенного квазиоптимального алгоритма обработки сигналов в УНАП относительно известного.

Приведены результаты экспериментальных исследований разработанного упрощенного квазиоптимального алгоритма обработки сигналов в опытном образце УНАП ОАО «НИИ КП». Проведенные ведущей организацией испытания помехоустойчивости УНАП оценивают её на уровне 48 дБ, что согласуется с аналитическими результатами и результатами моделирования. Данный уровень помехоустойчивости на 8 дБ выше, чем у предыдущего образца УНАП, использующего независимое слежение за фазами сигналов различных антенн с помощью широкополосных систем ФАП, с последующим нахождением оценки разности фаз как разности оценок фаз. Точность определения параметров угловой ориентации объекта в опытном образце

УНАП примерно такая же, что и у предыдущего образца УНАП и составляет ~ 2-3 угловых минуты (СКО), что объясняется наличием прочих источников погрешности.

## **ГЛАВА 4 МЕТОДИКА И АЛГОРИТМЫ КОМПЕНСАЦИИ НЕИДЕНТИЧНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК РАДИОЧАСТОТНЫХ БЛОКОВ**

### **4.1 Постановка задачи**

Преыдушие главы посвящены оценке параметров сигналов РЧБ, то есть сигналов промежуточной частоты. Такие практически ценные характеристики как разности фаз, сдвиги несущей частоты и задержки фазы дальномерного кода для сигналов ПЧ и сигналов несущей частоты связаны, но не совпадают. Под действием внешней среды и внутренних процессов характеристики РЧБ становятся нестабильны – изменяются амплитудные и фазочастотные характеристики (ФЧХ), происходит дрейф частоты ОГ, приводящий к случайному сдвигу шкалы времени приемника относительно системной.

Погрешности измерения задержки и доплеровского сдвига частоты, вызванные нестабильностью или неизвестностью параметров РЧБ, в достаточной мере компенсируются. Их вклад в общий бюджет погрешности для большинства приложений меньше шумовых ошибок [2, 5]. Иначе обстоят дела с фазовыми измерениями, в частности с измерением разностей фаз. Вызванные ошибки фазовых измерений, если не применять мер противодействия, могут оказаться сопоставимы с периодом фазы [50, 32].

Преобразование РФ сигналов несущей частоты в РФ сигналов ПЧ определяется разностью фазочастотных характеристик РЧБ. Напомним, как сказано во Введении, под сигналами несущей частоты понимаются сигналы АМ. Искажения, обусловленные антенными модулями, в работе не рассматриваются. Подробнее с этой проблематикой можно ознакомиться в [51].

Наравне с ФЧХ можно пользоваться характеристикой группового времени запаздывания (ГВЗ), которая связана с первой операциями дифференцирования/интегрирования.

Согласно условиям задачи, первичная обработка сигналов должна обеспечивать измерения РФ, для которых допустимо смещение, если это смещение совпадает для РФ всех НКА. Связано это с тем, что алгоритмы вторичной обработки используют вторые разности фаз, при вычислении которых смещения компенсируются.

Следует напомнить, что под вторыми разностями фаз (ВРФ) понимается разность РФ, соответствующих одной и той же паре антенн, но разным НКА:

$$\Delta\psi_{m,k}^{(n)} = \psi_{m,k}^{(n)} - \psi_{m,k}^{(1)} \quad (4.1)$$

для сигналов ПЧ и

$$\Delta\psi_{m,k}^{RF,(n)} = \psi_{m,k}^{RF,(n)} - \psi_{m,k}^{RF,(1)} \quad (4.2)$$

для сигналов несущей частоты.

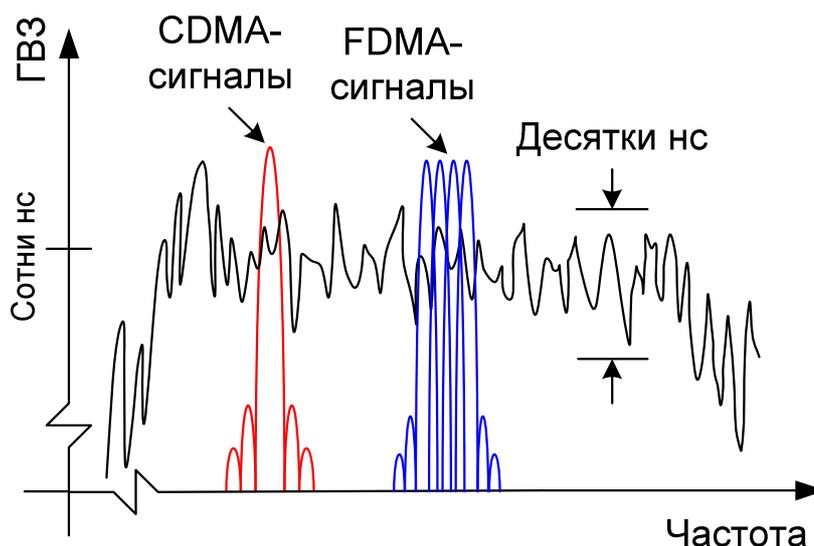


Рисунок 60. Различия воздействия запаздывания в РЧБ на CDMA и FDMA сигналы

Если разница в ФЧХ РЧБ совпадает для сигналов различных НКА  $n$  и  $l$ , то необходимости в коррекции РФ не возникает – РФ  $\psi_m^{(n)}$  и  $\psi_m^{(l)}$  смещены на одну и ту же величину, а значит, значение ВРФ сигналов ПЧ и несущей частоты совпадают:  $\Delta\psi_{m,k}^{RF,(n)} \approx \Delta\psi_{m,k}^{(n)}$ .

При использовании сигналов с кодовым разделением (CDMA), например, существующих сигналов GPS или перспективных сигналов ГЛОНАСС с кодовым разделением, несущие и промежуточные частоты всех спутников

приблизительно совпадают (см. рис. 60). Следовательно, РФ получают одинаковый фазовый сдвиг, необходимости в коррекции не возникает.

Для подтверждения данного тезиса был проведен эксперимент с применением имитатора навигационных сигналов и макета УНАП, реализующего алгоритмы, синтезированные в предыдущей главе. На рисунке 61 изображены графики дрейфа ошибок первой РФ, вызванных изменением параметров РЧБ (тренд графика) и тепловым шумом (высокочастотные ошибки). Графики на рисунке соответствуют нескольким CDMA сигналам GPS. Из графиков можно сделать вывод, что смещения первых РФ, вызванные неидентичностью РЧБ, в этом случае практически совпадают – разница составляет не более 1-2 мм.

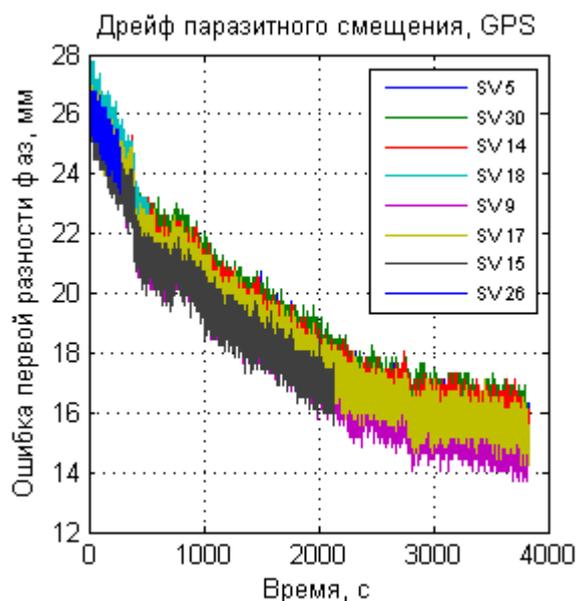


Рисунок 61. Дрейф суммы ошибок разности фаз, вызванных воздействием шума и неидентичностью РЧБ, в случае приема 8 CDMA сигналов GPS C/A

В случае использования сигналов ГЛОНАСС с частотным разделением (FDMA) сигналам каждого НКА соответствует своя литерная частота. Значения ФЧХ для  $n$ -го и  $l$ -го спутника могут отличаться, их РФ получают разные сдвиги, а ВРФ сигналов несущей частоты будет отличаться от ВРФ промежуточной частоты. Если не применять мер, направленных на пересчет РФ ПЧ в РФ несущей частоты, вычисленные по ним параметры угловой ориентации, будут содержать значительные ошибки.

На рисунке 62 изображены графики, аналогичные приведенным на рисунке 61, но полученные для сигналов с частотным разделением. Для получения зависимостей использовался тот же макет, эксперименты проводились одновременно.

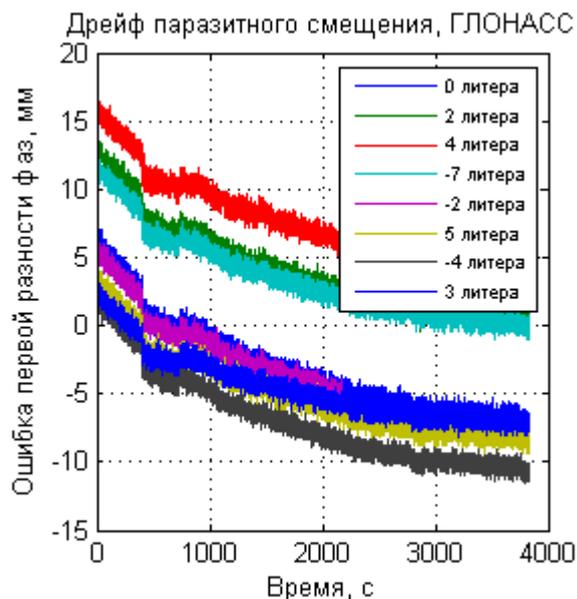


Рисунок 62. Дрейф суммы ошибок разности фаз, вызванных воздействием шума и неидентичностью РЧБ, в случае приема 8 FDMA сигналов ГЛОНАСС СТ

Из графиков можно сделать вывод, что разности смещений первых РФ, вызванных неидентичностью РЧБ, для разработанного макета в случае приема сигналов с частотным разделением составляют 10-20 мм, что значительно больше шумовых ошибок. Таким образом, если не применять мер противодействия, неидентичность РЧБ при приеме FDMA сигналов ГЛОНАСС повысит погрешность относительных фазовых измерений на порядок. Для устранения того эффекта необходимо разработать алгоритм или методику, которые позволили бы провести пересчет измерений РФ ПЧ в РФ несущей частоты.

## 4.2 Обзор известных решений

Поставленная задача снижения влияния неидентичности фазочастотных характеристик не нова. Известен ряд технических решений данной проблемы,

которые можно разделить на методы калибровки и методы использования одного РЧБ [32].

Во втором случае для обработки сигналов всех приемных антенн используется один РЧБ. Для возможности же распознавания сигналов разных антенн применяется дополнительное кодовое или временное разделение. Основным минус данного подхода - существенное, на 4-5 дБ и более, снижение помехоустойчивости.

Схожие проблемы возникают при использовании калибровочных методов – усложнение унификации, снижение помехоустойчивости. Процесс калибровки может требовать периодических пауз в решении основных навигационных задач.

При мультисистемном решении возможен и третий подход – отбросить измерения по сигналам ГЛОНАСС, либо учитывать их с меньшим весом [50].

### **4.3 Разработка методики компенсации неидентичности характеристик радиочастотных блоков**

Предлагается дополнить УНАП коммутаторами, производящими циклическое переключение радиочастотных блоков (см. рис. 63) по команде вычислителя. При этом появляется возможность наблюдения сигналов каждого из АМ через каждый из РЧБ.

Описание предлагаемой методики в случае произвольного числа АМ достаточно громоздко и ненаглядно, поэтому ограничимся рассмотрением случая УНАП с тремя антеннами.

Аппаратно переключение реализуется с помощью двух коммутаторов – высокочастотного и цифрового.

Высокочастотный коммутатор представляет собой СВЧ-устройство, подключаемое в разрыв между АМ и РЧБ. Высокочастотный коммутатор управляется цифровыми сигналами вычислителя (см. рис. 64).

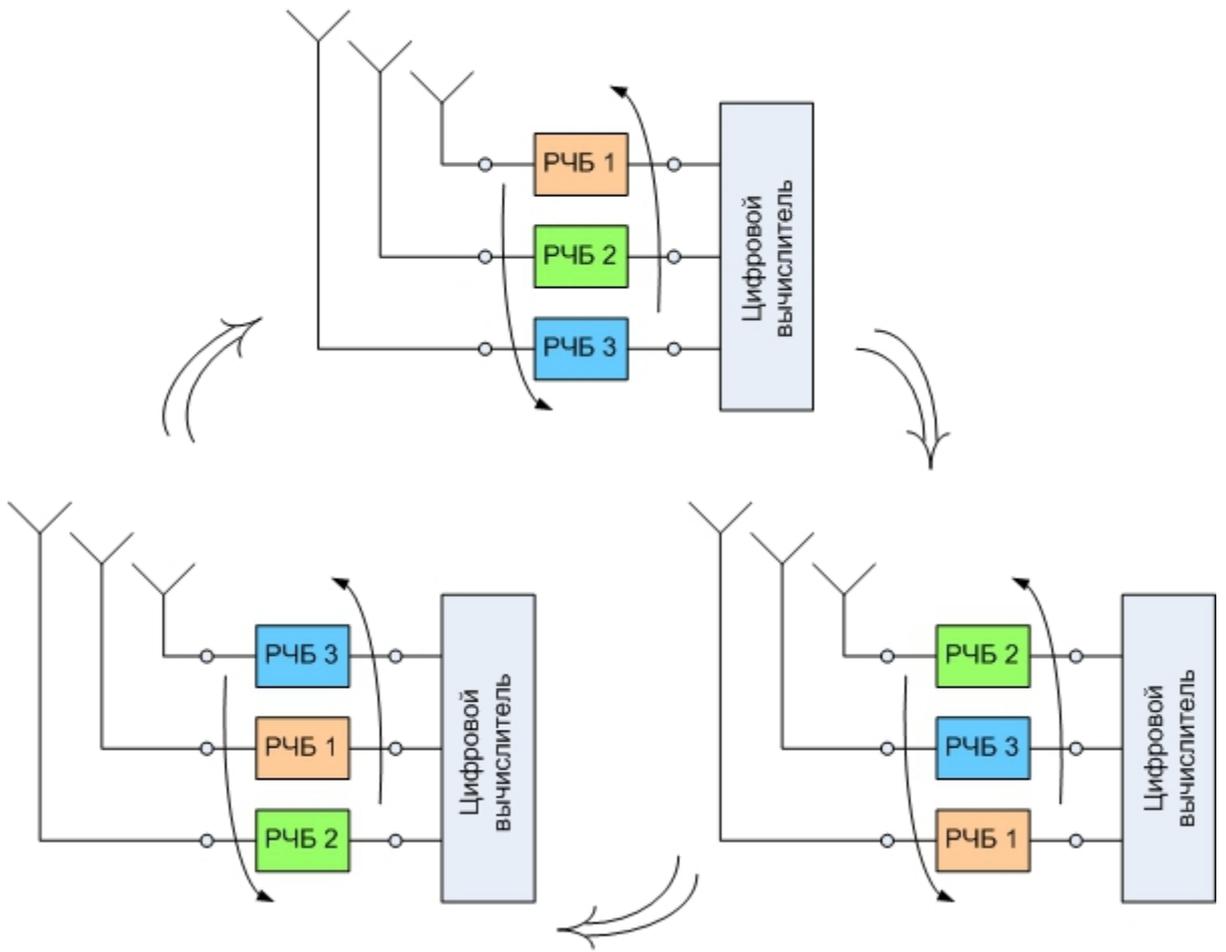


Рисунок 63. Циклическое переключение РЧБ

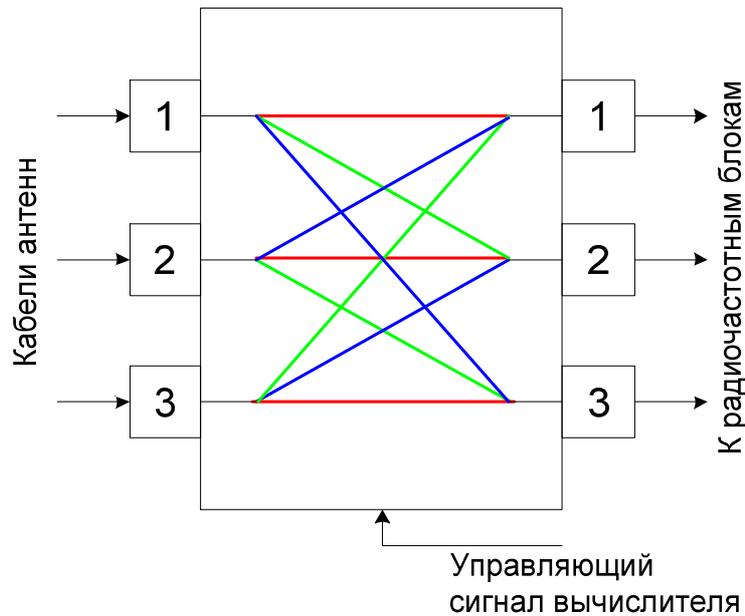


Рисунок 64. Три состояния высокочастотного коммутатора

Схемотехнически высокочастотный коммутатор выполняется на многослойной печатной плате, на которой размещены интерфейсы

радиочастотных соединений, шины управляющих сигналов и, в случае трех антенн, 6 микросхем SP3T (Single pole, 3 throw – 3x1) радиочастотных переключателей. В качестве радиочастотных переключателей (RF switch) используются, например, микросхемы Hittite Microwave HMC245QS16E (см. рис. 65).

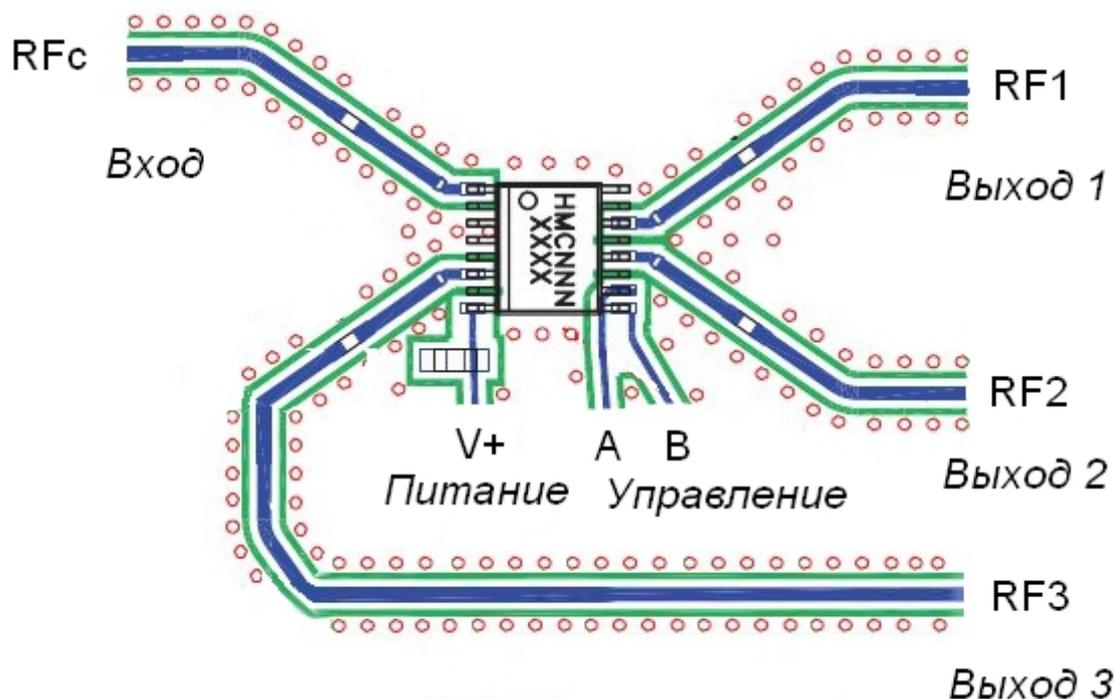


Рисунок 65. Пример расположения на печатной плате SP3T переключателя

Переключатели двунаправлены, соответственно их можно использовать как устройства с одним входом (RFc), но тремя выходами (RF1, RF2, RF3) или как устройства с тремя входами (RF1, RF2, RF3) и одним выходом (RFc).

Все переключатели можно разделить на две группы по 3 шт – входную и выходную. Сигналы трех АМ подаются на три канала RFc трех переключателей входной группы. Каналы RFc переключателей выходной группы соединены с входами трех РЧБ (по одному РЧБ на один переключатель). Каналы RF1, RF2, RF3 переключателей входной группы соединены с каналами RF1, RF2, RF3 выходной группы: первый канал первого переключателя входной группы с первым каналом первого переключателя выходной группы, второй канал первого переключателя входной группы с первым каналом второго переключателя выходной группы и т.д., всего 9 соединений.

Управляющими сигналами А и В каждого переключателя устанавливается одно из трех состояний коммутатора (см. рис. 64).

При создании высокочастотного коммутатора важны следующие характеристики переключателя:

- высокая скорость переключения (около 40 нс для указанной микросхемы);
- высокие показатели взаимной изоляции каналов (43 дБ для указанной микросхемы);
- степень линейности, превышающая линейность РЧБ (IP3 около 45 дБ).

Второй коммутатор реализуется в логической схеме блока корреляторов, производя подключение от требуемого АЦП.

Таким образом достигается эффект циклического переключения РЧБ. Появляется возможность определить и скомпенсировать вторые разности набегов фазы при прохождении сигнала в разных РЧБ.

#### 4.4 Модель разности фаз при работе коммутатора

Математическая модель сигнала  $n$ -го НКА на выходе  $m$ -ого АМ:

$$S_{a,m}^{(n)}(t) = A_a^{(n)} h_{a,m}^{(n)}(t) \cos(\omega_0^{(n)}(t - t_0) + \varphi_{a,m}^{(n)}(t)) \quad (4.3)$$

где  $\omega_0^{(n)}$  - несущая частота,  $h_a^{(n)}$  - функция манипуляции символами ДК и НИ,  $A_a^{(n)}$  - амплитуда.

Через антенные кабели сигнал поступает в высокочастотный коммутатор, проходит РЧБ, в котором он умножается на опорные гетеродинные колебания, фильтруется и усиливается. Затем производится аналого-цифровое преобразование и посредством цифрового коммутатора сигнал поступает на вход коррелятора. Модель сигнала  $m$ -го АМ на выходе РЧБ задается выражением (1.2), которое представим в виде

$$y_{m,i}^{(n)} = S_{m,i}^{(n)} + n_{m,i}^{(n)} = A^{(n)} h^{(n)}(t_i) \cos(\omega_{if}^{(n)} t_i + \varphi_{m,i}^{(n)}) + n_{m,i}^{(n)}, \quad (4.4)$$

где  $h^{(n)}(t_{i1})$  - функция модуляции ДК и НИ на выходе РЧБ

$$\varphi_i^{(n)} = \varphi_i^{(n)}(t_i) = \widehat{\varphi}_{xo,i}^{(n)} + \widehat{\varphi}_{s,m,i}^{(n)}. \quad (4.5)$$

Запишем математическую модель, связывающую фазы  $\varphi_{a,m}^{(n)}(t_i)$  и  $\varphi_{m,i}^{(n)}$  сигналов  $n$ -го спутника на выходах трех АМ и входах трех корреляторов в различных положениях коммутаторов в некоторый момент  $t = t_i$  :

1) в первом положении коммутаторов

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(n,1)} &= \varphi_{a,1}^{(n)} + \chi_{11}^{(n)} + \alpha_1^{(n)}; \\ \varphi_2^{(n,1)} &= \varphi_{a,2}^{(n)} + \chi_{22}^{(n)} + \alpha_2^{(n)}; \\ \varphi_3^{(n,1)} &= \varphi_{a,3}^{(n)} + \chi_{33}^{(n)} + \alpha_3^{(n)}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

2) во втором положении коммутаторов

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(n,2)} &= \varphi_{a,1}^{(n)} + \chi_{12}^{(n)} + \alpha_2^{(n)}; \\ \varphi_2^{(n,2)} &= \varphi_{a,2}^{(n)} + \chi_{23}^{(n)} + \alpha_3^{(n)}; \\ \varphi_3^{(n,2)} &= \varphi_{a,3}^{(n)} + \chi_{31}^{(n)} + \alpha_1^{(n)}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

3) в третьем положении коммутаторов

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(n,3)} &= \varphi_{a,1}^{(n)} + \chi_{13}^{(n)} + \alpha_3^{(n)}; \\ \varphi_2^{(n,3)} &= \varphi_{a,2}^{(n)} + \chi_{21}^{(n)} + \alpha_1^{(n)}; \\ \varphi_3^{(n,3)} &= \varphi_{a,3}^{(n)} + \chi_{32}^{(n)} + \alpha_2^{(n)}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где  $\varphi_m^{(n,p)}$  - фаза на входе коррелятора для сигнала  $n$ -го спутника с  $m$ -ого АМ в  $p$ -ом положении коммутаторов,  $\varphi_{a,m}^{(n)}$  - фаза сигнала  $n$ -го спутника на выходе  $m$ -ого АМ,  $\chi_{mj}^{(n)}$  - набег фазы при прохождении сигнала  $n$ -го спутника с  $m$  входа на  $j$ -ый выход высокочастотного коммутатора,  $\alpha_j^{(n)}$  - набег фазы при прохождении сигнала  $n$ -го спутника  $j$ -ого РЧБ, включая сдвиг фазы, вызванный нестабильностью частоты гетеродинирующего колебания.

На основании (4.6), (4.7), (4.8) для первых разностей фаз  $\psi_m^{(n,p)} = \varphi_m^{(n,p)} - \varphi_1^{(n,p)}$  можно записать:

1) в первом положении коммутаторов

$$\begin{aligned}\psi_2^{(n,1)} &= \psi_{a,2}^{(n)} + \chi_{22}^{(n)} - \chi_{11}^{(n)} + \Delta_2^{(n)}; \\ \psi_3^{(n,1)} &= \psi_{a,3}^{(n)} + \chi_{33}^{(n)} - \chi_{11}^{(n)} + \Delta_3^{(n)},\end{aligned}\quad (4.9)$$

2) во втором положении коммутаторов

$$\begin{aligned}\psi_2^{(n,2)} &= \psi_{a,2}^{(n)} + \chi_{23}^{(n)} - \chi_{12}^{(n)} + \Delta_3^{(n)} - \Delta_2^{(n)}; \\ \psi_3^{(n,2)} &= \psi_{a,3}^{(n)} + \chi_{31}^{(n)} - \chi_{12}^{(n)} - \Delta_2^{(n)},\end{aligned}\quad (4.10)$$

3) в третьем положении коммутаторов

$$\begin{aligned}\psi_2^{(n,3)} &= \psi_{a,2}^{(n)} + \chi_{21}^{(n)} - \chi_{13}^{(n)} - \Delta_3^{(n)}; \\ \psi_3^{(n,3)} &= \psi_{a,3}^{(n)} + \chi_{32}^{(n)} - \chi_{13}^{(n)} + \Delta_2^{(n)} - \Delta_3^{(n)},\end{aligned}\quad (4.11)$$

где  $\psi_{a,m}^{(n)} = \varphi_{a,m}^{(n)} - \varphi_{a,1}^{(n)}$  - первая разность фаз сигналов  $n$ -го НКА на выходе  $m$ -го и первого АМ,  $\Delta_j^{(n)} = \alpha_j^{(n)} - \alpha_1^{(n)}$  - первая разность набегов фазы в  $j$ -ом и первом РЧБ для сигнала  $n$ -го спутника

В первом положении коммутаторов, взяв за базовый спутник  $b$ , для вторых разностей фаз  $\Delta\psi_m^{(n,1)} = \psi_m^{(n,1)} - \psi_1^{(b,1)}$  получаем:

$$\begin{aligned}\Delta\psi_2^{(n,1)} &= \Delta\psi_{a,2}^{(n)} + \Delta(\chi_{22}^{(n)} - \chi_{11}^{(n)}) + \nabla_2^{(n)}; \\ \Delta\psi_3^{(n,1)} &= \Delta\psi_{a,3}^{(n)} + \Delta(\chi_{33}^{(n)} - \chi_{11}^{(n)}) + \nabla_3^{(n)},\end{aligned}\quad (4.12)$$

где  $\Delta\psi_{a,m}^{(n)} = \psi_{a,m}^{(n)} - \psi_{a,m}^{(b)}$  - вторая разность фаз сигналов на выходах АМ  $m$  и 1 для спутников  $n$  и  $b$ , требуемая для решения угломерной задачи;  $\Delta(\chi_{m1c1}^{(n)} - \chi_{m2c2}^{(n)}) = (\chi_{m1c1}^{(n)} - \chi_{m2c2}^{(n)}) - (\chi_{m1c1}^{(b)} - \chi_{m2c2}^{(b)})$  - вторая разность фазовых набегов в высокочастотном коммутаторе;  $\nabla_j^{(n)} = \Delta_j^{(n)} - \Delta_j^{(b)}$  - вторая разность фазовых набегов в  $j$ -ом и первом РЧБ для НКА  $n$  и  $b$ .

Последние два слагаемые в (4.12) приводят к смещению искомым вторых разностей фаз сигналов приемных точек. Оценим их величины.

Исследование опытного высокочастотного коммутатора с помощью векторного анализатора цепей показало, что в требуемом диапазоне частот групповое время запаздывания изменяется пренебрежимо мало. В таблице 3.1

приведены полученные значения ГВЗ для диапазона L1. Тогда при разности несущих частот  $n$ -го и  $b$ -го спутника в 10 МГц максимальное значение второй разности фазовых набегов в высокочастотном коммутаторе составит менее  $\frac{1}{600}$  цикла, что пренебрежимо мало по сравнению с шумовой ошибкой.

Если пренебречь вкладом коммутатора, выражение (4.12) упрощается:

$$\begin{aligned}\Delta\psi_2^{(n,1)} &\approx \Delta\psi_{a,2}^{(n)} + \nabla_2^{(n)}; \\ \Delta\psi_3^{(n,1)} &\approx \Delta\psi_{a,3}^{(n)} + \nabla_3^{(n)}.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Как видно из (4.13), для компенсации оставшихся паразитных слагаемых достаточно определить вторые разности фазовых набегов в радиочастотных блоках  $\nabla_j^{(n)}$  (либо функционально связанные с ними  $\Delta_j^{(n)}$ ).

Таблица 3.1 Запаздывания в высокочастотном коммутаторе

Групповое время запаздывания, пс			
Выход \ Вход	1	2	3
1	573	672	672
2	676	670	693
3	740	736	710

При переключении коммутаторов из состояния  $p1$  в состояние  $p2$  в фазах, первых и вторых разностях фаз происходят «скачки» - они меняются от уровня  $\varphi_m^{(n,p1)}$  до  $\varphi_m^{(n,p2)}$ , от  $\psi_m^{(n,p1)}$  до  $\psi_m^{(n,p2)}$  и от  $\Delta\psi_m^{(n,p1)}$  до  $\Delta\psi_m^{(n,p2)}$  соответственно. Например, для первой разности фаз:

$$\begin{aligned}J_2^{(n,2)} &= \psi_2^{(n,2)} - \psi_2^{(n,1)}, \\ J_3^{(n,2)} &= \psi_3^{(n,2)} - \psi_3^{(n,1)}\end{aligned}\tag{4.14}$$

соответствует скачку РФ при переходе из первого положения во второе, а

$$\begin{aligned}
 J_2^{(n,3)} &= \psi_2^{(n,3)} - \psi_2^{(n,1)}, \\
 J_3^{(n,3)} &= \psi_3^{(n,3)} - \psi_3^{(n,1)}
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

соответствует виртуальному скачку РФ при переходе из первого положения в третье, что есть сумма реальных скачков 1->2 и 2->3.

На рисунке бб изображена реализация измерений РФ при приеме сигналов ГЛОНАСС и работе коммутатора. Отчетливо видны 3 уровня РФ, соответствующие работе по трем разным парам РЧБ.

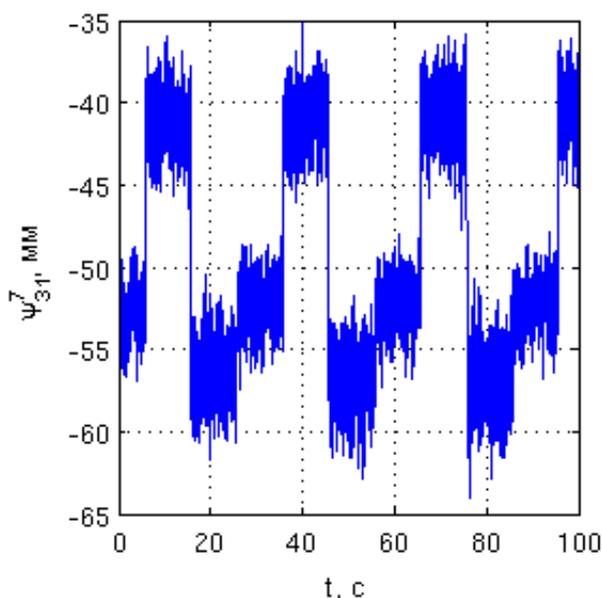


Рисунок бб. Скачкообразное изменение разности фаз сигналов промежуточной частоты, соответствующих 3 и 1 АМ при приеме сигналов 7 НКА ГЛОНАСС

При выборе темпа коммутации возможны два подхода: переключение с темпом значительно меньшим темпа работы систем слежения, либо прохождение полного цикла переключений за длительность одного периода дальномерного кода. Второй подход приводит к существенному усложнению аппаратуры, поэтому рассмотрим вариант с низким темпом коммутаций.

#### **4.5 Алгоритм коррекции разностей фаз по измерениям скачков**

Очевидно, что по измерениям разностей фаз в трех положения коммутатора можно измерить величину «скачков» с неоднозначностью в  $2\pi$ .

Сам алгоритм измерений изложен ниже, а сейчас обоснуем возможность использования результата измерений скачков для пересчета вторых РФ сигналов ПЧ во вторые РФ сигналов АМ.

Величины скачков первой РФ на основании (4.9), (4.10) и (4.11) равны:

1) между 1 и 2 положением коммутаторов

$$\begin{aligned} J_2^{(n,2)} &= \chi_{23}^{(n)} - \chi_{12}^{(n)} - \chi_{22}^{(n)} + \chi_{11}^{(n)} + \Delta_3^{(n)} - 2\Delta_2^{(n)}; \\ J_3^{(n,2)} &= \chi_{31}^{(n)} - \chi_{12}^{(n)} - \chi_{33}^{(n)} + \chi_{11}^{(n)} - \Delta_2^{(n)} - \Delta_3^{(n)}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

2) между 1 и 3 положением коммутаторов

$$\begin{aligned} J_2^{(n,3)} &= \chi_{21}^{(n)} - \chi_{13}^{(n)} - \chi_{22}^{(n)} + \chi_{11}^{(n)} - \Delta_2^{(n)} - \Delta_3^{(n)}; \\ J_3^{(n,3)} &= \chi_{32}^{(n)} - \chi_{13}^{(n)} - \chi_{33}^{(n)} + \chi_{11}^{(n)} + \Delta_2^{(n)} - 2\Delta_3^{(n)}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Согласно выражениям (4.16), (4.17)  $J_2^{(n,2)} = -J_3^{(n,3)} + f(\chi)$ , а  $J_3^{(n,2)} = J_2^{(n,3)} + f(\chi)$ . Если первые разности задержек в высокочастотном коммутаторе изменяются слабо, то  $f(\chi) \approx 0$ , и число измеряемых скачков можно уменьшить до двух. Но на экспериментальном образце равенство выполнялось недостаточно точно, поэтому ниже излагается вариант с оценкой четырех величин.

Пусть имеем измерения «скачков» разности фаз сигналов  $n$ -го НКА, принимаемых  $m$ -ой и первой антеннами при переключении коммутаторов из 1-го состояния в  $p$ -ое:

$$\hat{j}_m^{(n,p)} = J_m^{(n,p)} + 2\pi N_m^{(n,p)} + n_{J,m}^{(n,p)}, \quad (4.18)$$

где  $n_{J,m}^{(n,p)}$  - шум измерений,  $N_m^{(n,p)} \in \mathbb{Z}$ .

Для определения вторых разностей фазовых набегов в РЧБ предлагается использовать разности измерений «скачков» разности фаз (4.18), приведенные к интервалу  $[-\pi; \pi]$ :

$$\Delta \hat{J}_m^{(n,p)} = \text{mod}_{\pm\pi} \left[ \hat{J}_m^{(n,p)} - \hat{J}_m^{(b,p)} \right] \quad (4.19)$$

Как показано ранее, величина необходимых поправок  $\nabla_2^{(n)}$ ,  $\nabla_3^{(n)}$  принимает значения по модулю до одной десятой/одной пятой  $\pi$ . Шумы измерений значительно меньше. Величиной вторых разностей фазовых набегов в высокочастотном коммутаторе уже можно пренебречь. Тогда можно записать:

$$\begin{aligned}\Delta\hat{J}_2^{(n,2)} &\approx -2\nabla_2^{(n)} + \nabla_3^{(n)} + n_{J,2}^{(n,2)} - n_{J,2}^{(b,2)}; \\ \Delta\hat{J}_3^{(n,2)} &\approx -\nabla_2^{(n)} - \nabla_3^{(n)} + n_{J,3}^{(n,2)} - n_{J,3}^{(b,2)}; \\ \Delta\hat{J}_2^{(n,3)} &\approx -\nabla_2^{(n)} - \nabla_3^{(n)} + n_{J,2}^{(n,3)} - n_{J,2}^{(b,3)}; \\ \Delta\hat{J}_3^{(n,3)} &\approx \nabla_2^{(n)} - 2\nabla_3^{(n)} + n_{J,3}^{(n,3)} - n_{J,3}^{(b,3)}.\end{aligned}\tag{4.20}$$

На основании (4.20) определяем оценки вторых разностей фазовых набегов радиочастотных блоков по методу наименьших квадратов:

$$\begin{vmatrix} \hat{\nabla}_2^{(n)} \\ \hat{\nabla}_3^{(n)} \end{vmatrix} = \frac{1}{15} \times \begin{vmatrix} -4 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -3 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta\hat{J}_2^{(n,2)} \\ \Delta\hat{J}_3^{(n,2)} \\ \Delta\hat{J}_2^{(n,3)} \\ \Delta\hat{J}_3^{(n,3)} \end{vmatrix}.\tag{4.21}$$

Далее измеренные вторые разности фазовых набегов радиочастотных блоков (4.21) на основании (4.13) используются для пересчета измерений вторых РФ ПЧ  $\Delta\hat{\psi}_{ij}^{(n,1)}$  в измерения РФ сигналов АМ:

$$\begin{aligned}\Delta\hat{\psi}_{a,21}^{(n)} &= \Delta\hat{\psi}_{21}^{(n,1)} - \hat{\nabla}_{21}^{(n)}; \\ \Delta\hat{\psi}_{a,31}^{(n)} &= \Delta\hat{\psi}_{31}^{(n,1)} - \hat{\nabla}_{31}^{(n)}.\end{aligned}\tag{4.22}$$

Ввиду особенностей канальной организации программного обеспечения навигационных приемников, часто удобнее производить коррекцию первых разностей фаз. В этом случае величины измерений «скачков»  $\hat{J}_m^{(n,p)}$  разности фаз должны различаться не более чем на  $\pi$  для различных  $n$ . Этого можно достичь использованием некоторой буферной переменной, хранящей значение для базового канала. Алгоритмы обработки получаются из (4.21), (4.22) заменой  $\hat{\nabla}_m^{(n)}$  на  $\hat{\Delta}_m^{(n)}$ ,  $\Delta\hat{J}_m^{(n,p)}$  на  $\hat{J}_m^{(n,p)}$ ,  $\Delta\hat{\psi}_{a,m}^{(n)}$  на  $\hat{\psi}_{a,m}^{(n)}$ ,  $\Delta\hat{\psi}_m^{(n)}$  на  $\hat{\psi}_m^{(n)}$ .

## 4.6 Изменение алгоритмов первичной обработки сигналов при использовании коммутатора радиочастотных блоков

В предыдущем разделе показано, что оценки скачков РФ сигналов ПЧ могут быть использованы для расчета искомым РФ АМ.

Введение коммутации РЧБ изменяет наблюдаемые реализации сигналов, что необходимо учесть в алгоритмах обработки.

### 4.6.1 Модель наблюдений при работе коммутатора РЧБ

Как было сказано ранее, характерная разность задержек РЧБ составляет около 1 см, то есть десятки пикосекунд. Таким изменением задержки ДК можно пренебречь. Тогда используемая ранее модель сигналов (1.15) обобщается на случай работы коммутатора как:

$$S_{m,k,l}^{com}(\lambda_k, \mu_k) = A G_c \left( t_{k,l} - (\tau_{1,k} + \Delta\tau_{m,k}) \right) \times \cos \left( \omega_{if} t_{k,l} + (\omega_{1,k} + \psi'_{m,k})(l-1)T_d + \varphi_{1,k}^{com} + \psi_{m,k} + \sum_{j=2}^P J_{m,k}^{(j)} \delta_{pj} \right), \quad (4.23)$$

где  $\delta_{pj}$  - символ Кронекера,  $p$  – известный номер состояния коммутатора, изменяющийся от 1 до  $P$ ,  $J_{0,k}^j = 0$  для любого  $j$ , а в общую начальную фазу включен скачок фазы для сигнала ПЧ, соответствующего первому АМ:

$$\varphi_{1,k}^{com} = \left[ \varphi_{1,k} + \delta_{2p} \left( \chi_{12}^{(n)} - \chi_{11}^{(n)} + \Delta_2^{(n)} \right) + \delta_{3p} \left( \chi_{13}^{(n)} - \chi_{11}^{(n)} + \Delta_3^{(n)} \right) \right]_{-\pi;\pi}. \quad (4.24)$$

Как доказывается в П.2.1 Приложения, условные и априорные распределения общей начальной фазы при этом не изменяются:

$$p(\varphi_{1,k}^{com}) = p(\varphi_{1,k}) = p(\varphi_{1,k}^{com} | \mathbf{x}_k) = p(\varphi_{1,k} | \mathbf{x}_k) = \frac{1}{2\pi}, \quad (4.25)$$

$$\varphi_{1,k}, \varphi_{1,k}^{com} \in [-\pi; \pi].$$

Зададим модель изменения величины скачка РФ как узкополосный Марковский процесс

$$J_{m,k}^p = J_{m,k-1}^p + \xi_{J,m,k}^p, \quad (4.26)$$

где  $\xi_{J,m,k}^p$  - дискретный БГШ с дисперсией  $\sigma_{\xi_J}^2$  и нулевым математическим ожиданием.

Судя по тренду графиков на рисунках 61, 62 величину дисперсии формирующего шума можно оценить как  $\sigma_{\xi_J}^2 \approx 10^{-5} T (\delta \dot{a} \ddot{a})^2$

В качестве начального распределения скачков разности фаз можно принять нормальное с нулевым математическим ожиданием и СКО в десятую долю цикла.

Добавим в вектор информативных параметров и вектор состояния компоненты  $J_{m,k}^p$  для  $m = 2..M$ ,  $p = 2..P$ , образовав векторы  $\lambda_{c,k}$  и  $\mathbf{x}_{c,k}$ . Таким образом, они вырастут на  $(M-1)(P-1)$  элементов. В случае трех антенн коммутатор последовательно проходит три состояния, тогда векторы пополнятся на четыре элемента.

Обобщим полученное ранее решение задачи фильтрации параметров сигналов ПЧ на случай работы коммутатора РЧБ. Для чего определим апостериорную ПВ  $p(\mathbf{x}_{c,k} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  в гауссовом приближении.

#### 4.6.2 Изменения, вносимые в дискриминаторы информативных параметров

Расширим фильтрационный алгоритм ССРФ с учетом нового представления разности фаз.

Усредненная по неинформативной начальной фазе функция правдоподобия  $L(\mathbf{x}_{c,k})$  получается из (1.38) заменой

$$\psi_{m,k} \rightarrow \psi_{m,k} + \sum_{j=2}^P J_{m,k}^{(j)} \delta_{pj}, \quad (4.27)$$

что сопровождается увеличением числа её аргументов на  $(M-1)(P-1)$ .

В качестве опорного параметра для скачков РФ будем использовать компоненты вектора математических ожиданий  $\tilde{J}_{2,k}^2, \dots, \tilde{J}_{M,k}^2, \dots, \tilde{J}_{2,k}^P, \dots, \tilde{J}_{M,k}^P$  экстраполяционной ПВ.

Анализ показал, что в этом случае все дискриминаторы сохраняют свои выражения, но должны использовать аргумент

$$\tilde{\psi}_{m,k}^* = \tilde{\psi}_{m,k} + \sum_{j=2}^P \tilde{J}_{m,k}^{(j)} \delta_{pj} \quad (4.28)$$

вместо  $\tilde{\psi}_{m,k}$ .

Дискриминатор скачка РФ  $\tilde{J}_{m,k}^{(j)}$  совпадает с дискриминатором РФ, если  $j = p$ , иначе равен нулю:

$$u_{J,m,j}(\tilde{\lambda}_c) = \frac{\partial \ln L}{\partial J_{m,k}^j}(\tilde{\lambda}_c) = \begin{cases} u_{\psi,m}(\tilde{\lambda}_c), & j = p, \\ 0, & j \neq p. \end{cases} \quad (4.29)$$

### 4.6.3 Общий вид фильтров информационных параметров УНАП

Сохраним разделение алгоритмов на три фильтра. Фильтры частоты и задержки сохраняют свои структуры, отличаются лишь опорные сигналы дискриминаторов.

На замену фильтра РФ приходит совмещенный фильтр РФ и скачков РФ. Выделим вектор состояния:

$$\mathbf{x}_{\psi J,m,k} = \left| \begin{array}{cccccc} \psi_{m,k} & \psi'_{m,k} & \psi''_{m,k} & J_{m,k}^{(2)} & \dots & J_{m,k}^{(P)} \end{array} \right| \quad (4.30)$$

Тогда фильтрационный алгоритм можно описать выражением

$$\hat{\mathbf{x}}_{\psi J,m,k} = \tilde{\mathbf{x}}_{\psi J,m,k} + \mathbf{K}_{\psi J,m,k} \frac{u_{\psi m,k}}{S_{\psi}}, \quad (4.31)$$

где

$$\mathbf{K}_{\psi J,m,k,j} = \left| \begin{array}{c} (\mathbf{D}_{\psi Jm,k})_{11} + (\mathbf{D}_{\psi Jm,k})_{1(4+j)} \\ (\mathbf{D}_{\psi Jm,k})_{21} + (\mathbf{D}_{\psi Jm,k})_{2(4+j)} \\ (\mathbf{D}_{\psi Jm,k})_{31} + (\mathbf{D}_{\psi Jm,k})_{3(4+j)} \\ (\mathbf{D}_{\psi Jm,k})_{41} + (\mathbf{D}_{\psi Jm,k})_{4(4+j)} \\ \dots \\ (\mathbf{D}_{\psi Jm,k})_{(2+P)1} + (\mathbf{D}_{\psi Jm,k})_{(2+P)(4+j)} \end{array} \right| \mathbf{D}_{\tilde{\eta}_{\psi}}, \quad (4.32)$$

где

$$\mathbf{D}_{\hat{x}_{\psi m,k}}^{-1} = \mathbf{D}_{\hat{x}_{\psi m,k}}^{-1} + \mathbf{D}_{meas}^{-1}, \quad (4.33)$$

$$\mathbf{D}_{\hat{x}_{\psi m,k}} = \mathbf{F}_{\psi J} \mathbf{D}_{\hat{x}_{\psi J,m,k-1}} \mathbf{F}_{\psi J}' + \mathbf{D}_{xx},$$

$$\mathbf{F}_{\psi J} = \begin{pmatrix} 1 & T & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D}_{xx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_{\xi\psi} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{\xi J} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{\xi J} \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

$$\mathbf{D}_{meas}^{-1} = \begin{pmatrix} D_{\psi}^{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{\psi}^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{\psi}^{-1} \end{pmatrix}.$$

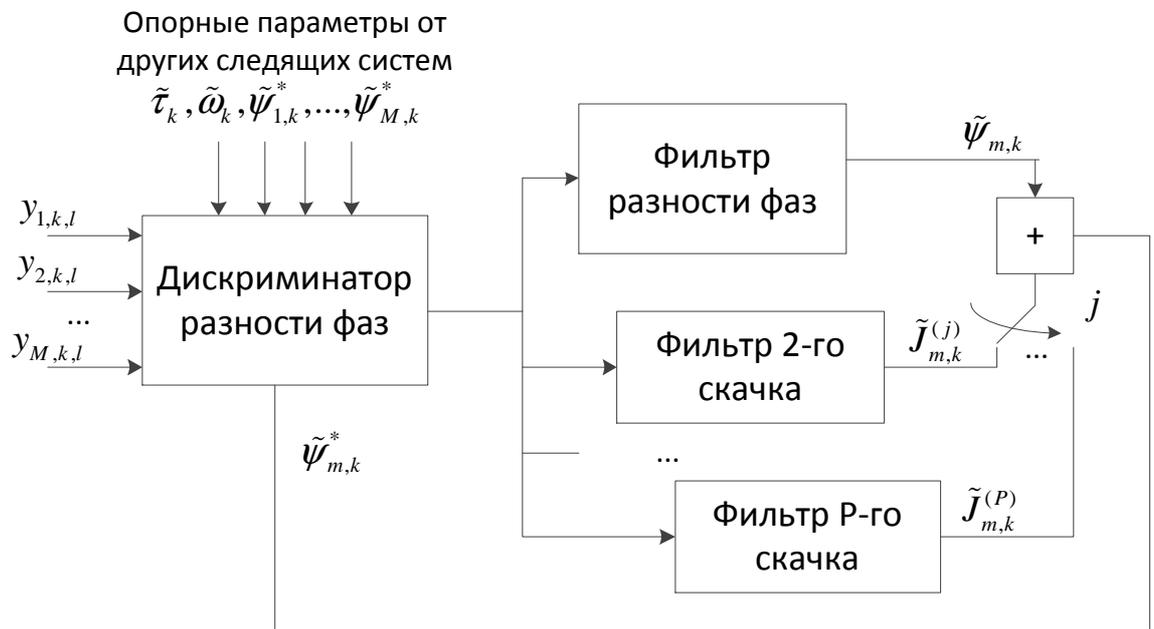


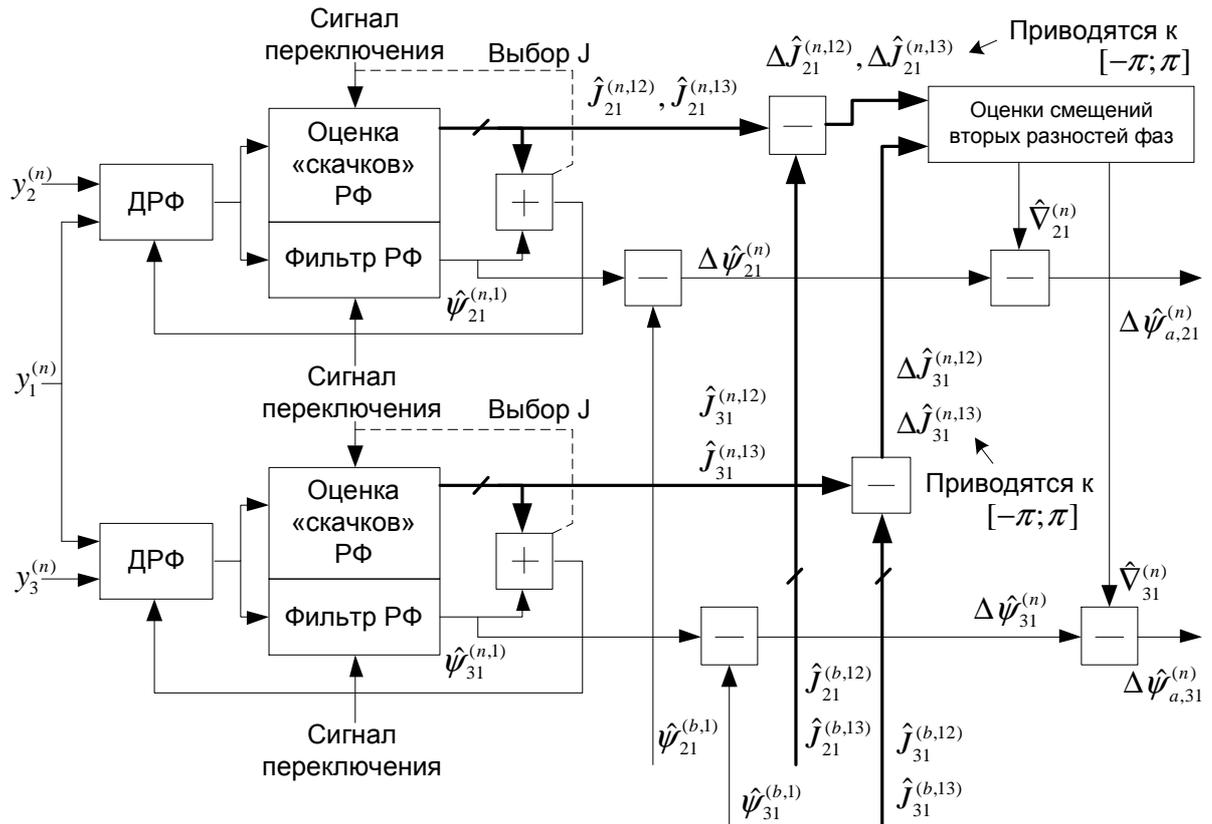
Рисунок 67. Структурная схема слежения за разностью фаз и скачками при коммутации радиочастотных блоков

Коэффициенты  $\mathbf{K}_{\psi J,m,k,j}$  не зависят от конкретной реализации наблюдений, поэтому могут быть просчитаны заранее и записаны в память УНАП. При практической реализации можно ограничиться некоторой

аппроксимацией коэффициентов, использовать единые коэффициенты для различных фаз коммутатора.

Структурная схема алгоритма слежения за разностью фаз и скачками (4.31) приведена на рисунке 67.

Итоговая структурная схема формирования измерений вторых разностей фаз (4.22) сигналов антенных модулей при оценке скачков с помощью алгоритма (4.31) представлена на рисунке 68.



От каналов обработки b-го спутника

Рисунок 68. Формирование измерений вторых разностей фаз сигналов антенных модулей

На рисунке 69 представлена структурная схема УНАП, реализующей упрощенный квазиоптимальный алгоритм измерения параметров сигналов промежуточной частоты и переключение РЧБ (на примере трехантенной УНАП).

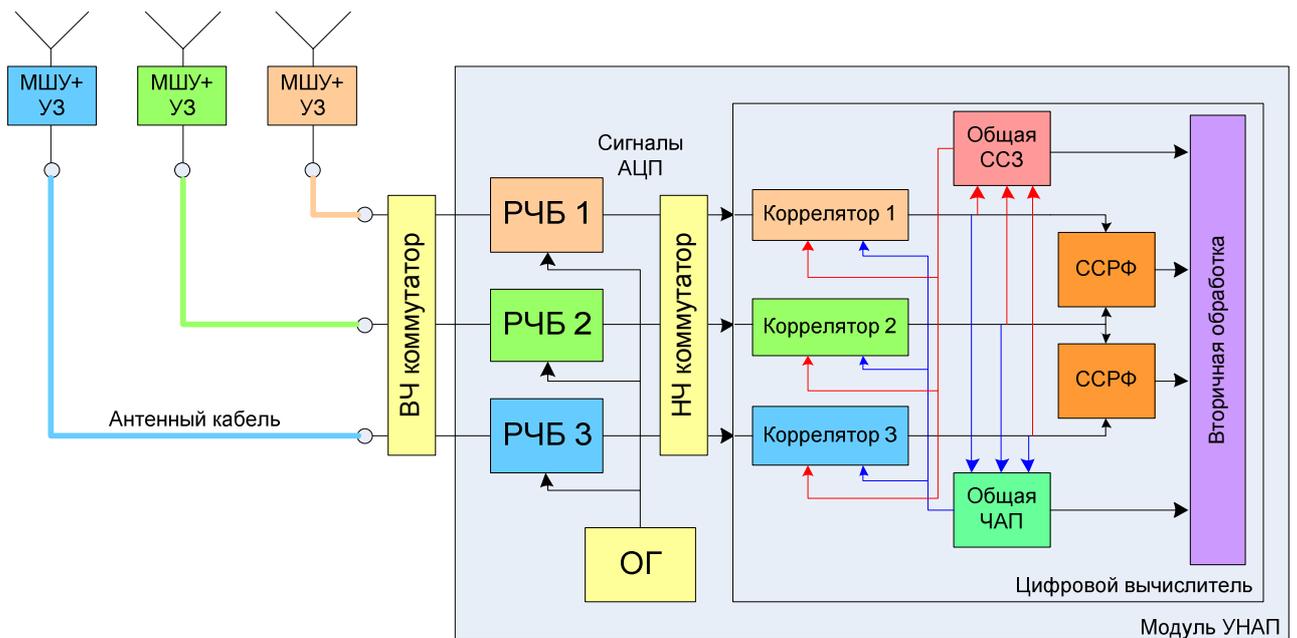


Рисунок 69. Структурная схема УАП, реализующей упрощенный квазиоптимальный алгоритм измерения параметров сигналов промежуточной частоты и переключение РЧБ (на примере трехантенной УАП)

#### 4.7 Результаты имитационного моделирования и натуральных испытаний УАП с алгоритмом коррекции разности фаз

Проведено имитационное моделирование работы представленного алгоритма с целью проверки его работоспособности и выявления ухудшения точностных характеристик относительно идеального случая – идентичности характеристик РЧБ.

Моделирование подтвердило работоспособность алгоритмов. На рисунке 70 представлен график изменения ошибки измерений РФ в первые минуты работы алгоритмов при частоте перекоммутации РЧБ 0.4 Гц и отношении сигнал/шум 40 дБГц. Из графика можно сделать вывод, что примерно через минуту слежение за РФ приходит к установившемуся режиму, возможно формирование точных оценок.

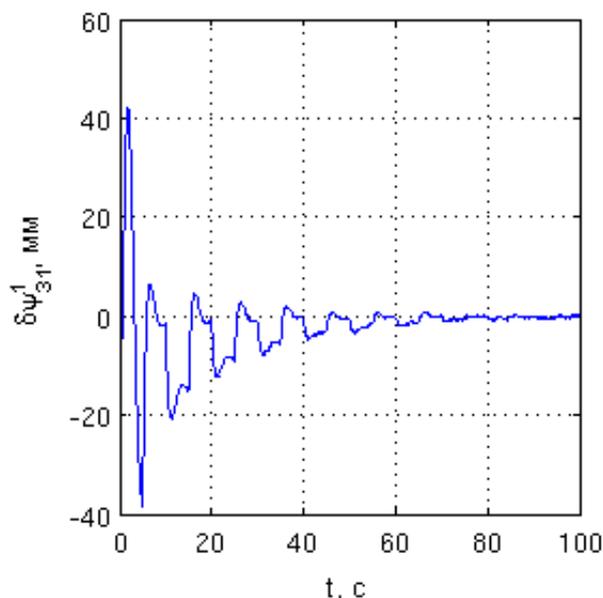


Рисунок 70. Ошибка измерения разности фаз в первые минуты после начала работы алгоритма

Графики среднеквадратической ошибки формируемых вторых РФ как функции отношения сигнал/шум представлены на рисунке 71 для двух случаев: моделирование при неидентичных РЧБ и использовании предложенного алгоритма компенсации; моделирование при идентичных РЧБ без применения коммутатора.

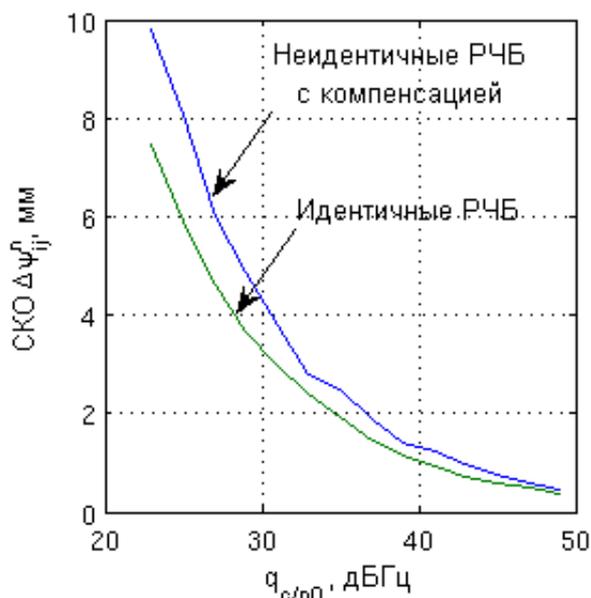


Рисунок 71. Иллюстрация ухудшения точности оценок вторых РФ при работе коммутатора относительно характеристик, получаемых при идентичных РЧБ без перекоммутаций

Анализ графиков показывает, что при неидентичных радиочастотных блоках и использовании предложенного алгоритма компенсации точность оценки второй разности фаз снижается примерно на 10% относительно потенциального случая идентичных радиочастотных блоков.

Выполнена реализация коммутирующих устройств и алгоритма обработки в опытном образце УНАП. Проведены эксперименты с использованием имитатора навигационных сигналов. Доказана работоспособность предложенного метода при реализации в УНАП. При энергетическом потенциале 40дБГц среднеквадратическая ошибка компенсации смещения второй разности фаз составляет около 0.25 мм.

Отметим, что недостатком предложенного метода является задержка выдачи точного решения на 30-60 секунд. Коммутация не должна производиться во время получения эфемеридной информации, необходимо время оценку параметров неидентичности радиочастотных блоков.

Преимуществами метода являются его простота, высокая точность компенсации неидентичности, возможность работы без перерывов в формировании измерений параметров ориентации.

#### **4.8 Выводы по главе**

Разработана методика компенсации неидентичности характеристик радиочастотных блоков, основанная на их циклическом переключении. Наблюдение за сигналами, прошедшими через различные РЧБ, позволяет оценить характеристики неидентичности РЧБ и провести коррекцию измерений вторых разностей фаз.

Составлена математическая модель разности фаз при работе коммутатора. Показано, что разности установившихся разностей фаз сигналов на выходах АЦП в различных положениях коммутаторов позволяют определить необходимые компенсационные слагаемые для коррекции измерений вторых разностей фаз.

В алгоритмы систем слежения за задержкой, частотой и разностью фаз, синтезированные в гл.2, внесены изменения, позволяющие сохранить их работоспособность в условии коммутации РЧБ. Кроме того, добавлена возможность оценки параметров неидентичности РЧБ.

Разработан алгоритм коррекции измерений вторых разностей фаз по оценкам параметров неидентичности РЧБ. Данный алгоритм позволяет выработать поправку к оценкам разностей фаз ПЧ, которая приводит к компенсации паразитного смещения измерений вторых разностей фаз.

Создана имитационная модель УНАП с коммутаторами и алгоритмами компенсации неидентичности характеристик РЧБ. Имитационным моделированием показано, что увеличение ошибок оценивания второй разности фаз при использовании предложенного подхода относительно потенциального уровня ошибок при использовании идеальных идентичных радиочастотных блоков составляет около 10% по СКО.

Предложенный комплекс программно-аппаратных средств реализован в угломерной аппаратуре потребителей. Проведены экспериментальные исследования комплекса, показавшие, что остаточная ошибка второй разности фаз составляет около четверти миллиметра (половина градуса) при исходной ошибке около 1-2 см.

Преимуществами разработанного метода являются его простота, высокая точность компенсации неидентичности характеристик РЧБ, возможность работы без перерывов в формировании измерений параметров ориентации.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Предложена математическая модель описания сигналов радио- и промежуточной частоты, принимаемых угломерной навигационной аппаратурой потребителей в пространственно разнесенных точках. Предложенная модель отличается от известных разделением параметров на две группы, одна из которых характеризует поступательное движение объекта относительно спутника (задержка, частота, «общая» фаза), а вторая – характеризует вращательное движение объекта (разности фаз сигналов).

2. Впервые сформулирована постановка задачи некогерентной обработки сигналов промежуточной частоты в угломерной НАП.

3. Синтезирован квазиоптимальный (в гауссовом приближении) некогерентный алгоритм оценки задержки, частоты и разности фаз сигналов промежуточной частоты, принятых на множестве пространственно разнесенных точек. Алгоритм включает оптимальные дискриминаторы соответствующих параметров и комплексный сглаживающий фильтр.

4. Синтезированный квазиоптимальный некогерентный алгоритм обработки позволяет разработчику выбирать опорные параметры дискриминаторов, а значит и опорные параметры корреляторов. В разработанных алгоритмах это позволило существенно упростить структуру корреляторов. В рамках одного канала обработки применяются одинаковые опорные сигналы для обработки наблюдений всех антенн. Это существенно упрощает коррелятор и снижает интенсивность обмена с ним.

5. Для синтезированных дискриминаторов разности фаз, частоты и задержки получены аналитические выражения для расчета дискриминационных характеристик и дисперсий шумов на выходе дискриминаторов.

Показано, что синтезированные дискриминаторы обладают замечательным свойством — дисперсия их эквивалентных наблюдений

снижается с увеличением числа антенн. При этом снижение происходит быстрее, чем  $1/N$ . Возможны различные интерпретации этого свойства. В терминах обработки сигналов: информация о разности фаз между сигналами позволяет провести их когерентное сложение вместо некогерентного. В терминах антенных систем: в процессе расчета дискриминационных функций производится фокусировка диаграммы направленности на навигационный аппарат. Таким образом, УНАП работает подобно АФАР.

6. Получены аналитические выражения для шумовой полосы дискретных следящих систем первого, второго и третьего порядков, входящих в состав синтезированного алгоритма обработки.

7. Разработана методика анализа потенциальных характеристик оценок параметров сигналов, принятых на множестве пространственно разнесенных точек, основанная на численном решении уравнений Стратоновича для апостериорной плотности вероятности оцениваемых параметров с последующим расчетом оптимальных, в том или ином смысле, оценок параметров сигналов по рассчитанной апостериорной ПВ.

8. Разработан ориентированный на практическую реализацию в УНАП упрощенный квазиоптимальный некогерентный алгоритм оценки частоты, задержки и разностей фаз сигналов промежуточной частоты, принятых на множестве пространственно разнесенных точек. Алгоритм основан на квазиоптимальном алгоритме оценки соответствующих параметров сигналов (см. п. 3 Заключения) при следующих допущениях: пренебрежение отдельными корреляционными связями между оцениваемыми параметрами, пренебрежение в уравнениях фильтрации членом, описывающим коррекцию гессианом, пренебрежение дискриминатором производной разности фаз, использование постоянных значений весовых коэффициентов в алгоритмах обработки. Данный алгоритм включает системы слежения за частотой, задержкой и набора систем слежения за разностями фаз. Он сопоставим по сложности с известными алгоритмами обработки, а его характеристики близки к характеристикам

оптимальных алгоритмов. Он универсален и рекомендуется к применению в УНАП.

9. Разработаны имитационные модели и соответствующее программное обеспечение для моделирования разработанных алгоритмов обработки спутниковых сигналов в УНАП.

10. Проведено имитационное моделирование разработанных алгоритмов и используемого в настоящее время алгоритма обработки сигналов в УНАП (далее – референсный алгоритм), основные результаты которого заключаются в следующем.

Моделирование показывает существенное превосходство синтезированного упрощенного квазиоптимального алгоритма над референсным по характеристикам помехоустойчивости, точности, чувствительности. Показано, что его применение позволяет повысить чувствительность УНАП на 7-17 дБ. При низкой динамике вращений помехоустойчивость УНАП повышается на 4-8 дБ (до значений около 50 дБ для ВТ сигналов ГЛОНАСС).

Упрощенный квазиоптимальный алгоритм обработки навигационных сигналов имеет чувствительность и помехоустойчивость ниже потенциальных характеристик, рассчитанных по методике п. 7 Заключения, на 2-5 дБ и 1-2 дБ соответственно.

Квазиоптимальный некогерентный алгоритм обработки навигационных сигналов менее чувствителен и помехоустойчив, чем упрощенный алгоритм обработки по причине своей сложности, но он позволяет формировать чуть более точные оценки параметров сигналов при высоком отношении сигнал/шум.

11. Так как УНАП с разработанными алгоритмами обработки производит фокусировку диаграммы направленности на навигационный космический аппарат, помехоустойчивость приемника зависит от направления прихода помехи. Существуют направления, при приходе с которых помехи существенно

ослабляются. В определенных обстоятельствах это свойство может существенно повысить помехоустойчивость УНАП.

12. Система слежения за разностью фаз обладает тем замечательным свойством, что на неё практически не влияет нестабильность опорного генератора. Выбор её полосы обусловлен только отношением сигнал/шум и динамикой вращательного движения. Отсутствие ограничений на значение шумовой полосы и обеспечивает основное повышение характеристик алгоритма относительно известных решений. Слежение же за задержкой и частотой при низких отношениях сигнал/шум и высокой мощности помех возможно благодаря применению некогерентного режима работы.

13. Разработанный в диссертации упрощенный квазиоптимальный некогерентный алгоритм обработки сигналов УНАП реализован в опытном образце 14Ц830 ОАО «НИИ космического приборостроения». Проведены экспериментальные исследования данного образца УНАП, показавшие, что его помехоустойчивость составляет 48 дБ, что согласуется с аналитическими результатами и результатами моделирования. Данный уровень помехоустойчивости на 8 дБ выше, чем у предыдущего образца УНАП, использующего независимое слежение за фазами сигналов различных антенн с помощью широкополосных систем ФАП, с последующим нахождением оценки разности фаз как разности оценок фаз. Точность определения параметров угловой ориентации объекта в опытном образце УНАП примерно такая же, что и у предыдущего образца УНАП и составляет ~ 2-3 угловых минуты (СКО), что обусловлено дополнительными ошибками измерений.

14. Разработана методика компенсации неидентичности характеристик радиочастотных блоков, основанная на их циклическом переключении. Наблюдение за сигналами, при прохождении ими различных РЧБ, позволяет оценить характеристики неидентичности РЧБ и провести коррекцию измерений вторых разностей фаз.

Составлена математическая модель разности фаз при работе коммутатора. Показано, что разности установившихся разностей фаз сигналов

на выходах АЦП в различных положениях коммутаторов позволяют определить необходимые компенсационные слагаемые для коррекции измерений вторых разностей фаз.

В алгоритмы систем слежения за задержкой, частотой и разностью фаз, синтезированные в гл.2, внесены изменения, позволяющие сохранить их работоспособность в условии коммутации РЧБ. Кроме того, добавлена возможность оценки параметров неидентичности РЧБ.

Разработан алгоритм коррекции измерений вторых разностей фаз по оценкам параметров неидентичности РЧБ. Данный алгоритм позволяет выработать поправку к оценкам разностей фаз ПЧ, применение которой компенсирует паразитные смещения измерений вторых разностей фаз.

Создана имитационная модель УНАП с коммутаторами и алгоритмами компенсации неидентичности характеристик РЧБ. Имитационным моделированием показано, что увеличение ошибок оценивания второй разности фаз при использовании предложенного подхода относительно потенциального уровня ошибок при использовании идеальных идентичных радиочастотных блоков оставляет около 10% по СКО.

Приведены результаты натурных испытаний опытного образца УНАП ОАО «НИИ космического приборостроения», реализующей созданные алгоритмы. Показано, что точность компенсации неидентичности радиочастотных блоков в измерениях вторых разностях фаз составляет около четверти миллиметра (0,5 градуса) при исходной ошибке около 1-2 см.

Преимуществами разработанного метода являются его простота, высокая точность компенсации неидентичности характеристик РЧБ, возможность работы без перерывов в формировании измерений параметров ориентации.

**Резюме.** Применение разработанных в диссертации алгоритмов обработки сигналов в угломерной НАП позволяет существенно повысить её помехоустойчивость и чувствительность, что можно характеризовать как достижение цели диссертационного исследования

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Guier, William H.; Weiffenbach, George C. (1997). "Genesis of Satellite Navigation". John Hopkins APL Technical Digest 19 (1): pp. 178–181.
2. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / Под. ред. Перова А.И., Харисова В.Н.. — изд. 4-е, перераб. и доп.. — М.: Радиотехника, 2010. — 800 с.
3. Глобальная навигационная спутниковая система ГЛОНАСС. Интерфейсный контрольный документ (редакция 5.1), Москва, 2007 г.
4. Interface Control Document NAVSTAR GPS IS-GPS-200F, 2011
5. E. D. Kaplan and C. J. Hegarty. Understanding GPS: Principles and Applications. Artech House, second edition, 2005.
6. Перов, А. И. Основы построения спутниковых радионавигационных систем. — М.: Радиотехника, 2012.
7. Алёшечкин А.М., Кокорин В.И. Использование спутниковых навигационных систем при разработке россыпей драгами // Маркшейдерский вестник. М.,1996.- №2. С.20-22.
8. Ruiz S., Font J., Griffiths G., Castellon A., Estimation of heading gyrocompass error using a GPS 3DF system: Impact on ADCP measurements, Scientia Marina, 66(4), 2002
9. Корогодин И.В. Синтез и анализ алгоритмов обработки сигналов в аппаратуре определения угловой ориентации объектов по сигналам СРНС // Диссертация на соискание степени магистра – МЭИ, 2010
10. Использование системы NAVSTAR для определения угловой ориентации объектов. / Гребенко Ю.А., Лукин В.Н., Мищенко И.Н. и др. // Зарубежная радиоэлектроника. 1989г. No 1. с.46-53.
11. Сайт предприятия Javad GNSS // [www.javad.com](http://www.javad.com) (дата обращения 19.12.2012).
12. Hemisphere GPS Vector VS330 GNSS Compass DataSheet // Hemisphere GPS, Calgary, Canada, 2012

13. Поваляев Е. А. Система определения ориентации по одномоментным измерениям в СРНС GPS/ГЛОНАСС // Дисс. ... к.т.н., Москва, 2002
14. J.T. Pinchin GNSS Based Attitude Determination for Small Unmanned Aerial Vehicle. // A thesis submitted for the degree of PhD, University of Canterbury, New Zealand, 2011
15. Способ угловой ориентации объектов по радионавигационным сигналам космических аппаратов (варианты) Патент № RU 2122217 С1 Рос. Федерация, МПК G01S5/02 / Алешечкин А.М., Фатеев Ю.Л., Чмых М.К., опубл. 20.11.1998
16. Способ угловой ориентации объекта по сигналам навигационных космических аппаратов Патент № RU 2215299 С2 Рос. Федерация, МПК G01S1/00 / Алешечкин А.М., Фатеев Ю.Л., Чмых М.К., опубл. 27.10.2003
17. Способ угловой ориентации объектов по сигналам космических аппаратов глобальных навигационных спутниковых систем. Патент № RU 2105319 С1 Рос. Федерация, МПК G01S5/00 / Фатеев Ю.Л., Чмых М.К., опубл. 20.02.1998
18. Satellite differential positioning receiver using multiple base-rover antennas // Javad GNSS US Patent 8120527 B2, 2012
19. Carrier track loop for GNSS derived attitude // Hemisphere GPS. US Patent 7388539 B2, 2008
20. Шатилов, А. Ю. Использование критерия срыва слежения при оценке помехоустойчивости следящих систем // Радиотехника. — М.: Радиотехника, 2010. — № 11. — С. 29-33.
21. Фатеев Ю. Л. Теоретические основы и практическая реализация угловых измерений на основе глобальных навигационных спутниковых систем // Дисс. ... докт. техн. наук. Красноярск. 2004.
22. Перов, А. И. Методы и алгоритмы оптимального приема сигналов в аппаратуре потребителей спутниковых радионавигационных систем. — М.: Радиотехника, 2012. — 240 с.

23. Перов, А. И. Статистическая теория радиотехнических систем. — М.: Радиотехника, 2003. — 400 с.
24. Перов, А. И., Корогодин, И. В. Оптимальное оценивание угла прихода сигнала с неизвестной начальной фазой двумя разнесенными приемниками // Радиотехнические тетради. — 2008. — № 37. — С. 57-61.
25. Перов, А. И., Корогодин, И. В., Лопатко, О. Е. Комбинированная когерентно-некогерентная система определения углов ориентации объекта по сигналам спутниковых радионавигационных систем // Радиотехника. — М.: Радиотехника, 2009. — № 7. — С. 88-98.
26. Корогодин, И. В., Перов, А. И. Синтез и анализ дискриминаторов разностей фаз сигналов, принимаемых на множестве пространственно разнесенных точек // Радиотехника. — М.: Радиотехника, 2010. — № 7. — С. 84-92.
27. Перов, А. И., Корогодин, И. В. Синтез и анализ алгоритмов оценивания мощности полезной и шумовой составляющих на выходе коррелятора // Радиотехника. — М.: Радиотехника, 2011. — № 7. — С. 76-82.
28. Корогодин, И. В. Анализ влияния многолучевого распространения сигналов спутниковой радионавигационной системы на характеристики коррелятора навигационного приемника // Радиотехника. — М.: Радиотехника, 2011. — № 7. — С. 95-99
29. Перов, А. И., Корогодин, И. В. Синтез и анализ алгоритмов обработки сигналов в аппаратуре определения угловой ориентации объектов по сигналам СРНС // Радионавигационные технологии в приборостроении: Сборник материалов Научно-технических конференций за 2009-2010 г.г.(г. Туапсе). — М.: Лика, 2011. — С. 65-74.
30. Корогодин, И. В., Перов, А. И., Букреев, А. М. Компенсация ошибки, вносимой многолучевостью в измерения фазы радионавигационного сигнала // Радионавигационные технологии в приборостроении: Сборник материалов Научно-технической конференции за 2011 г.(г. Туапсе). — М.: Лика, 2011. — С. 30.

31. Перов, А. И., Корогодин, И. В. Синтез и анализ когерентно-некогерентного алгоритма приема сигналов в пространственно разнесенных точках в условиях многолучевости // Радиотехника. — М.: Радиотехника, 2012. — № 6. — С. 108-117.
32. Корогодин, И. В., Букреев, А. М. Компенсация разности фазовых набегов в радиочастотных блоках угломерной аппаратуры СРНС ГЛОНАСС // Радиотехника. — М.: Радиотехника, 2012. — № 6. — С. 140-147.
33. Измеритель разности фаз радиосигналов: патент на полезную модель № RU 84993 U1 Рос. Федерация, МПК G01R25/00 / Перов, А. И., Корогодин, И. В., опубл. 20.07.2009
34. Измеритель разности фаз радиосигналов: патент на изобретение № RU 2388001 C1 Рос. Федерация, МПК G01R25/00 / Перов, А. И., Корогодин, И. В., опубл. 27.04.2010
35. Цифровой приемник сигналов спутниковых радионавигационных систем: патент на полезную модель № RU 115079 U1 Рос. Федерация, МПК G01S19/13 / Перов, А. И., Корогодин, И. В., заявл. 25.10.2011, приоритет от 27.10.2011, опубл. 20.04.2012
36. Цифровой приемник сигналов спутниковых радионавигационных систем: патент на изобретение № RU 2467351 C1 Рос. Федерация, МПК G01S19/13 / Перов, А. И., Корогодин, И. В., заявл. 25.10.2011, приоритет от 25.10.2011, опубл. 20.11.2012
37. Корогодин, И. В. Модель многолучевого распространения сигнала спутниковой радионавигационной системы при отражении от экрана конечных размеров. — РОСПАТЕНТ. Свидетельство №2011617611 от 30.09.2011
38. Корогодин, И. В. Модель переходных процессов в идеальном дискретном корреляторе при учете полосы радиочастотной части приемника. — РОСПАТЕНТ. Свидетельство №2011617612 от 30.09.2011
39. Корогодин И. В., Перов А.И. Имитационная модель приемника, предназначенного для определения угловой ориентации объекта по сигналам СРНС. — РОСПАТЕНТ. Свидетельство №2009612470 от 18.05.2009

40. Корогодина, И. В., Перов, А. И. Оптимальное оценивание угла прихода сигнала двумя разнесенными приемниками // Сборник тезисов докладов конференции РАДИОЭЛЕКТРОНИКА, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА. — М.: Издательский дом МЭИ, 2009. — Т. 1. — С. 117-118.

41. Корогодина, И. В., Перов, А. И. Синтез и анализ дискриминаторов разности фаз и доплеровского смещения частоты сигналов, принимаемых в пространственно разнесенных точках // Сборник тезисов докладов конференции РАДИОЭЛЕКТРОНИКА, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА. — М.: Издательский дом МЭИ, 2010. — Т. 1. — С. 145-147.

42. Корогодина, И. В., Перов, А. И. Синтез частотных дискриминаторов квадратурных компонент // Сборник тезисов докладов конференции РАДИОЭЛЕКТРОНИКА, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА. — М.: Издательский дом МЭИ, 2011. — Т. 1. — С. 140-142.

43. Корогодина, И. В., Перов, А. И. Компенсация разности фазовых набегов в радиочастотных блоках угломерной аппаратуры потребителей спутниковых радионавигационных систем // Сборник тезисов докладов конференции РАДИОЭЛЕКТРОНИКА, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА. — М.: Издательский дом МЭИ, 2012. — Т. 1. — С. 135-136.

44. Корогодина И.В. Первичная обработка сигналов в устройстве определения угловой ориентации по сигналам СРНС // Радиолокация, навигация и связь: Сб. трудов междунар. конф. Воронеж, 2011.

45. Фатеев Ю.Л. Методы измерения угловых координат на основе глобальных навигационных спутниковых систем: Дис. ... канд. техн. наук/ КГТУ. Защищена 22.05.97. - Красноярск, 1997.- 156 е., приложения. - Спс. лит.: 38 назв.

46. Алёшечкин А.М. Определение ориентации объектов по сигналам спутниковых радионавигационных систем // Дисс. ... к.т.н., Красноярск, 1999

47. Огнев В.А. Методика и средства повышения помехоустойчивости приёмовычислителей спутниковых навигационных систем // Дисс. ... к.т.н., Москва, 2011

48. Днепров Д.В. Исследование влияния шумов опорного генератора на прием навигационного радиосигнала // Бакалаврская работа, НИУ «МЭИ», Москва, 2012
49. Тихонов, В. И., Харисов, В. Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. — М.: Радио и связь, 2004. — 608 с.
50. Аппаратура высокоточного позиционирования по сигналам глобальных навигационных спутниковых систем: приемники-потребители навигационной информации / Под. ред. М.И. Жодзишского – М.: Издательство МАИ-ПРИНТ, 2010 – 292 с.: ил.
51. Вейцель, А. В., Вейцель, В. А., Татарников, Д. В. Аппаратура высокоточного позиционирования по сигналам глобальных навигационных спутниковых систем: Высокоточные антенны. Специальные методы повышения точности позиционирования / Под. ред. Жодзишского М.И.. — М.: МАИ-ПРИНТ, 2010. — 368 с.
52. N. J. A. Sloane, S. Plouffe. The Encyclopedia of Integer Sequences. San Diego: Academic Press, 1995
53. Первачев С.В. Радиоавтоматика. – М.: Радио и связь, 1982.

# ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ИЛЛЮСТРАЦИИ

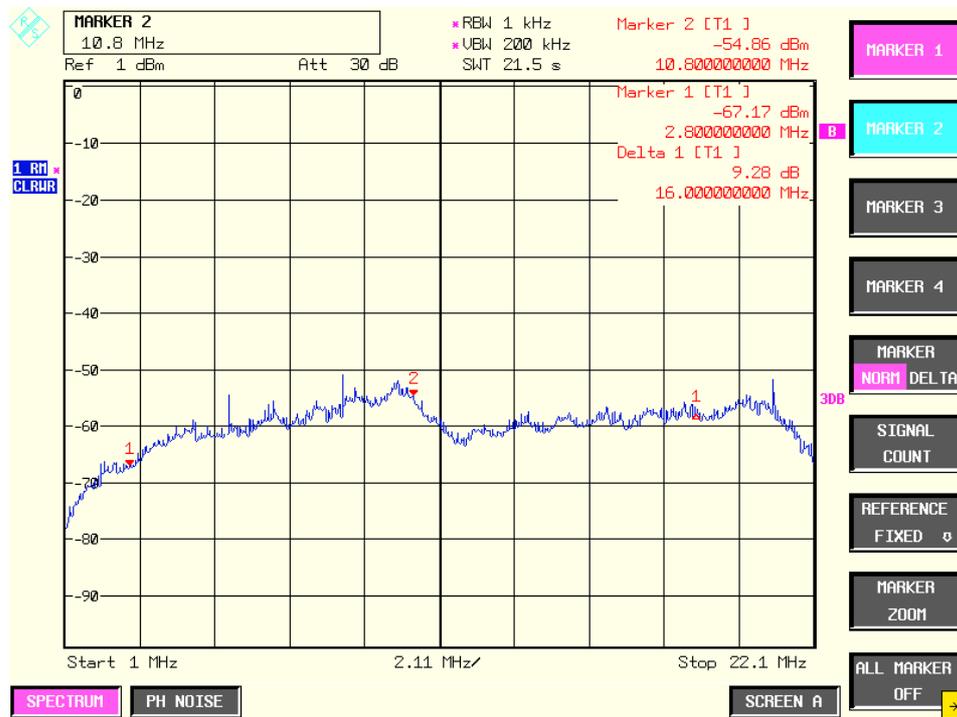


Рисунок 1. СПМ на выходе одного РЧБ при приеме сигналов ГЛОНАСС (ПЧ нулевой литеры 10.8 МГц)

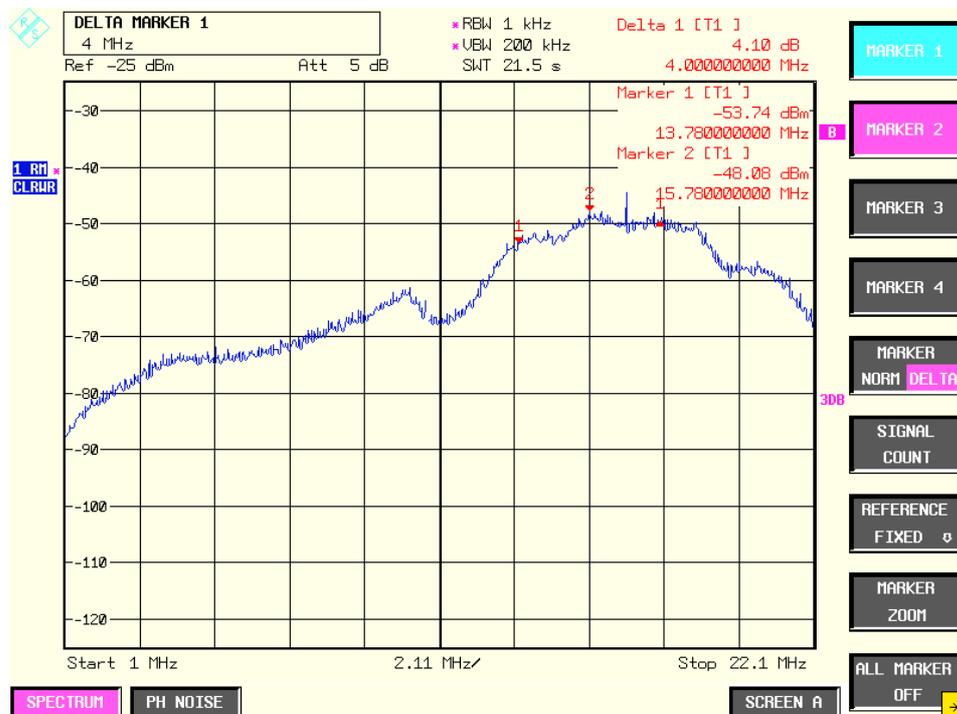


Рисунок 2. СПМ на выходе одного РЧБ при приеме сигналов GPS (ПЧ 15.78 МГц)

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2. НЕКОТОРЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

### П.2.1 Условная априорная плотность вероятности фазы

#### Исходные данные

Задана ПВ  $p(\varphi_0)$  начальной фазы  $\varphi_k$  в начальный момент времени  $t_{k,l} = t_{0,L}$ . При этом,  $\varphi_0$  не зависит от параметра частоты  $\omega_0$  и производной частоты  $\omega'_0$ , т.е.  $p(\varphi_0) = p(\varphi_0 | \omega_0) = p(\varphi_0 | \omega'_0) = p(\varphi_0 | \omega_0, \omega'_0)$ .

ПВ  $p(\varphi_0)$  равняется  $1/2\pi$ . СВ  $\varphi_k$ , в частности  $\varphi_0$ , принимает значения на интервале  $[-\pi; \pi]$ .

Известна модель динамики фазы

$$\varphi_k = [\varphi_{k-1} + \omega_{k-1}T]_{[-\pi; \pi]}, \quad (2.1)$$

и частоты

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\omega,k} &= \mathbf{F}_{\omega} \mathbf{x}_{\omega,k-1} + \mathbf{G}_{\omega} \xi_{\omega,k}, \\ \mathbf{x}_{\omega,k} &= \begin{vmatrix} \omega_k \\ \omega'_k \end{vmatrix}, \mathbf{F}_{\omega} = \begin{vmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \mathbf{G}_{\omega} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\xi_{\omega,k}$  - дискретный БГШ с дисперсией  $\sigma_{\xi\omega}^2$  и нулевым математическим ожиданием.

Необходимо определить  $p(\varphi_k | \mathbf{x}_{\omega,k})$ .

#### Решение

Шаг 1. Рассмотрим функциональное преобразование случайной величины  $X$  вида  $Y = f(X; C) = [X + C]_{[-\pi; \pi]}$ , где  $C$  – известная реализация вещественной СВ.

Функция  $f(X; C)$  дифференцируема за исключением точек:  $X = \pi - C + 2\pi N$  и  $X = -\pi - C + 2\pi N$ , причем производная, когда существует, равна единице (см. рис. 3 Приложения). Область значений функции  $Y \in [-\pi; \pi]$ .

Обратная функция  $X = f^{-1}(Y; C)$  при области допустимых значений  $X \in [-\pi; \pi]$  задается выражением

$$X = f^{-1}(Y; C) = [Y - C]_{[-\pi; \pi]} \quad (2.3)$$

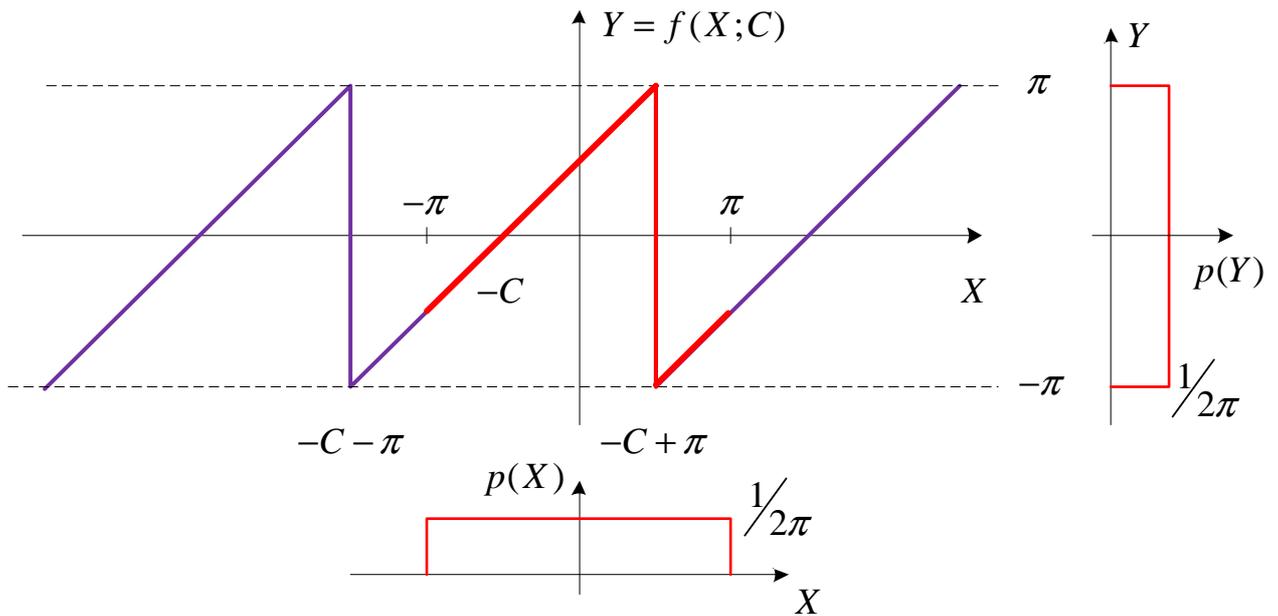


Рисунок 3. Преобразование  $X$  в  $Y = f(X; C)$

Если  $X$  - СВ с условным равномерным распределением на  $[-\pi; \pi]$  при фиксированном  $C$  и  $D$   $p(X | C, D)$ , то условная ПВ СВ  $Y = f(X; C)$ :

$$p(Y | C, D) = \frac{p(X | C, D) \Big|_{X=f^{-1}(Y; C)}}{\left| \frac{d}{dx} f(X; C) \Big|_{X=f^{-1}(Y; C)}} = p(X | C, D) \Big|_{X=f^{-1}(Y; C)} = \frac{1}{2\pi}, Y \in [-\pi; \pi] \quad (2.4)$$

Шаг 2. Пусть  $C$  - СВ с ПВ  $p(C)$ . Рассмотрим функцию вида

$$p(Y | D) = \int_{-\infty}^{\infty} p(Y | C, D) p(C) dC = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(C) dC = \frac{1}{2\pi} = p(Y | C, D). \quad (2.5)$$

и не зависит от вида  $p(C)$ .

В частности, при  $Y = \varphi_k$ ,  $X = \varphi_{k-1}$  и  $C = \omega_{k-1}T$ ,  $D = \omega'_{k-1}$ ,  
 $p(\varphi_k | \omega_{k-1}, \omega'_{k-1}) = p(\varphi_k | \omega'_{k-1}) = p(\varphi_k) = \frac{1}{2\pi}$ , если  $p(\varphi_{k-1} | \omega_{k-1}, \omega'_{k-1}) = \frac{1}{2\pi}$ .

Второй вариант доказательства этого утверждения:

$$\begin{aligned} & \int p(\varphi_k | \omega_k, \omega'_k) p(\varphi_{k+1} | \varphi_k, \omega_k, \omega'_k) d\varphi_k \\ &= \int p(\varphi_{k+1}, \varphi_k | \omega_k, \omega'_k) d\varphi_k = p(\varphi_{k+1} | \omega_k, \omega'_k), \end{aligned} \quad (2.6)$$

тогда, если  $p(\varphi_k | \omega_k, \omega'_k) = \frac{1}{2\pi}$  на области возможных значений, то

$$p(\varphi_{k+1} | \omega_k, \omega'_k) = \frac{1}{2\pi} \int p(\varphi_{k+1} | \varphi_k, \omega_k, \omega'_k) d\varphi_k \quad (2.7)$$

Подынтегральное выражение можно представить как обобщенную дельта-функцию:

$$p(\varphi_{k+1} | \varphi_k, \omega_k, \omega'_k) d\varphi_k = \delta(\varphi_{k+1} - [\varphi_k + \omega_k T]_{-\pi; \pi}), \quad (2.8)$$

интеграл от которой по области значений  $\varphi_k$  равен единице при любом  $\varphi_{k+1}$  из области допустимых значений. Тогда  $p(\varphi_{k+1} | \omega_k, \omega'_k) = \frac{1}{2\pi} = p(\varphi_{k+1})$ .

Шаг 3. Индуктивно докажем, что если  $p(\varphi_0 | \omega_0, \omega'_0) = p(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi}$ , то

$$p(\varphi_k | \omega_k, \omega'_k) = p(\varphi_k) = \frac{1}{2\pi}.$$

При  $k = 1$ , база индукции:

$$p(\varphi_0 | \omega_0, \omega'_0) = p(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow p(\varphi_1 | \omega_0, \omega'_0) = \frac{1}{2\pi} = p(\varphi_1), \text{ следовательно}$$

$\varphi_1$  и  $\omega_0$ ,  $\varphi_1$  и  $\omega'_0$  независимы.

Случайная величина  $\omega'_1 = \omega'_0 + \xi_1$  есть сумма СВ независимых от  $\varphi_1$ , следовательно,  $\varphi_1$  и  $\omega'_1$  независимы (ПВ суммы СВ определяется ПВ её слагаемых, тогда независимость слагаемых от четвертой СВ, приводит и к независимости суммы).

СВ  $\omega_1 = \omega_0 + \omega'_0 T$  есть сумма СВ независимых от  $\varphi_1$ , следовательно,  $\varphi_1$  и  $\omega_1$  независимы.

$$\text{Тогда } p(\varphi_1 | \omega_1, \omega'_1) = p(\varphi_1) = \frac{1}{2\pi}.$$

При  $k = 2$ :

$$\text{С предыдущего шага } p(\varphi_1 | \omega_1, \omega'_1) = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow p(\varphi_2 | \omega_1, \omega'_1) = \frac{1}{2\pi} = p(\varphi_2),$$

тогда  $\varphi_2$  не зависит от  $\omega_1$  и  $\omega'_1$ .

СВ  $\omega'_2 = \omega'_1 + \xi_2$  есть сумма СВ независимых от  $\varphi_2$ , следовательно,  $\varphi_2$  и  $\omega'_2$  независимы.

СВ  $\omega_1 = \omega_0 + \omega'_0 T$  есть сумма СВ независимых от  $\varphi_2$ , следовательно,  $\varphi_2$  и  $\omega_2$  независимы.

$$\text{Тогда } p(\varphi_2 | \omega_2, \omega'_2) = p(\varphi_2) = \frac{1}{2\pi}.$$

*Индукционный переход* - если утверждение  $p(\varphi_k | \omega_k, \omega'_k) = \frac{1}{2\pi}$  справедливо для  $k$ , то справедливо и для  $k+1$ :

$$p(\varphi_k | \omega_k, \omega'_k) = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow p(\varphi_{k+1} | \omega_k, \omega'_k) = \frac{1}{2\pi} = p(\varphi_{k+1}), \text{ следовательно, } \varphi_{k+1} \text{ и } \omega_k,$$

$\varphi_{k+1}$  и  $\omega'_k$  независимы, тогда независимы  $\omega'_{k+1} = \omega'_k + \xi_{k+1}$  и  $\varphi_{k+1}$ ,  $\omega_{k+1} = \omega_k + \omega'_k T$

$$\text{и } \varphi_{k+1}, \text{ тогда } p(\varphi_{k+1} | \omega_{k+1}, \omega'_{k+1}) = p(\varphi_{k+1}) = \frac{1}{2\pi}.$$

Априорная условная ПВ  $p(\varphi_k | \mathbf{x}_{\omega,k})$  по определению есть

$$p(\varphi_{k+1} | \omega_{k+1}, \omega'_{k+1}), \text{ следовательно } p(\varphi_k | \mathbf{x}_{\omega,k}) = \frac{1}{2\pi} \text{ на интервале } \varphi_k \in [-\pi; \pi].$$

## П.2.2 Плотность вероятности экстраполяции вектора состояния

### Постановка задачи

Апостериорная ПВ экстраполяции вектора состояния  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L})$  определяется уравнением

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad (2.9)$$

где

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x} \det(\mathbf{D}_{\mathbf{xx},k})}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \mathbf{F}_x \mathbf{x}_{k-1})^T \mathbf{D}_{\mathbf{xx},k}^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{F}_x \mathbf{x}_{k-1})\right), \quad (2.10)$$

и апостериорная ПВ с  $k-1$  шага:

$$p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x} \det(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}},k-1})}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}},k-1}^{-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})\right). \quad (2.11)$$

Требуется найти  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L-1})$ .

### Решение

Перемножим (2.10) и (2.11):

$$p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{n_x} \sqrt{\det(\mathbf{D}_{\mathbf{xx},k}) \det(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}},k-1})}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{(\mathbf{x}_k - \mathbf{F}_x \mathbf{x}_{k-1})^T \mathbf{D}_{\mathbf{xx},k}^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{F}_x \mathbf{x}_{k-1}) + (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}},k-1}^{-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})\right\}\right). \quad (2.12)$$

Выражение в фигурных скобках обозначим за  $A$ , тогда

$$A = (\mathbf{x}_k - \mathbf{F}_x \mathbf{x}_{k-1})^T \mathbf{D}_{\mathbf{xx},k}^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{F}_x \mathbf{x}_{k-1}) + (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}},k-1}^{-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) = c_1 + c_2 \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned}
c_1 &= \sum_j \sum_i \left( x_{k,j} - (\mathbf{F}_x \mathbf{x}_{k-1})_j \right) \left( x_{k,i} - (\mathbf{F}_x \mathbf{x}_{k-1})_i \right) D_{xx,k,ij}^{-1} = \\
&= \sum_j \sum_i \left( x_{k,j} x_{k,i} - (\mathbf{F}_x \mathbf{x}_{k-1})_j x_{k,i} - (\mathbf{F}_x \mathbf{x}_{k-1})_i x_{k,j} + (\mathbf{F}_x \mathbf{x}_{k-1})_j (\mathbf{F}_x \mathbf{x}_{k-1})_i \right) D_{xx,k,ij}^{-1} \\
c_2 &= \sum_j \sum_i \left( x_{k-1,j} - \hat{x}_{k-1,j} \right) \left( x_{k-1,i} - \hat{x}_{k-1,i} \right) D_{\hat{x},k-1,ij}^{-1} = \\
&= \sum_j \sum_i \left( x_{k-1,j} x_{k-1,i} - \hat{x}_{k-1,j} x_{k-1,i} - x_{k-1,j} \hat{x}_{k-1,i} + \hat{x}_{k-1,j} \hat{x}_{k-1,i} \right) D_{\hat{x},k-1,ij}^{-1}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Рассмотрим, для упрощения выкладок, случай скалярных СВ  $\mathbf{x}_k = x_k$ :

$$\begin{aligned}
c_1 &= \left( x_k^2 - 2x_{k-1}x_k + x_{k-1}^2 \right) D_{xx,k}^{-1} \\
c_2 &= \left( x_{k-1}^2 - 2\hat{x}_{k-1}x_{k-1} + \hat{x}_{k-1}^2 \right) D_{\hat{x},k-1}^{-1} \\
c_1 + c_2 &= x_k^2 D_{xx,k}^{-1} - 2D_{xx,k}^{-1} x_{k-1}x_k + x_{k-1}^2 \left( D_{xx,k}^{-1} + D_{\hat{x},k-1}^{-1} \right) - 2\hat{x}_{k-1} D_{\hat{x},k-1}^{-1} x_{k-1} + \hat{x}_{k-1}^2 D_{\hat{x},k-1}^{-1}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Мы пытаемся представить сумму  $c_1 + c_2$  в виде квадратичной формы двумерного нормального распределения:

$$\begin{aligned}
&\left| \begin{array}{c} x_k - m_k \\ x_{k-1} - m_{k-1} \end{array} \right|^T \left| \begin{array}{cc} D_{k,11}^{-1} & D_{k,12}^{-1} \\ D_{k,21}^{-1} & D_{k,22}^{-1} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x_k - m_k \\ x_{k-1} - m_{k-1} \end{array} \right| = \\
&= D_{k,11}^{-1} x_k^2 + D_{k,22}^{-1} x_{k-1}^2 + \left( D_{k,21}^{-1} + D_{k,12}^{-1} \right) x_k x_{k-1} - \\
&\quad - \left( 2m_k D_{k,11}^{-1} + m_{k-1} D_{k,21}^{-1} + m_{k-1} D_{k,12}^{-1} \right) x_k - \\
&\quad - \left( m_k D_{k,21}^{-1} + m_k D_{k,12}^{-1} + 2m_{k-1} D_{k,22}^{-1} \right) x_{k-1} + \\
&\quad + m_k m_{k-1} D_{k,12}^{-1} + m_{k-1}^2 D_{k,22}^{-1} + m_k^2 D_{k,11}^{-1} + m_k m_{k-1} D_{k,21}^{-1},
\end{aligned} \tag{2.16}$$

откуда следуют тождества (с учетом диагональности ковариационной матрицы):

$$D_{k,11}^{-1} = D_{xx,k}^{-1} \tag{2.17}$$

$$D_{k,22}^{-1} = D_{xx,k}^{-1} + D_{\hat{x},k-1}^{-1} \tag{2.18}$$

$$-2D_{xx,k}^{-1} = D_{k,21}^{-1} + D_{k,12}^{-1} \Rightarrow D_{k,21}^{-1} = D_{k,12}^{-1} = -D_{xx,k}^{-1} \tag{2.19}$$

$$2m_k D_{k,11}^{-1} + m_{k-1} \left( D_{k,21}^{-1} + D_{k,12}^{-1} \right) = 0 \Rightarrow \tag{2.20}$$

$$D_{k,11}^{-1} = m_{k-1} / m_k D_{xx,k}^{-1} \Rightarrow m_{k-1} = m_k = m$$

$$2\hat{x}_{k-1} D_{\hat{x},k-1}^{-1} = \left( m_k D_{k,12}^{-1} + m_k D_{k,21}^{-1} + 2m_{k-1} D_{k,22}^{-1} \right) \Rightarrow m = \hat{x}_{k-1} = \tilde{x}_k \tag{2.21}$$

Откуда

$$\mathbf{D}_k^{-1} = \begin{vmatrix} D_{xx,k}^{-1} & -D_{xx,k}^{-1} \\ -D_{xx,k}^{-1} & D_{xx,k}^{-1} + D_{\hat{x},k-1}^{-1} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}_k = D_{xx,k} D_{\hat{x},k-1} \begin{vmatrix} D_{xx,k}^{-1} + D_{\hat{x},k-1}^{-1} & D_{xx,k}^{-1} \\ D_{xx,k}^{-1} & D_{xx,k}^{-1} \end{vmatrix} \Rightarrow D_{k,11} = D_{\hat{x},k-1} + D_{xx,k},$$
(2.22)

$$\det(\mathbf{D}_k) = \frac{1}{\det(\mathbf{D}_k^{-1})}; \det(\mathbf{D}_k^{-1}) = D_{xx,k}^{-2} + D_{xx,k}^{-1} D_{\hat{x},k-1}^{-1} - D_{xx,k}^{-2} = D_{xx,k}^{-1} D_{\hat{x},k-1}^{-1}$$

$$\Rightarrow \det(\mathbf{D}_k) = D_{xx,k} D_{\hat{x},k-1} = \det(\mathbf{D}_{xx,k}) \det(\mathbf{D}_{\hat{x},k-1}),$$
(2.23)

совместная апостериорная плотность вероятности

$$p(x_k, x_{k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\mathbf{D}_k)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_k - \tilde{x}_k \\ x_{k-1} - \hat{x}_{k-1} \end{vmatrix}^T \mathbf{D}_k^{-1} \begin{vmatrix} x_k - \tilde{x}_k \\ x_{k-1} - \hat{x}_{k-1} \end{vmatrix}\right).$$
(2.24)

Искомая экстраполированная ПВ:

$$p(x_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) = \int_{x_{k-1}} p(x_k, x_{k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) dx_{k-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi) D_{\tilde{x},k}}} \exp\left(-\frac{1}{2} |x_k - \tilde{x}_k|^T D_{\tilde{x},k}^{-1} |x_k - \tilde{x}_k|\right),$$
(2.25)

где

$$D_{\tilde{x},k} = D_{\hat{x},k-1} + D_{xx,k} = \mathbf{D}_{\hat{x},k-1} + \mathbf{G}_x \mathbf{D}_\xi \mathbf{G}_x^T,$$

$$\tilde{x}_k = \hat{x}_{k-1}.$$
(2.26)

В случае векторного  $\mathbf{x}_k$  выражения для математического ожидания и ковариационной матрицы принимают вид [180]:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}_x \hat{\mathbf{x}}_{k-1},$$

$$\mathbf{D}_{\tilde{x},k} = \mathbf{F}_x \mathbf{D}_{\hat{x},k-1} \mathbf{F}_x^T + \mathbf{G}_x \mathbf{D}_\xi \mathbf{G}_x^T.$$
(2.27)

## П.2.3 Математическое ожидание и дисперсия апостериорной плотности вероятности в гауссовом приближении

### Постановка задачи

Утверждается, что выражение

$$A = \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}_k} (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k) + \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k)^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}_k} (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k) - \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k) \quad (2.28)$$

представимо в виде квадратичной формы многомерного нормального распределения

$$A = -\frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}},k}^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + C. \quad (2.29)$$

Требуется определить  $\hat{\mathbf{x}}_k$  и  $\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}},k}$ .

### Решение

Для сокращения выкладок обозначим  $d\mathbf{L}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}_k}$ ,

$$d^2\mathbf{L}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}_k}.$$

Для упрощения выкладок рассмотрим случай одномерной СВ  $\mathbf{x}_k = x_k$ ,  $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k} = \sigma_{\tilde{\mathbf{x}},k}^2$ . Тогда

$$A = dL_k \cdot (x_k - \tilde{x}_k) + d^2L_k \cdot \frac{(x_k - \tilde{x}_k)^2}{2} - \frac{1}{2\sigma_{\tilde{\mathbf{x}},k}^2} (x_k - \tilde{x}_k)^2, \quad (2.30)$$

объединим квадратные скобки

$$\begin{aligned} A &= -\frac{x_k^2 - 2x_k\tilde{x}_k + \tilde{x}_k^2 - 2\sigma_{\tilde{\mathbf{x}},k}^2 dL_k \cdot (x_k - \tilde{x}_k) - \sigma_{\tilde{\mathbf{x}},k}^2 d^2L_k (x_k^2 - 2x_k\tilde{x}_k + \tilde{x}_k^2)}{2\sigma_{\tilde{\mathbf{x}},k}^2} = \\ &= -\frac{(1 - \sigma_{\tilde{\mathbf{x}},k}^2 d^2L_k)(x_k^2 - 2x_k\tilde{x}_k + \tilde{x}_k^2) - 2\sigma_{\tilde{\mathbf{x}},k}^2 dL_k \cdot (x_k - \tilde{x}_k)}{2\sigma_{\tilde{\mathbf{x}},k}^2} = \\ &= -\frac{(x_k^2 - 2x_k\tilde{x}_k + \tilde{x}_k^2) - 2\sigma_{\tilde{\mathbf{x}},k}^2 / (1 - \sigma_{\tilde{\mathbf{x}},k}^2 d^2L_k) \cdot dL_k \cdot (x_k - \tilde{x}_k)}{2\sigma_{\tilde{\mathbf{x}},k}^2 / (1 - \sigma_{\tilde{\mathbf{x}},k}^2 d^2L_k)}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Введем обозначение

$$\sigma_{\hat{\mathbf{x}},k}^2 = \sigma_{\tilde{\mathbf{x}},k}^2 / (1 - \sigma_{\tilde{\mathbf{x}},k}^2 d^2L_k), \quad (2.32)$$

тогда

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{x_k^2 - 2(\tilde{x}_k + \sigma_{\hat{x},k}^2 dL_k)x_k + \tilde{x}_k^2 + 2\sigma_{\hat{x},k}^2 \tilde{x}_k dL_k}{2\sigma_{\hat{x},k}^2} = \\
&= -\frac{x_k^2 - 2(\tilde{x}_k + \sigma_{\hat{x},k}^2 dL_k)x_k + (\tilde{x}_k + \sigma_{\hat{x},k}^2 dL_k)^2}{2\sigma_{\hat{x},k}^2} - \\
&\quad -\frac{\tilde{x}_k^2 + 2\sigma_{\hat{x},k}^2 \tilde{x}_k dL_k - (\tilde{x}_k + \sigma_{\hat{x},k}^2 dL_k)^2}{2\sigma_{\hat{x},k}^2}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Второе слагаемое не является функцией  $x_k$ , продолжаем рассмотрение первого слагаемого

$$-\frac{x_k^2 - 2(\tilde{x}_k + \sigma_{\hat{x},k}^2 dL_k)x_k + (\tilde{x}_k - \sigma_{\hat{x},k}^2 dL_k)^2}{2\sigma_{\hat{x},k}^2} = -\frac{(x_k - (\tilde{x}_k + \sigma_{\hat{x},k}^2 dL_k))^2}{2\sigma_{\hat{x},k}^2} \tag{2.34}$$

Откуда

$$\begin{aligned}
\hat{x}_k &= \tilde{x}_k + \sigma_{\hat{x},k}^2 \left. \frac{\partial \ln L_k(x_k)}{\partial x_k} \right|_{\tilde{x}_k}, \\
\sigma_{\hat{x},k}^{-2} &= \sigma_{\tilde{x},k}^{-2} - \left. \frac{\partial^2 \ln L_k(x_k)}{\partial x_k^2} \right|_{\tilde{x}_k}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Например, если происходят наблюдения  $y_k$  сигнала  $S(x)$  на фоне нормального шума с дисперсией  $\sigma_n^2$ , то

$$\left. \frac{\partial \ln L_k(x_k)}{\partial x_k} \right|_{\tilde{x}_k} = \left. \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{(S(x) - y)^2}{2\sigma^2} \right|_{x_k = \tilde{x}_k} = \left. \frac{1}{\sigma_n^2} \frac{\partial S(x_k)}{\partial x_k} \right|_{x_k = \tilde{x}_k} (y_k - S_k(\tilde{x}_k)), \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \ln L_k(x_k)}{\partial x_k^2} \right|_{\tilde{x}_k} &= \left. \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\sigma_n^2} \frac{\partial S(x_k)}{\partial x_k} (y_k - S_k(x_k)) \right|_{x_k = \tilde{x}_k} = \\
&= \frac{1}{\sigma_n^2} \left[ \left. \frac{\partial^2 S(x_k)}{\partial x_k^2} (y_k - S_k(x_k)) - \left( \frac{\partial S(x_k)}{\partial x_k} \right)^2 \right]_{x_k = \tilde{x}_k}.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

В частности при  $S_k(x_k) = Hx_k$  обращаются в

$$\left. \frac{\partial \ln L_k(x_k)}{\partial x_k} \right|_{\tilde{x}_k} = \frac{1}{\sigma_n^2} H(y_k - H\tilde{x}_k), \quad \left. \frac{\partial^2 \ln L_k(x_k)}{\partial x_k^2} \right|_{\tilde{x}_k} = -\frac{H^2}{\sigma_n^2}, \text{ тогда}$$

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + \frac{\sigma_{\tilde{x},k}^2 H}{\sigma_n^2 + \sigma_{\tilde{x},k}^2 H^2} (y_k - H\tilde{x}_k),$$

$$\sigma_{\hat{x},k}^2 = \frac{\sigma_{\tilde{x},k}^2 \sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \sigma_{\tilde{x},k}^2 H^2}.$$
(2.38)

Обобщим результат для случая произвольной размерности вектора состояния

$$\begin{aligned} A &= d\mathbf{L}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k)^T d^2\mathbf{L}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1}(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k) = \\ &= d\mathbf{L}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k)\mathbf{x}_k - d\mathbf{L}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k)\tilde{\mathbf{x}}_k + \frac{1}{2}\mathbf{x}_k^T d^2\mathbf{L}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k) - \\ & - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}_k^T d^2\mathbf{L}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k) - \frac{1}{2}\mathbf{x}_k^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1}(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k) + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1}(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k), \end{aligned}$$
(2.39)

откуда

$$\begin{aligned} A &= d\mathbf{L}_k\mathbf{x}_k - d\mathbf{L}_k\tilde{\mathbf{x}}_k + \frac{1}{2}\mathbf{x}_k^T d^2\mathbf{L}_k\mathbf{x}_k - \frac{1}{2}\mathbf{x}_k^T d^2\mathbf{L}_k\tilde{\mathbf{x}}_k - \\ & - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}_k^T d^2\mathbf{L}_k\mathbf{x}_k + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}_k^T d^2\mathbf{L}_k\tilde{\mathbf{x}}_k - \frac{1}{2}\mathbf{x}_k^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1}\mathbf{x}_k + \frac{1}{2}\mathbf{x}_k^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1}\tilde{\mathbf{x}}_k + \\ & + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1}\mathbf{x}_k - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1}\tilde{\mathbf{x}}_k. \end{aligned}$$
(2.40)

Сгруппируем слагаемые

$$\begin{aligned} A &= d\mathbf{L}_k\mathbf{x}_k - \frac{1}{2}\mathbf{x}_k^T (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2\mathbf{L}_k)\mathbf{x}_k + \\ & + \frac{1}{2}\mathbf{x}_k^T (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2\mathbf{L}_k)\tilde{\mathbf{x}}_k + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}_k^T (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2\mathbf{L}_k)\mathbf{x}_k - \\ & - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}_k^T (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2\mathbf{L}_k)\tilde{\mathbf{x}}_k - d\mathbf{L}_k\tilde{\mathbf{x}}_k. \end{aligned}$$
(2.41)

Введем дополнительные слагаемые, компенсировав их вычитанием

$$\begin{aligned} A &= d\mathbf{L}_k\mathbf{x}_k - \frac{1}{2}\mathbf{x}_k^T (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2\mathbf{L}_k)\mathbf{x}_k + \\ & + \frac{1}{2}\mathbf{x}_k^T (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2\mathbf{L}_k) \left( \tilde{\mathbf{x}}_k + (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2\mathbf{L}_k)^{-1} d\mathbf{L}_k^T \right) - \\ & - \frac{1}{2}\mathbf{x}_k^T (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2\mathbf{L}_k) (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2\mathbf{L}_k)^{-1} d\mathbf{L}_k^T + \\ & + \frac{1}{2} \left( \tilde{\mathbf{x}}_k + (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2\mathbf{L}_k)^{-1} d\mathbf{L}_k^T \right)^T (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2\mathbf{L}_k)\mathbf{x}_k - \\ & - \frac{1}{2} d\mathbf{L}_k (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2\mathbf{L}_k)^{-1,T} (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2\mathbf{L}_k)\mathbf{x}_k + \\ & - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}_k^T (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2\mathbf{L}_k)\tilde{\mathbf{x}}_k - d\mathbf{L}_k\tilde{\mathbf{x}}_k. \end{aligned}$$
(2.42)

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k &= \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k} d\mathbf{L}_k, \\ \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}},k}^{-1} &= \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2\mathbf{L}_k.\end{aligned}\quad (2.43)$$

Свернем четыре слагаемых в квадратичную форму и учтем, что матрица  $\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}},k}$  симметричная

$$\begin{aligned}A &= d\mathbf{L}_k \mathbf{x}_k - \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) - \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T d\mathbf{L}_k^T - \frac{1}{2} d\mathbf{L}_k \mathbf{x}_k - \\ &\quad - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_k^T (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2\mathbf{L}_k) \tilde{\mathbf{x}}_k - d\mathbf{L}_k \tilde{\mathbf{x}}_k.\end{aligned}\quad (2.44)$$

Произведение  $d\mathbf{L}_k \mathbf{x}_k$  образует скаляр, поэтому

$$\begin{aligned}A &= -\frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_k^T (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2\mathbf{L}_k) \tilde{\mathbf{x}}_k - d\mathbf{L}_k \tilde{\mathbf{x}}_k,\end{aligned}\quad (2.45)$$

откуда следуют выражения для вектора математических ожиданий и ковариационной матрицы:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k &= \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k} \left. \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}_k}, \\ \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}},k}^{-1} &= \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left( \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right)^T \right|_{\tilde{\mathbf{x}}_k}.\end{aligned}\quad (2.46)$$

Выражения (2.27), (2.46) позволяют рекурсивно рассчитывать вектор математических ожиданий и ковариационную матрицу ПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  в случае её нормальности. Данные выражения задают структуру фильтра входных отсчетов  $\mathbf{y}_{k,l}$ , называемого расширенным фильтром Калмана (РФК) с усреднением по неинформативным параметрам.

## П.2.4 Расчет усредненной многошаговой функции правдоподобия

Необходимо упростить выражение для многошаговой функции правдоподобия.

$$L_k(\mathbf{x}_k) = \prod_{l=1}^L L_{k,l}(\mathbf{x}_k) = p(\mathbf{Y}_{k,1}^{k,L} | \mathbf{x}_k) = \frac{1}{((2\pi)^M \det(\mathbf{D}_n))^{L/2}} \times$$

$$\times \int_{\boldsymbol{\mu}_k} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^L (\mathbf{y}_{k,l} - \mathbf{S}_{k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k))^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{y}_{k,l} - \mathbf{S}_{k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k))\right) p(\boldsymbol{\mu}_k | \mathbf{x}_k) d\boldsymbol{\mu}_k$$
(2.47)

Вектор неинформативных параметров состоит из одного элемента  $\boldsymbol{\mu}_k = \varphi_{1,k}$ . Как доказано ранее,  $p(\varphi_{1,k} | \mathbf{x}_{\omega,k}) = \frac{1}{2\pi} = p(\varphi_{1,k})$ ,  $\varphi_{1,k} \in [-\pi; \pi]$ . На основании модели параметров, входящих в  $\mathbf{x}_k$ , можно записать  $p(\varphi_{1,k} | \mathbf{x}_{\omega,k}) = p(\varphi_{1,k} | \mathbf{x}_k) = p(\varphi_{1,k})$ . Тогда функция  $L_k(\mathbf{x}_k)$  может быть представлена как функция вектора информативных параметров  $L_k(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)$ :

$$L_k(\mathbf{x}_k) = \prod_{l=1}^L L_{k,l}(\mathbf{x}_k) = p(\mathbf{Y}_{k,1}^{k,L} | \mathbf{x}_k) = \frac{1}{2\pi ((2\pi)^M \det(\mathbf{D}_n))^{L/2}} \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^L (\mathbf{y}_{k,l} - \mathbf{S}_{k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}))^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{y}_{k,l} - \mathbf{S}_{k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}))\right) d\varphi_{1,k}$$
(2.48)

Обратная ковариационная матрица шумов наблюдений:

$$\mathbf{D}_n^{-1} = \begin{vmatrix} \sigma_n^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sigma_n^2} E_M,$$
(2.49)

где  $E_M$  - единичная матрица  $M \times M$ , определитель ковариационной матрицы

$$\det \mathbf{D}_n = (\sigma_n^2)^M \det E_M = \sigma_n^{2M}.$$
(2.50)

Квадратичная форма в (2.48):

$$(\mathbf{y}_{k,l} - \mathbf{S}_{k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}))^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{y}_{k,l} - \mathbf{S}_{k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k})) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{m=1}^M (y_{m,k,l} - S_{m,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}))^2.$$
(2.51)

Рассмотрим выражение под суммой:

$$(y_{m,k,l} - S_{m,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}))^2 = y_{m,k,l}^2 - 2y_{m,k,l} S_{m,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}) + S_{m,k,l}^2(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}),$$
(2.52)

где  $y_{m,k,l}$  - отсчет  $m$ -го АЦП (РЧБ), а функция  $S_{m,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k})$  задана выражением (1.15) основной книги диссертации.

Тогда аргумент экспоненты в (2.48):

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \left( \mathbf{y}_{k,l} - \mathbf{S}_{k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}) \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \left( \mathbf{y}_{k,l} - \mathbf{S}_{k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}) \right) = \\ & = -\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \left( y_{m,k,l}^2 - 2y_{m,k,l} S_{m,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}) + S_{m,k,l}^2(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}) \right) = \\ & = -\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \left( y_{m,k,l}^2 - 2y_{m,k,l} S_{m,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}) \right) - \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L S_{m,k,l}^2(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Сумма  $E_{m,k,l} = \sum_{l=1}^L S_{m,k,l}^2(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k})$ , по определению, есть энергия сигнала  $m$ -го РЧБ на  $k$ -ом интервале. Для НАП характерны такие значения ПЧ и длительностей интервалов работы фильтров, при которых энергия сигнала практически не зависит от начальной фазы  $\varphi_{1,k}$  [9]. Тогда

Для НАП характерны такие значения ПЧ и длительностей интервалов работы фильтров, при которых энергия сигнала практически не зависит от начальной фазы  $\varphi_{1,k}$  [9]. Тогда

$$\begin{aligned} & \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \left( \mathbf{y}_{k,l} - \mathbf{S}_{k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}) \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \left( \mathbf{y}_{k,l} - \mathbf{S}_{k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}) \right) \right) = \\ & = \exp \left( -\frac{\sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M y_{m,k,l}^2 + \sum_{m=1}^M E_{m,k,l}}{2\sigma_n^2} \right) \exp \left( \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M y_{m,k,l} S_{m,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}) \right), \end{aligned} \quad (2.54)$$

для расчета интеграла (2.48) необходимо вычислить

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp \left( \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M y_{m,k,l} S_{m,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}) \right) d\varphi_{1,k}. \quad (2.55)$$

Произведение на основании выражения (1.15) основной книги диссертации

$$\begin{aligned} & y_{m,k,l} S_{m,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}) = \\ & = y_{m,k,l} A G_c \cos \left( \omega_{if} t_{k,l} + (\omega_{1,k} + \psi'_{m1,k})(l-1)T_d + \varphi_{1,k} + \psi_{m1,k} \right) = \\ & = y_{m,k,l} A G_c \left[ \cos \left( \Phi_{\psi,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) \right) \cos \left( \varphi_{1,k} \right) - \sin \left( \Phi_{\psi,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) \right) \sin \left( \varphi_{1,k} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.56)$$

где введено обозначение

$$\Phi_{\psi,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) = \omega_{if} t_{k,l} + (\omega_{1,k} + \psi'_{m1,k})(l-1)T_d + \psi_{m1,k} \quad (2.57)$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
I_{\psi,m,k} &= \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_c \cos(\Phi_{\psi,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)), \\
Q_{\psi,m,k} &= \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_c \sin(\Phi_{\psi,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)),
\end{aligned} \tag{2.58}$$

тогда выражение (2.55) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M y_{m,k,l} S_{m,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k})\right) d\varphi_{1,k} = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{A}{\sigma_n^2} \sum_{m=1}^M (I_{\psi,m,k} \cos(\varphi_{1,k}) - Q_{\psi,m,k} \sin(\varphi_{1,k}))\right) d\varphi_{1,k}.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Очевидно, что для  $\forall \sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k}, \sum_{m=1}^M Q_{\psi,m,k} \in \mathbb{R}^1 : \exists \zeta_k \in \mathbb{R}^1 :$

$$\begin{aligned}
&\cos(\varphi_{1,k}) \sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k} - \sin(\varphi_{1,k}) \sum_{m=1}^M Q_{\psi,m,k} = \\
&= X_{\psi,k} \left( \frac{\sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k}}{X_{\psi,k}} \cos(\varphi_{1,k}) - \frac{\sum_{m=1}^M Q_{\psi,m,k}}{X_{\psi,k}} \sin(\varphi_{1,k}) \right) = \\
&= X_{\psi,k} (\cos(\zeta_k) \cos(\varphi_{1,k}) - \sin(\zeta_k) \sin(\varphi_{1,k})) = \\
&= X_{\psi,k} \cos(\zeta_k + \varphi_{1,k}),
\end{aligned} \tag{2.60}$$

где

$$X_{\psi,k}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) = \sqrt{\left(\sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k}\right)^2 + \left(\sum_{m=1}^M Q_{\psi,m,k}\right)^2}. \tag{2.61}$$

Тогда выражение (2.59):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M y_{m,k,l} S_{m,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k})\right) d\varphi_{1,k} = \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{A}{\sigma_n^2} X_{\psi,k} \cos(\zeta_k + \varphi_{1,k})\right) d\varphi_{1,k}. \tag{2.62}$$

По определению модифицированной функции Бесселя первого рода нулевого порядка

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{z \cos t} dt. \tag{2.63}$$

Подынтегральная функция в (2.62) периодична, а её период совпадает с длиной интервала интегрирования. Поэтому замена  $\zeta_k + \varphi_{1,k}$  на  $\varphi_{1,k}$  при условии  $\zeta_k \in \mathbb{R}^1$  не меняет значение интеграла. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M y_{m,k,l} S_{m,k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k})\right) d\varphi_{1,k} = 2\pi I_0\left(\frac{A}{\sigma_n^2} X_{\psi,k}\right), \quad (2.64)$$

откуда

$$L_k(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{ML/2}} \exp\left(-\frac{\sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M y_{m,k,l}^2 + \sum_{m=1}^M E_{m,k,l}}{2\sigma_n^2}\right) I_0\left(\frac{A}{\sigma_n^2} X_{\psi,k}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)\right). \quad (2.65)$$

## П.2.5 Интегрирование совместной апостериорной плотности вероятности по неинформативным параметрам

В диссертации изложен подход линейризации усредненной функции правдоподобия. Но возможно и другое решение – расчет апостериорной плотности вероятности  $p(\boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{x}_k / \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  с последующим интегрированием по  $\boldsymbol{\mu}_k$ , в результате чего получится искомая  $p(\mathbf{x}_k / \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$ .

Если принять, что экстраполяционная  $p(\boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{x}_k / \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L})$  имеет нормальное многомерное распределение с вектором математических ожиданий  $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_k \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k \end{pmatrix}$  и ковариационной матрицей  $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k, k}$ , то

$$p(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x+1} \det(\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k, k})}} \times \exp\left(\ln(L(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k)) - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k \end{pmatrix}^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k, k}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k \end{pmatrix}\right), \quad (2.66)$$

где

$$L_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k) = L_k(\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}) = p(\mathbf{Y}_{k,1}^{k,L} | \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k) = \frac{1}{((2\pi)^M \det(\mathbf{D}_n))^{L/2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^L (\mathbf{y}_{k,l} - \mathbf{S}_{k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}))^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{y}_{k,l} - \mathbf{S}_{k,l}(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \varphi_{1,k}))\right) \quad (2.67)$$

Для того, чтобы (2.66) оставалась гауссовой, логарифм функции правдоподобия должен быть представлен в виде суммы трех первых членов разложения в ряд Тейлора вокруг точки  $\begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_k \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k \end{vmatrix}$ :

$$\begin{aligned} \ln L_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k) = \ln L_k(\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k) + \begin{vmatrix} \mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k \end{vmatrix}^T \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k)}{\partial \begin{vmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k \end{vmatrix}} \bigg|_{\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k} + \\ + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k \end{vmatrix}^T \left( \frac{\partial}{\partial \begin{vmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k \end{vmatrix}} \left( \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k)}{\partial \begin{vmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k \end{vmatrix}} \right)^T \right) \bigg|_{\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

В этом случае легко записать выражения для математического ожидания и ковариационной матрицы (2.66) по аналогии с (2.46).

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ \hat{\boldsymbol{\mu}}_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_k \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k \end{vmatrix} + \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}, k} \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k)}{\partial \begin{vmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k \end{vmatrix}} \bigg|_{\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k}, \\ \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}, k}^{-1} = \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}, k}^{-1} - \frac{\partial}{\partial \begin{vmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k \end{vmatrix}} \left( \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k)}{\partial \begin{vmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k \end{vmatrix}} \right)^T \bigg|_{\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k}, \end{aligned} \quad (2.69)$$

где ковариационная матрица  $\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}, k}$  содержит  $\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}, k}$ :

$$\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}} = \begin{vmatrix} & & D_{\varphi_{x_1}} \\ & \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}} & \dots \\ D_{\varphi_{x_1}} & \dots & \mathbf{D}_{\hat{\boldsymbol{\mu}}} \end{vmatrix} \quad (2.70)$$

В итоге, после усреднения по  $\boldsymbol{\mu}_k$ , вектор математических ожиданий и ковариационная матрица  $p(\mathbf{x}_k / \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  не зависят от  $\boldsymbol{\mu}_k$ . Но зависят от точки  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_k$ , вокруг которой производится разложение логарифма функции правдоподобия в ряд Тейлора.

Если в качестве точки разложения используем экстраполяцию фазы, то получаем когерентную систему. В этом случае при расчете дискриминирующих

функций  $\left. \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k)}{\partial \begin{vmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k \end{vmatrix}} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k}$  используются экстраполяции фазы, что приводит к

когерентности опорных сигналов корреляторов и приходящего сигнала.

Но в качестве точки разложения можно выбрать и любую другую  $\check{\boldsymbol{\mu}}_k$ :

$$\begin{aligned} \ln L_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k) = & \ln L_k(\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k) + \begin{vmatrix} \mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k \end{vmatrix}^T \left. \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k)}{\partial \begin{vmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k \end{vmatrix}} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k} + \\ & + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k \end{vmatrix}^T \left( \frac{\partial}{\partial \begin{vmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k \end{vmatrix}} \left( \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k)}{\partial \begin{vmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k \end{vmatrix}} \right)^T \right)_{\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k \end{vmatrix} + \dots \end{aligned} \quad (2.71)$$

Для того, чтобы (2.66) была гауссовой, всё ещё достаточно пренебрежением в (2.71) слагаемых разложения порядка 3 и выше (доказывается ниже). При этом вектор математических ожиданий и ковариационная матрица:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ \hat{\boldsymbol{\mu}}_k \end{vmatrix} = & \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_k \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k \end{vmatrix} + \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}, k} \left. \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k)}{\partial \begin{vmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k \end{vmatrix}} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k}, \\ \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}, k}^{-1} = & \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}, k}^{-1} - \frac{\partial}{\partial \begin{vmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k \end{vmatrix}} \left( \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k)}{\partial \begin{vmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k \end{vmatrix}} \right)^T \Bigg|_{\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_k}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Так как вектор  $\check{\boldsymbol{\mu}}_k$  считается неинформативным и не интересует пользователя, то расчет соответствующих ему компонент в векторе

математических ожиданий можно опустить. Например, при одномерном векторе неинформативных параметров:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k} \left. \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}_k, \check{\boldsymbol{\mu}}_k} + \begin{pmatrix} D_{\tilde{\mathbf{x}}, \check{\boldsymbol{\mu}}, k, 1(n_x+1)} \\ \dots \\ D_{\tilde{\mathbf{x}}, \check{\boldsymbol{\mu}}, k, n_x(n_x+1)} \end{pmatrix} \left. \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k, \mu_k)}{\partial \mu_k} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}_k, \check{\boldsymbol{\mu}}_k}. \quad (2.73)$$

Тем не менее, в расчете математических ожиданий информативных параметров участвует дискриминатор неинформативного параметра.

Как следует из (2.72), дисперсия  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  при данной функции правдоподобия определяется выбором точки разложения  $\check{\boldsymbol{\mu}}_k$ .

Функции дискриминаторов совпадают с дискриминаторами для случая отнесения  $\boldsymbol{\mu}_k$  к информативным параметрам, с той лишь разницей, что в них используется не экстраполяция  $\check{\boldsymbol{\mu}}_k$ , формируемая фильтром, а некоторая  $\check{\boldsymbol{\mu}}_k$ .

Для того, чтобы аппроксимация (2.71) хорошо работала,  $\check{\boldsymbol{\mu}}_k$  следует выбирать максимально близко к аргументу максимума функции правдоподобия.

## П.2.6 Апостериорная плотность вероятности при разложении логарифма отношения правдоподобия вокруг произвольной точки

### Постановка задачи

Утверждается, что выражение для аргумента апостериорной плотности вероятности  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  в случае разложения логарифма отношения правдоподобия вокруг точки  $\check{\mathbf{x}}_k$

$$A = \left. \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\check{\mathbf{x}}_k} (\mathbf{x}_k - \check{\mathbf{x}}_k) + \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \check{\mathbf{x}}_k)^T \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\check{\mathbf{x}}_k} (\mathbf{x}_k - \check{\mathbf{x}}_k) - \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \check{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{D}_{\check{\mathbf{x}},k}^{-1} (\mathbf{x}_k - \check{\mathbf{x}}_k) \quad (2.74)$$

представимо в виде квадратичной формы многомерного нормального распределения

$$A = -\frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}},k}^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + C. \quad (2.75)$$

Требуется определить  $\hat{\mathbf{x}}_k$  и  $\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}},k}$ .

### Решение

Для сокращения выкладок обозначим  $d\mathbf{L}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \left. \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}_k}$ ,

$d^2\mathbf{L}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \frac{\partial \ln L_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}_k}$ . В общем случае  $d\mathbf{L}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k)$  - градиент, а  $d^2\mathbf{L}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k)$  -

гессиан функции  $\ln L_k(\mathbf{x}_k)$  в точке  $\tilde{\mathbf{x}}_k$ .

В новых обозначениях

$$A = d\mathbf{L}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k)^T d^2\mathbf{L}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k). \quad (2.76)$$

Воспользуемся дистрибутивностью умножения матриц относительно сложения:

$$\begin{aligned} A &= d\mathbf{L}_k \mathbf{x}_k - d\mathbf{L}_k \tilde{\mathbf{x}}_k + \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T d^2\mathbf{L}_k \mathbf{x}_k - \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T d^2\mathbf{L}_k \tilde{\mathbf{x}}_k - \\ &- \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_k^T d^2\mathbf{L}_k \mathbf{x}_k + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_k^T d^2\mathbf{L}_k \tilde{\mathbf{x}}_k - \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} \mathbf{x}_k + \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_k + \\ &+ \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} \mathbf{x}_k - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_k. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Матрицы  $d^2\mathbf{L}_k$  и  $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1}$  симметричные, что позволяет переставлять квадратичные формы без применения транспонирования к ним

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2\mathbf{L}_k) \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_k^T (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_k - d^2\mathbf{L}_k \tilde{\mathbf{x}}_k + d\mathbf{L}_k^T) + \\ &+ \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_k^T d^2\mathbf{L}_k \tilde{\mathbf{x}}_k - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_k - d\mathbf{L}_k \tilde{\mathbf{x}}_k. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Умножим  $\mathbf{x}_k^T$  второго слагаемого на единичную матрицу

$$\begin{aligned}
A = & -\frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2 \mathbf{L}_k) \mathbf{x}_k + \\
& + \mathbf{x}_k^T (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2 \mathbf{L}_k) (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2 \mathbf{L}_k)^{-1} (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_k - d^2 \mathbf{L}_k \tilde{\mathbf{x}}_k + d \mathbf{L}_k^T) \\
& + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_k^T d^2 \mathbf{L}_k \tilde{\mathbf{x}}_k - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_k - d \mathbf{L}_k \tilde{\mathbf{x}}_k.
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Дополним два первых слагаемых недостающим третьим и свернем результат в квадратичную форму

$$\begin{aligned}
A = & -\frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \\
& + \left( (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2 \mathbf{L}_k)^{-1} (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_k - d^2 \mathbf{L}_k \tilde{\mathbf{x}}_k + d \mathbf{L}_k^T) \right)^T \times \\
& \times (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2 \mathbf{L}_k) \left( (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2 \mathbf{L}_k)^{-1} (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_k - d^2 \mathbf{L}_k \tilde{\mathbf{x}}_k + d \mathbf{L}_k^T) \right) + \\
& + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_k^T d^2 \mathbf{L}_k \tilde{\mathbf{x}}_k - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_k - d \mathbf{L}_k \tilde{\mathbf{x}}_k,
\end{aligned} \tag{2.80}$$

где

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_k = & \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k} (\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_k + d \mathbf{L}_k^T + d^2 \mathbf{L}_k (\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k)) = \\
= & \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k} (d \mathbf{L}_k^T + d^2 \mathbf{L}_k (\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k)) \\
\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} = & \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - d^2 \mathbf{L}_k.
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Таким образом, апостериорная плотность вероятности  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k,L})$  в случае разложения логарифма отношения правдоподобия вокруг точки  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  является нормальной, а её вектор математических ожиданий и ковариационная матрица описывается выражениями

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_k = & \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k} \left( \frac{\partial \ln L_k}{\partial \mathbf{x}_k} (\tilde{\mathbf{x}}_k) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \frac{\partial \ln L_k}{\partial \mathbf{x}_k^T} (\tilde{\mathbf{x}}_k) (\tilde{\mathbf{x}}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k) \right), \\
\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} = & \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}},k}^{-1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \frac{\partial \ln L_k}{\partial \mathbf{x}_k^T} (\tilde{\mathbf{x}}_k).
\end{aligned} \tag{2.82}$$

## П.2.7 Экстраполяционная ПВ в случае одного формирующего шума

Апостериорная ПВ  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L})$  определяется уравнением:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad (2.83)$$

где ПВ перехода  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$  находится на основании моделей динамики:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x} \det(\mathbf{D}_{\mathbf{xx},k})}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \mathbf{F}_x \mathbf{x}_{k-1})^T \mathbf{D}_{\mathbf{xx},k}^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{F}_x \mathbf{x}_{k-1})\right), \quad (2.84)$$

здесь  $\mathbf{D}_{\mathbf{xx},k} = \mathbf{G}_x \mathbf{D}_\xi \mathbf{G}_x^T$  - корреляционная матрица вклада формирующих шумов,  $n_x$  - число элементов в  $\mathbf{x}_k$ .

Большинство используемых на практике моделей включают один формирующий шум, причем прибавляется он, как правило, к параметру, изменяемому только действием этого шума. Пусть это  $j$ -й параметр вектора состояния. В таком случае расчет экстраполяционной ПВ можно существенно упростить. ПВ перехода принимает вид

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = C \exp\left(-\frac{(x_{k,j} - x_{k-1,j})^2}{2D_\xi}\right) \prod_{i=1..n_x, i \neq j} \delta(x_{k,i} - (\mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1})_i). \quad (2.85)$$

Например, для модели смещения частоты первого РЧБ, используемой в данной работе

$$p(\omega_k, \omega'_k | \omega_{k-1}, \omega'_{k-1}) = C \exp\left(-\frac{(\omega'_k - \omega'_{k-1})^2}{2D_{\xi_\omega}}\right) \delta(\omega_k - \omega_{k-1} - \omega'_k T). \quad (2.86)$$

Тогда экстраполяционная ПВ

$$\begin{aligned} p(\omega_k, \omega'_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) &= \int_{\mathbf{x}_{\omega,k-1}} p(\mathbf{x}_{\omega,k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) p(\omega_k, \omega'_k | \mathbf{x}_{\omega,k-1}) d\mathbf{x}_{\omega,k-1} = \\ &= \int_{\omega_{k-1}} \int_{\omega'_{k-1}} p(\omega_{k-1}, \omega'_{k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) C \exp\left(-\frac{(\omega'_k - \omega'_{k-1})^2}{2D_{\xi_\omega}}\right) \times \\ &\quad \times \delta(\omega_k - \omega_{k-1} - \omega'_k T) d\omega_{k-1} d\omega'_{k-1}, \end{aligned} \quad (2.87)$$

Откуда

$$\begin{aligned}
p(\omega_k, \omega'_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) &= \\
&= C \int_{\omega'_{k-1}} p(\omega_k - \omega'_{k-1}T, \omega'_{k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) \exp\left(-\frac{(\omega'_k - \omega'_{k-1})^2}{2D_{\xi_\omega}}\right) d\omega'_{k-1}.
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Для системы третьего порядка:

$$\begin{aligned}
p(\psi_k, \psi'_k, \psi''_k | \psi_{k-1}, \psi'_{k-1}, \psi''_{k-1}) &= C \exp\left(-\frac{(\psi''_k - \psi''_{k-1})^2}{2D_{\xi_\psi}}\right) \times \\
&\times \delta(\psi_k - \psi_{k-1} - \psi'_{k-1}T) \delta(\psi'_k - \psi'_{k-1} - \psi''_{k-1}T),
\end{aligned} \tag{2.89}$$

тогда

$$\begin{aligned}
p(\psi_k, \psi'_k, \psi''_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) &= \int_{\mathbf{x}_{\psi,k-1}} p(\mathbf{x}_{\psi,k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) p(\mathbf{x}_{\psi,k} | \mathbf{x}_{\psi,k-1}) d\mathbf{x}_{\psi,k-1} = \\
&= C \int_{\psi''_{k-1}} p(\psi_k - (\psi'_{k-1} - \psi''_{k-1}T)T, \psi'_{k-1} - \psi''_{k-1}T, \psi''_{k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) \times \\
&\times \exp\left(-\frac{(\psi''_k - \psi''_{k-1})^2}{2D_{\xi_\psi}}\right) d\psi''_{k-1}.
\end{aligned} \tag{2.90}$$

В случае совместной АПВ  $p(\mathbf{x}_\psi, \mathbf{x}_\omega | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L})$ :

$$\begin{aligned}
p(\psi_k, \psi'_k, \psi''_k, \omega_k, \omega'_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) &= \\
&= C \int_{\psi''_{k-1}} \int_{\omega'_{k-1}} p(\psi_k - (\psi'_{k-1} - \psi''_{k-1}T)T, \psi'_{k-1} - \psi''_{k-1}T, \psi''_{k-1}, \omega_k - \omega'_{k-1}T, \omega'_{k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) \times \\
&\times \exp\left(-\frac{(\psi''_k - \psi''_{k-1})^2}{2D_{\xi_\psi}} - \frac{(\omega'_k - \omega'_{k-1})^2}{2D_{\xi_\omega}}\right) d\psi''_{k-1} d\omega'_{k-1}.
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Обобщим результат

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) &= p(\psi_{2,k}, \psi'_{2,k}, \psi''_{2,k}, \dots, \psi_{M,k}, \psi'_{M,k}, \psi''_{M,k}, \omega_k, \omega'_k, \tau_k | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) = \\
&= C \int_{\psi''_{2,k-1}} \int_{\psi''_{M,k-1}} \int_{\omega'_{k-1}} \int_{\tau_{k-1}} p(\psi_{2,k} - (\psi'_{2,k-1} - \psi''_{2,k-1}T)T, \psi'_{2,k-1} - \psi''_{2,k-1}T, \psi''_{2,k-1}, \dots, \\
&\psi_{M,k} - (\psi'_{M,k-1} - \psi''_{M,k-1}T)T, \psi'_{M,k-1} - \psi''_{M,k-1}T, \psi''_{M,k-1}, \omega_k - \omega'_{k-1}T, \omega'_{k-1} | \mathbf{Y}_{1,1}^{k-1,L}) \times \\
&\times \exp\left(-\frac{\sum_{m=2}^M (\psi''_{m,k} - \psi''_{m,k-1})^2}{2D_{\xi_\psi}} - \frac{(\omega'_k - \omega'_{k-1})^2}{2D_{\xi_\omega}} - \frac{(\tau_k - \tau_{k-1})^2}{2D_{\xi_\tau}}\right) d\tau_{k-1} d\omega'_{k-1} \prod_{m=2}^M d\psi''_{m,k-1}.
\end{aligned} \tag{2.92}$$

## П.2.8 Алгоритм дискриминатора разности фаз

Для определения алгоритма ДРФ необходимо найти компоненты вектора

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_{\psi,k}^2(\lambda_k)}{\partial \lambda_k} &= \\ &= \sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k}(\lambda_k) \left( \sum_{m=1}^M \frac{\partial I_{\psi,m,k}(\lambda_k)}{\partial \lambda_k} \right) + \sum_{m=1}^M Q_{\psi,m,k}(\lambda_k) \left( \sum_{m=1}^M \frac{\partial Q_{\psi,m,k}(\lambda_k)}{\partial \lambda_k} \right), \end{aligned} \quad (2.93)$$

соответствующие параметрам  $\psi_{m,k} = \psi_{j,k}$ ,  $j = 2 \dots M$ ,  $\psi_{1,k} = 0$ .

По отдельности рассчитаем производные корреляционных сумм:

$$\frac{\partial \sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k}}{\partial \psi_{j,k}} = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_{c,m,k,l} \frac{\partial}{\partial \psi_{j,k}} \cos(\Phi_{\psi,m,k,l}(\lambda_k)). \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi_{j,k}} \cos(\Phi_{\psi,m,k,l}(\lambda_k)) &= \frac{\partial}{\partial \psi_{j,k}} \cos(\omega_{if} t_{k,l} + (\omega_{1,k} + \psi'_{m,k})(l-1)T_d + \psi_{m,k}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \psi_{j,k}} \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k) + \psi_{m,k}) = \\ &= \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) \cdot \frac{\partial}{\partial \psi_{j,k}} \cos(\psi_{m,k}) - \sin(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) \frac{\partial}{\partial \psi_{j,k}} \sin(\psi_{m,k}) = \\ &= \begin{cases} -\cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) \cdot \sin(\psi_{m,k}) - \sin(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) \cos(\psi_{m,k}), & \text{if } j = m; \\ 0, & \text{if } j \neq m, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.95)$$

где

$$\Phi_{m,k,l}(\lambda_k) \stackrel{df}{=} \omega_{if} t_{k,l} + (\omega_{1,k} + \psi'_{m1,k})(l-1)T_d \quad (2.96)$$

Подставляем (2.95) в (2.94)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k}}{\partial \psi_{j,k}} &= -\sin(\psi_{j,k}) \sum_{l=1}^L y_{j,k,l} G_{c,m,k,l} \cos(\Phi_{j,k,l}(\lambda_k)) - \\ &- \cos(\psi_{j,k}) \sum_{l=1}^L y_{j,k,l} G_{c,m,k,l} \sin(\Phi_{j,k,l}(\lambda_k)) = \\ &= -\sin(\psi_{j,k}) I_{j,k}(\lambda_k) - \cos(\psi_{j,k}) Q_{j,k}(\lambda_k), \end{aligned} \quad (2.97)$$

где

$$\begin{aligned}
I_{j,k}(\lambda_k) &= \sum_{l=1}^L y_{j,k,l} G_{c,m,k,l}(\lambda_k) \cos(\Phi_{j,k,l}(\lambda_k)); \\
Q_{j,k}(\lambda_k) &= \sum_{l=1}^L y_{j,k,l} G_{c,m,k,l}(\lambda_k) \sin(\Phi_{j,k,l}(\lambda_k)).
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Производная суммы квадратурных компонент

$$\frac{\partial \sum_{m=1}^M Q_{\psi,m,k}}{\partial \psi_{j,k}} = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_{c,m,k,l} \frac{\partial}{\partial \psi_{j,k}} \sin(\Phi_{\psi,m,k,l}(\lambda_k)), \tag{2.99}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \psi_{j,k}} \sin(\Phi_{\psi,m,k,l}(\lambda_k)) = \frac{\partial}{\partial \psi_{j,k}} \sin(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k) + \psi_{m,k}) = \\
&= \sin(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) \frac{\partial}{\partial \psi_{j,k}} \cos(\psi_{m,k}) + \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) \frac{\partial}{\partial \psi_{j,k}} \sin(\psi_{m,k}) = \\
&= \begin{cases} -\sin(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) \cdot \sin(\psi_{m,k}) + \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) \cos(\psi_{m,k}), & \text{if } j = m; \\ 0, & \text{if } j \neq m, \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.100}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sum_{m=1}^M \check{Q}_{m,k}}{\partial \psi_{j,k}} &= -\sin(\psi_{j,k}) \sum_{l=1}^L y_{j,k,l} G_{c,m,k,l} \sin(\Phi_{j,k,l}(\lambda_k)) - \\
&+ \cos(\psi_{j,k}) \sum_{l=1}^L y_{j,k,l} G_{c,m,k,l} \cos(\Phi_{j,k,l}(\lambda_k)) = \\
&= -\sin(\psi_{j,k}) Q_{j,k}(\lambda_k) + \cos(\psi_{j,k}) I_{j,k}(\lambda_k).
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Аналогично распишем сами синфазные и квадратурные компоненты:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k} &= \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_{c,m,k,l} \cos(\Phi_{\psi,m,k,l}(\lambda_k)) = \\
&= \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_{c,m,k,l} \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) - \\
&- \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_{c,m,k,l} \sin(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) = \\
&= \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) I_{m,k} - \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) Q_{m,k},
\end{aligned} \tag{2.102}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^M Q_{\psi,m,k} &= \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_{c,m,k,l} \sin(\Phi_{\psi,m,k,l}(\lambda_k)) = \\
&= \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_{c,m,k,l} \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) + \\
&+ \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_{c,m,k,l} \sin(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) = \\
&= \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) I_{m,k} + \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) Q_{m,k}.
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Подставляем результаты преобразований в (2.93)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial X_{\psi,k}^2(\lambda_k)}{2\partial\psi_{j,k}} = \\
& = \left( \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) I_{m,k}(\lambda_k) + \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) Q_{m,k}(\lambda_k) \right) \times \\
& \quad \times \left( \cos(\psi_{j,k}) I_{j,k}(\lambda_k) - \sin(\psi_{j,k}) Q_{j,k}(\lambda_k) \right) - \\
& - \left( \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) I_{m,k}(\lambda_k) - \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) Q_{m,k}(\lambda_k) \right) \times \\
& \quad \times \left( \sin(\psi_{j,k}) I_{j,k}(\lambda_k) + \cos(\psi_{j,k}) Q_{j,k}(\lambda_k) \right).
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Произведем дальнейшие преобразования

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial X_{\psi,k}^2(\lambda_k)}{2\partial\psi_{j,k}} = \\
& = \cos(\psi_{j,k}) I_{j,k} \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) I_{m,k} - \sin(\psi_{j,k}) Q_{j,k} \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) I_{m,k} + \\
& + \cos(\psi_{j,k}) I_{j,k} \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) Q_{m,k} - \sin(\psi_{j,k}) Q_{j,k} \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) Q_{m,k} - \\
& - \sin(\psi_{j,k}) I_{j,k} \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) I_{m,k} - \cos(\psi_{j,k}) Q_{j,k} \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) I_{m,k} + \\
& + \sin(\psi_{j,k}) I_{j,k} \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) Q_{m,k} + \cos(\psi_{j,k}) Q_{j,k} \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) Q_{m,k}.
\end{aligned} \tag{2.105}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial X_{\psi,k}^2(\lambda_k)}{2\partial\psi_{j,k}} = \cos(\psi_{j,k}) \left[ I_{j,k} \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) I_{m,k} + I_{j,k} \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) Q_{m,k} - \right. \\
& \left. - Q_{j,k} \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) I_{m,k} + Q_{j,k} \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) Q_{m,k} \right] - \\
& - \sin(\psi_{j,k}) \left[ Q_{j,k} \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) I_{m,k} + Q_{j,k} \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) Q_{m,k} + \right. \\
& \left. + I_{j,k} \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) I_{m,k} - I_{j,k} \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) Q_{m,k} \right],
\end{aligned} \tag{2.106}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_{\psi,k}^2(\lambda_k)}{2\partial\psi_{j,k}} &= \cos(\psi_{j,k}) \left[ I_{j,k} \left( \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) I_{m,k} + \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) Q_{m,k} \right) - \right. \\
&- Q_{j,k} \left( \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) I_{m,k} + \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) Q_{m,k} \right) \left. \right] - \\
&- \sin(\psi_{j,k}) \left[ Q_{j,k} \left( \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) I_{m,k} + \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) Q_{m,k} \right) + \right. \\
&\quad \left. + I_{j,k} \left( \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) I_{m,k} - \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) Q_{m,k} \right) \right],
\end{aligned} \tag{2.107}$$

что можно записать в сокращенном виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_{\psi,k}^2(\lambda_k)}{\partial\psi_{j,k}} &= \\
&= 2 \left\{ \cos(\psi_{j,k}) [I_{j,k} Q_{c,k} - Q_{j,k} I_{c,k}] - \sin(\psi_{j,k}) [Q_{j,k} Q_{c,k} + I_{j,k} I_{c,k}] \right\},
\end{aligned} \tag{2.108}$$

где

$$\begin{aligned}
I_{c,k}(\lambda_k) &\stackrel{df}{=} \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) I_{m,k} - \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) Q_{m,k}, \\
Q_{c,k}(\lambda_k) &\stackrel{df}{=} \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) I_{m,k} + \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) Q_{m,k}.
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Все дискриминаторы имеют множитель

$$\Upsilon(\lambda_k) = \frac{A}{\sigma_n^2} \frac{I_1 \left( \frac{A}{\sigma_n^2} X_{\psi,k}(\lambda_k) \right)}{I_0 \left( \frac{A}{\sigma_n^2} X_{\psi,k}(\lambda_k) \right)} \frac{1}{X_{\psi,k}(\lambda_k)}, \tag{2.110}$$

который в данной работе рассматривается как нормировочный. Найдем его значение, соответствующее математическим ожиданиям  $I_{\psi,m,k}(\lambda_k)$  и  $Q_{\psi,m,k}(\lambda_k)$  в точке истинных значений:

$$X_{\psi,k}(\tilde{\lambda}_k = \lambda_k) = \frac{ALM}{2}, \tag{2.111}$$

тогда

$$\Upsilon = \frac{I_1(2q_{c/n0}TM)}{I_0(2q_{c/n0}TM)} \frac{2}{LM\sigma_n^2} = \begin{cases} \frac{2}{LM\sigma_n^2}, & Mq_{c/n0}T > 1 \\ \frac{2q_{c/n0}T_d}{\sigma_n^2}, & Mq_{c/n0}T < 1 \end{cases}. \tag{2.112}$$

## П.2.9 Расчет дискриминационной характеристики ДРФ и её крутизны

Рассчитаем дискриминационную характеристику синтезированного дискриминатора разности фаз.

В устройстве дискриминатора можно выделить коррелятор – блок, формирующий величины:

$\{I_{m,k}\}_{1..M}$  - синфазные корреляционные суммы/компоненты;

$\{Q_{m,k}\}_{1..M}$  - квадратурные корреляционные суммы/компоненты.

Вместе эти величины будем называть *квадратурными суммами/компонентами*.

Для расчета дискриминационной характеристики найдем ПВ квадратурных компонент. Для этого воспользуемся моделью наблюдений (сжатием ДК пренебрежем):

$$I_{m,k}(\tilde{\lambda}_k) = \sum_{l=1}^L A \cdot G_c(t_{k,l} - \tilde{t}_{m,k}) \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k) + \psi_{m,k} + \varphi_{1,k}) \times \\ \times G_c(t_{k,l} - \tilde{t}_{m,k}) \cos(\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)) + \\ + \sum_{l=1}^L n_{m,k,l} \cdot G_c(t_{k,l} - \tilde{t}_{m,k}) \cos(\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)). \quad (2.113)$$

Согласно постановке задачи  $n_{m,k,l}$  - некоррелированный гауссовский случайный процесс, отдельные отсчеты которого являются случайными величинами, имеющими нормальный закон распределения с нулевым математическим ожиданием. Умножение на скаляр оставляет распределение СВ нормальным с нулевым математическим ожиданием, как и последующие суммирование СВ. Таким образом, второе слагаемое в (2.113) является нормально распределенной СВ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$\sigma_{IQ,k}^2 \stackrel{df}{=} \sigma_{n,k}^2 \cdot L/2 \quad (2.114)$$

Первое слагаемое в (2.113) детерминировано, обозначим его  $\bar{I}_{m,k}(\tilde{\lambda}_k)$  и упростим

$$\begin{aligned} \bar{I}_{m,k}(\tilde{\lambda}_k) = & \frac{A}{2} \sum_{l=1}^L G_c(t_{k,l} - \tau_{m,k}) G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k}) \times \\ & \times \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k) + \Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k) + \psi_{m,k} + \varphi_{1,k}) + \\ & + \frac{A}{2} \sum_{l=1}^L G_c(t_{k,l} - \tau_{m,k}) G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k}) \times \\ & \times \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k) - \Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k) + \psi_{m,k} + \varphi_{1,k}). \end{aligned} \quad (2.115)$$

Последовательность под суммой первого слагаемого является выборкой быстро осциллирующего косинуса, так как аргументом тригонометрической суммы является сумма опорной и реальной полной фазы сигнала. В то время как во втором слагаемом аргументом является разность. Первым слагаемым можно пренебречь по сравнению со вторым, тогда

$$\begin{aligned} \bar{I}_{m,k}(\tilde{\lambda}_k) = & \frac{A}{2} \sum_{l=1}^L G_c(t_{k,l} - \tau_{m,k}) G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k}) \times \\ & \times \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k) - \Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k) + \psi_{m,k} + \varphi_{1,k}). \end{aligned} \quad (2.116)$$

Рассмотрим аргумент косинуса

$$\begin{aligned} \Phi_{m,k,l}(\lambda_k) - \Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k) + \psi_{m,k} + \varphi_{1,k} = \\ (\delta\omega_{1,k} + \delta\psi'_{m,k})(l-1)T_d + \psi_{m,k} + \varphi_{1,k}, \end{aligned} \quad (2.117)$$

где

$$\begin{aligned} \delta\omega_{1,k} &= \omega_{1,k} - \tilde{\omega}_{1,k}, \\ \delta\psi'_{m,k} &= \psi'_{m,k} - \tilde{\psi}'_{m,k}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{I}_{m,k}(\tilde{\lambda}_k) = & \frac{A}{2} \sum_{l=1}^L G_c(t_{k,l} - \tau_{m,k}) G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k}) \times \\ & \times \cos((\delta\omega_{1,k} + \delta\psi'_{m,k})(l-1)T_d + \psi_{m,k} + \varphi_{1,k}). \end{aligned} \quad (2.119)$$

Для приложений СРНС, как правило, принимается аппроксимация (2.119)

$$\bar{I}_{m,k}(\tilde{\lambda}_k) = A_{IQ,k} \rho(\delta\tau_{m,k}) \operatorname{sinc}\left(\frac{(\delta\omega_{1,k} + \delta\psi'_{m,k})T}{2}\right) \times \times \cos\left(\frac{(\delta\omega_{1,k} + \delta\psi'_{m,k})T}{2} + \psi_{m,k} + \varphi_{1,k}\right), \quad (2.120)$$

$$A_{IQ} \stackrel{df}{=} \frac{AL}{2}, \quad (2.121)$$

где  $\rho(\delta\tau_{m,k})$  является нормированной автокорреляционной функцией дальномерного кода,

$$\delta\tau_{m,k} = \tau_{1,k} - \tilde{\tau}_{1,k} + \Delta\tau_{m,k} - \Delta\tilde{\tau}_{m,k}. \quad (2.122)$$

Таким образом, синфазная сумма является СВ, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием (2.120) и дисперсией (2.114)

Аналогичные выкладки можно повторить для квадратурной компоненты

$$\bar{Q}_{m,k}(\tilde{\lambda}_k) = -A_{IQ,k} \rho(\delta\tau_{m,k}) \operatorname{sinc}\left(\frac{(\delta\omega_{1,k} + \delta\psi'_{m,k})T}{2}\right) \times \times \sin\left(\frac{(\delta\omega_{1,k} + \delta\psi'_{m,k})T}{2} + \psi_{m,k} + \varphi_{1,k}\right). \quad (2.123)$$

Квадратурная компонента является СВ, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием (2.123) и дисперсией (2.114).

Синфазную и квадратурную компоненты можно представить в виде сумм:

$$\begin{aligned} I_{m,k}(\tilde{\lambda}_k) &= \bar{I}_{m,k}(\tilde{\lambda}_k) + n_{I,m,k}; \\ Q_{m,k}(\tilde{\lambda}_k) &= \bar{Q}_{m,k}(\tilde{\lambda}_k) + n_{Q,m,k}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Легко показать, что шумы  $n_{I,m,k}$  и  $n_{Q,m,k}$  практически не коррелируют между собой.

Следующим шагом после расчета корреляционных сумм является нахождение «совместных» квадратур  $I_{c,k}$  и  $Q_{c,k}$ . На основании (2.124) и (2.109) данные величины являются случайными, распределенными по нормальному закону. Математическое ожидание для  $Q_{c,k}$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{c,k} &= \sum_{m=1}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) \bar{I}_{m,k} + \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) \bar{Q}_{m,k} = \\
&= A_{IQ} \sum_{m=1}^M \rho(\delta\tau_{m,k}) \operatorname{sinc}\left(\frac{(\delta\omega_{1,k} + \delta\psi'_{m,k})T}{2}\right) \times \\
&\quad \times \left\{ \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) \cos\left(\frac{(\delta\omega_{1,k} + \delta\psi'_{m,k})T}{2} + \psi_{m,k} + \varphi_{1,k}\right) - \right. \\
&\quad \left. - \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) \sin\left(\frac{(\delta\omega_{1,k} + \delta\psi'_{m,k})T}{2} + \psi_{m,k} + \varphi_{1,k}\right) \right\}.
\end{aligned} \tag{2.125}$$

Введем обозначение

$$\alpha_{m,k} \stackrel{df}{=} \frac{(\delta\omega_{1,k} + \delta\psi'_{m,k})T}{2}, \tag{2.126}$$

тогда

$$\bar{Q}_{c,k} = -A_{IQ,k} \sum_{m=1}^M \rho(\delta\tau_{m,k}) \operatorname{sinc}(\alpha_{m,k}) \sin(\alpha_{m,k} + \delta\psi_{m,k} + \varphi_{1,k}), \tag{2.127}$$

где

$$\delta\psi_{m,k} \stackrel{df}{=} \psi_{m,k} - \tilde{\psi}_{m,k}. \tag{2.128}$$

Аналогично с синфазной «совместной» суммой  $I_{c,k}$

$$\bar{I}_{c,k} = A_{IQ,k} \sum_{m=1}^M \rho(\delta\tau_{m,k}) \operatorname{sinc}(\alpha_{m,k}) \cos(\alpha_{m,k} + \delta\psi_{m,k} + \varphi_{1,k}). \tag{2.129}$$

По аналогии с (2.124) можно записать

$$\begin{aligned}
I_{c,k} &= \bar{I}_{c,k} + n_{Ic,k}, \\
Q_{c,k} &= \bar{Q}_{c,k} + n_{Qc,k}
\end{aligned} \tag{2.130}$$

где  $n_{Ic,k}$  и  $n_{Qc,k}$  - гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$\begin{aligned}
D[n_{Ic}] &= \sigma_{IQ,k}^2 \left\{ \sum_{m=1}^M \sin^2(\tilde{\psi}_{m,k}) + \sum_{m=1}^M \cos^2(\tilde{\psi}_{m,k}) \right\} = \sigma_{IQ,k}^2 M = \sigma_{IQc,k}^2; \\
D[n_{Qc}] &= \sigma_{IQ,k}^2 \left\{ \sum_{m=1}^M \cos^2(\tilde{\psi}_{m,k}) + \sum_{m=1}^M (-\sin(\tilde{\psi}_{m,k}))^2 \right\} = \sigma_{IQ,k}^2 M = \sigma_{IQc,k}^2.
\end{aligned} \tag{2.131}$$

Далее дискриминатор производит перемножение величин  $I_{c,k}$ ,  $Q_{c,k}$  и квадратурных компонент соответствующей приемной точки. Рассмотрим комбинации

$$\begin{aligned}
I_{j,k}Q_{c,k} &= (\bar{I}_{j,k} + n_{I,j,k})(\bar{Q}_{c,k} + n_{Qc,k}) = \\
&= \bar{I}_{j,k} \cdot \bar{Q}_{c,k} + \bar{Q}_{c,k}n_{I,j,k} + \bar{I}_{j,k}n_{Qc,k} + n_{I,j,k}n_{Qc,k} = \\
&= A_{IQ,k}\rho(\delta\tau_{j,k})\text{sinc}(\alpha_{j,k})\cos(\varphi_{1,k} + \psi_{m,k} + \alpha_{j,k}) \times \\
&\times (-A_{IQ,k})\sum_{m=1}^M \rho(\delta\tau_{m,k})\text{sinc}(\alpha_{m,k}) \times \sin(\varphi_{1,k} + \alpha_{m,k} + \delta\psi_{m,k}) + \\
&+ n_{I,j,k}(-A_{IQ,k})\sum_{m=1}^M \rho(\delta\tau_{m,k})\text{sinc}(\alpha_{m,k}) \times \sin(\varphi_{1,k} + \alpha_{m,k} + \delta\psi_{m,k}) + \\
&+ n_{Qc,k}A_{IQ,k}\rho(\delta\tau_{j,k})\text{sinc}(\alpha_{j,k})\cos(\varphi_{1,k} + \psi_{m,k} + \alpha_{j,k}) + n_{I,j,k}n_{Qc,k}.
\end{aligned} \tag{2.132}$$

Между шумами  $n_{I,j,k}$  и  $n_{Qc,k}$  есть корреляционная связь:

$$\begin{aligned}
M[n_{I,j,k}n_{Qc,k}] &= M\left[n_{I,j,k}\left\{\sum_{m=1}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k})n_{I,m,k} + \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k})n_{Q,m,k}\right\}\right] = \\
&= M\left[n_{I,j,k}\sin(\tilde{\psi}_{m,k})n_{I,j,k}\right] = \sin(\tilde{\psi}_{m,k})M[n_{I,j,k}n_{I,j,k}] = \sin(\tilde{\psi}_{m,k})\sigma_{IQ,k}^2.
\end{aligned} \tag{2.133}$$

Поэтому математическое ожидание от (2.132) принимает вид

$$\begin{aligned}
M(I_{j,k}Q_{c,k}) &= -(A_{IQ,k})^2 \rho(\delta\tau_{j,k})\text{sinc}(\alpha_{j,k})\cos(\varphi_{1,k} + \psi_{j,k} + \alpha_{j,k}) \times \\
&\times \sum_{m=1}^M \rho(\delta\tau_{m,k})\text{sinc}(\alpha_{m,k}) \times \sin(\varphi_{1,k} + \alpha_{m,k} + \delta\psi_{m,k}) + \sin(\tilde{\psi}_{m,k})\sigma_{IQ,k}^2.
\end{aligned} \tag{2.134}$$

Наличие в выражении (2.132) слагаемого  $n_{I,j,k}n_{Qc,k}$  делает распределение величины  $I_{j,k}Q_{c,k}$  отличным от гауссовского.

Произведение синфазной суммы точки и синфазной «совместной» суммы

$$I_{j,k}I_{c,k} = \bar{I}_{j,k} \cdot \bar{I}_{c,k} + \bar{I}_{c,k}n_{I,j,k} + \bar{I}_{j,k}n_{Ic,k} + n_{I,j,k}n_{Ic,k}, \tag{2.135}$$

$$Q_{j,k}Q_{c,k} = \bar{Q}_{j,k} \cdot \bar{Q}_{c,k} + \bar{Q}_{c,k}n_{Q,j,k} + \bar{Q}_{j,k}n_{Qc,k} + n_{Q,j,k}n_{Qc,k}. \tag{2.136}$$

В соответствии со схемой дискриминатора находим разность

$$\begin{aligned}
I_{j,k}Q_{c,k} - Q_{j,k}I_{c,k} &= (\bar{I}_{j,k}\bar{Q}_{c,k} + \bar{Q}_{c,k}n_{I,j,k} + \bar{I}_{j,k}n_{Qc,k} + n_{I,j,k}n_{Qc,k}) - \\
&\quad - (\bar{Q}_{j,k}\bar{I}_{c,k} + \bar{I}_{c,k}n_{Q,j,k} + \bar{Q}_{j,k}n_{Ic,k} + n_{Q,j,k}n_{Ic,k}) = \\
&= \bar{I}_{j,k}\bar{Q}_{c,k} - \bar{Q}_{j,k}\bar{I}_{c,k} + \bar{I}_{j,k}n_{Qc,k} - \bar{Q}_{j,k}n_{Ic,k} + \\
&\quad + \bar{Q}_{c,k}n_{I,j,k} - \bar{I}_{c,k}n_{Q,j,k} + n_{I,j,k}n_{Qc,k} - n_{Q,j,k}n_{Ic,k}.
\end{aligned} \tag{2.137}$$

Аналогично для второй ветви, найдем сумму

$$\begin{aligned}
I_{j,k}I_{c,k} + Q_{j,k}Q_{c,k} &= \\
&= \bar{I}_{j,k} \cdot \bar{I}_{c,k} + \bar{Q}_{j,k}\bar{Q}_{c,k} + \bar{I}_{j,k}n_{Ic,k} + \bar{Q}_{j,k}n_{Qc,k} + \\
&\quad + \bar{Q}_{c,k}n_{Q,j,k} + \bar{I}_{c,k}n_{I,j,k} + n_{I,j,k}n_{Ic,k} + n_{Q,j,k}n_{Qc,k}.
\end{aligned} \tag{2.138}$$

Выражение (2.137) умножается на косинус опорной РФ и из результата вычитается выражение (2.138), умноженное на синус опорной РФ:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{\psi,j}}{2Y} &= \cos(\tilde{\psi}_{j,k}) \{ \bar{I}_{j,k}\bar{Q}_{c,k} - \bar{Q}_{j,k}\bar{I}_{c,k} + \bar{I}_{j,k}n_{Qc,k} - \bar{Q}_{j,k}n_{Ic,k} + \\
&\quad + \bar{Q}_{c,k}n_{I,j,k} - \bar{I}_{c,k}n_{Q,j,k} + n_{I,j,k}n_{Qc,k} - n_{Q,j,k}n_{Ic,k} \} - \\
&\quad - \sin(\tilde{\psi}_{j,k}) \{ \bar{I}_{j,k}\bar{I}_{c,k} + \bar{Q}_{j,k}\bar{Q}_{c,k} + \bar{I}_{j,k}n_{Ic,k} + \bar{Q}_{j,k}n_{Qc,k} + \\
&\quad + \bar{Q}_{c,k}n_{Q,j,k} + \bar{I}_{c,k}n_{I,j,k} + n_{I,j,k}n_{Ic,k} + n_{Q,j,k}n_{Qc,k} \}.
\end{aligned} \tag{2.139}$$

Найдем математическое ожидание выражения (2.139)

$$\begin{aligned}
M \left[ \frac{u_{\psi,j}}{2Y} \right] &= \cos(\tilde{\psi}_{j,k}) \{ \bar{I}_{j,k}\bar{Q}_{c,k} - \bar{Q}_{j,k}\bar{I}_{c,k} + M[\bar{I}_{j,k}n_{Qc,k}] - M[\bar{Q}_{j,k}n_{Ic,k}] + \\
&\quad + M[\bar{Q}_{c,k}n_{I,j,k}] - M[\bar{I}_{c,k}n_{Q,j,k}] + M[n_{I,j,k}n_{Qc,k}] - M[n_{Q,j,k}n_{Ic,k}] \} - \\
&\quad - \sin(\tilde{\psi}_{j,k}) \{ \bar{I}_{j,k}\bar{I}_{c,k} + \bar{Q}_{j,k}\bar{Q}_{c,k} + M[\bar{I}_{j,k}n_{Ic,k}] + M[\bar{Q}_{j,k}n_{Qc,k}] + \\
&\quad + M[\bar{Q}_{c,k}n_{Q,j,k}] + M[\bar{I}_{c,k}n_{I,j,k}] + M[n_{I,j,k}n_{Ic,k}] + M[n_{Q,j,k}n_{Qc,k}] \}.
\end{aligned} \tag{2.140}$$

Математические ожидания

$$\begin{aligned}
M[\bar{I}_{j,k}n_{Qc,k}] &= M[\bar{Q}_{j,k}n_{Ic,k}] = M[\bar{Q}_{c,k}n_{I,j,k}] = M[\bar{I}_{c,k}n_{Q,j,k}] = \\
&= M[\bar{I}_{j,k}n_{Ic,k}] = M[\bar{Q}_{j,k}n_{Qc,k}] = M[\bar{Q}_{c,k}n_{Q,j,k}] = M[\bar{I}_{c,k}n_{I,j,k}] = 0,
\end{aligned} \tag{2.141}$$

так как СВ являются произведение СВ с нормальным законом распределения и нулевым математическим ожиданием на число.

Математические ожидания (доказывается по аналогии с (2.133))

$$\begin{aligned}
E[n_{I,j,k}n_{Qc,k}] &= \sin(\tilde{\psi}_{m,k})\sigma_{IQ,k}^2, \\
E[n_{Q,j,k}n_{Ic,k}] &= -\sin(\tilde{\psi}_{m,k})\sigma_{IQ,k}^2, \\
E[n_{I,j,k}n_{Ic,k}] &= \cos(\tilde{\psi}_{m,k})\sigma_{IQ,k}^2, \\
E[n_{Q,j,k}n_{Qc,k}] &= \cos(\tilde{\psi}_{m,k})\sigma_{IQ,k}^2,
\end{aligned} \tag{2.142}$$

взаимно компенсируют друг друга. Тогда выражение (2.140) принимает вид

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{u_{\psi,j}}{2\tilde{Y}}\right] &= \cos(\tilde{\psi}_{j,k})[\bar{I}_{j,k}\bar{Q}_{c,k} - \bar{Q}_{j,k}\bar{I}_{c,k}] - \\
&\quad - \sin(\tilde{\psi}_{j,k})[\bar{I}_{j,k}\bar{I}_{c,k} + \bar{Q}_{j,k}\bar{Q}_{c,k}].
\end{aligned} \tag{2.143}$$

Воспользовавшись уравнениями (2.120), (2.123), (2.127), (2.129), получаем

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{u_{\psi,j}}{2\tilde{Y}}\right] &= \cos(\tilde{\psi}_{j,k}) \times [A_{IQ}\rho(\delta\tau_{j,k})\text{sinc}(\alpha_{j,k})\cos(\varphi_{1,k} + \psi_{j,k} + \alpha_{j,k}) \times \\
&\quad \times (-A_{IQ}) \sum_{m=1}^M \rho(\delta\tau_{m,k})\text{sinc}(\alpha_{m,k}) \times \sin(\varphi_{1,k} + \alpha_{m,k} + \delta\psi_{m,k}) - \\
&\quad - (-A_{IQ})\rho(\delta\tau_{j,k})\text{sinc}(\alpha_{j,k})\sin(\varphi_{1,k} + \psi_{j,k} + \alpha_{j,k}) \times \\
&\quad \times A_{IQ} \sum_{m=1}^M \rho(\delta\tau_{m,k})\text{sinc}(\alpha_{m,k}) \times \cos(\varphi_{1,k} + \alpha_{m,k} + \delta\psi_{m,k})] - \\
&\quad - \sin(\tilde{\psi}_{j,k}) \times [A_{IQ}\rho(\delta\tau_{j,k})\text{sinc}(\alpha_{j,k})\cos(\varphi_{1,k} + \psi_{j,k} + \alpha_{j,k}) \times \\
&\quad \times A_{IQ} \sum_{m=1}^M \rho(\delta\tau_{m,k})\text{sinc}(\alpha_{m,k}) \times \cos(\varphi_{1,k} + \alpha_{m,k} + \delta\psi_{m,k}) + \\
&\quad + (-A_{IQ})\rho(\delta\tau_{j,k})\text{sinc}(\alpha_{j,k})\sin(\varphi_{1,k} + \psi_{j,k} + \alpha_{j,k}) \times \\
&\quad \times (-A_{IQ}) \sum_{m=1}^M \rho(\delta\tau_{m,k})\text{sinc}(\alpha_{m,k}) \times \sin(\varphi_{1,k} + \alpha_{m,k} + \delta\psi_{m,k})] = \\
&= (A_{IQ})^2 \cos(\tilde{\psi}_{j,k}) \times [\rho(\delta\tau_{j,k})\text{sinc}(\alpha_{j,k}) \times \\
&\quad \times \sum_{m=1}^M \rho(\delta\tau_{m,k})\text{sinc}(\alpha_{m,k}) \{ \cos(\varphi_{1,k} + \alpha_{m,k} + \delta\psi_{m,k})\sin(\varphi_{1,k} + \psi_{j,k} + \alpha_{j,k}) - \\
&\quad - \sin(\varphi_{1,k} + \alpha_{m,k} + \delta\psi_{m,k})\cos(\varphi_{1,k} + \psi_{j,k} + \alpha_{j,k}) \}] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -A_{IQ}^2 \sin(\tilde{\psi}_{j,k}) \times \left[ \rho(\delta\tau_{j,k}) \operatorname{sinc}(\alpha_{j,k}) \times \right. \\
& \times \left. \left\{ \sum_{m=1}^M \rho(\delta\tau_{m,k}) \operatorname{sinc}(\alpha_{m,k}) \times \cos(\varphi_{1,k} + \alpha_{m,k} + \delta\psi_{m,k}) \cos(\varphi_{1,k} + \psi_{j,k} + \alpha_{j,k}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{m=1}^M \rho(\delta\tau_{m,k}) \operatorname{sinc}(\alpha_{m,k}) \times \sin(\varphi_{1,k} + \alpha_{m,k} + \delta\psi_{m,k}) \sin(\varphi_{1,k} + \psi_{j,k} + \alpha_{j,k}) \right\} \right] = \\
& = A_{IQ}^2 \rho(\delta\tau_{j,k}) \operatorname{sinc}(\alpha_{j,k}) \times \\
& \times \left\{ \cos(\tilde{\psi}_{j,k}) \times \sum_{m=1}^M \rho(\delta\tau_{m,k}) \operatorname{sinc}(\alpha_{m,k}) \sin(\psi_{j,k} + \alpha_{j,k} - \alpha_{m,k} - \delta\psi_{m,k}) - \right. \\
& \left. - \sin(\tilde{\psi}_{j,k}) \times \sum_{m=1}^M \rho(\delta\tau_{m,k}) \operatorname{sinc}(\alpha_{m,k}) \cos(\psi_{j,k} + \alpha_{j,k} - \alpha_{m,k} - \delta\psi_{m,k}) \right\} = \\
& = A_{IQ}^2 \rho(\delta\tau_{j,k}) \operatorname{sinc}(\alpha_{j,k}) \times \\
& \quad \times \sum_{m=1}^M \rho(\delta\tau_{m,k}) \operatorname{sinc}(\alpha_{m,k}) \sin(\delta\psi_{j,k} + \alpha_{j,k} - \alpha_{m,k} - \delta\psi_{m,k}) \rightarrow
\end{aligned} \tag{2.144}$$

$$\begin{aligned}
U_{\psi,j}(\delta\lambda) & \stackrel{df}{=} M \left[ u_{\psi,j}(\lambda - \tilde{\lambda}) \right] = \\
& = 2\Gamma \left( \frac{A_k L}{2} \right)^2 \rho(\delta\tau_{j,k}) \operatorname{sinc} \left( \frac{(\delta\omega_{1,k} + \delta\psi'_{j,k}) T}{2} \right) \times \\
& \times \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \rho(\delta\tau_{m,k}) \operatorname{sinc} \left( \frac{(\delta\omega_{1,k} + \delta\psi'_{m,k}) T}{2} \right) \times \\
& \quad \times \sin \left( \delta\psi_{j,k} - \delta\psi_{m,k} + \frac{(\delta\psi'_{j,k} - \delta\psi'_{m,k}) T}{2} \right).
\end{aligned} \tag{2.145}$$

Выражение (2.145) описывает искомую дискриминационную характеристику дискриминатора разности фаз.

Крутизна дискриминационной характеристики (2.145) по параметру  $\delta\psi_{j,k}$

$$\begin{aligned}
S_\psi &= \left. \frac{df}{d\psi} \frac{\partial U_{\psi,j}(\delta\lambda)}{\partial \psi_{j,k}} \right|_{\delta\psi_j=0} = \\
&= 2\Upsilon(\tilde{\lambda}) \left( \frac{AL}{2} \right)^2 \rho(\delta\tau_{j,k}) \operatorname{sinc} \left( \frac{(\delta\omega_{1,k} + \delta\psi'_{j,k})T}{2} \right) \times \\
&\times \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \rho(\delta\tau_{m,k}) \operatorname{sinc} \left( \frac{(\delta\omega_{1,k} + \delta\psi'_{m,k})T}{2} \right) \times \\
&\times \cos \left( \delta\psi_{m,k} + \frac{(\delta\psi'_{j,k} - \delta\psi'_{m,k})T}{2} \right),
\end{aligned} \tag{2.146}$$

в частности, при совпадении всех опорных параметров с их истинными значениями,

$$S_\psi|_{\delta\lambda=0} = 2\Upsilon \cdot \left( \frac{AL}{2} \right)^2 \cdot (M-1). \tag{2.147}$$

## П.2.10 Расчет флуктуационной характеристики ДРФ

Определим полную флуктуационную характеристику, а затем приведем её на вход в точке истинного значения. На основании (2.108), (2.145) запишем

$$\begin{aligned}
\frac{D_{\eta_\psi}(\delta\lambda)}{(2\Upsilon)^2} &= E \left[ \frac{\left( u_{\psi,j}(\tilde{\lambda}) - M \left[ u_{\psi,j}(\tilde{\lambda}) \right] \right)^2}{(2\Upsilon)^2} \right] = \\
&= M \left[ \left( \cos(\tilde{\psi}_{j,k}) \times \right. \right. \\
&\times \left\{ \bar{I}_{j,k} n_{Qc,k} - \bar{Q}_{j,k} n_{Ic,k} + \bar{Q}_{c,k} n_{I,j,k} - \bar{I}_{c,k} n_{Q,j,k} + n_{I,j,k} n_{Qc,k} - n_{Q,j,k} n_{Ic,k} \right\} - \\
&- \sin(\tilde{\psi}_{j,k}) \times \\
&\times \left. \left. \left\{ \bar{I}_{j,k} n_{Ic,k} + \bar{Q}_{j,k} n_{Qc,k} + \bar{Q}_{c,k} n_{Q,j,k} + \bar{I}_{c,k} n_{I,j,k} + n_{I,j,k} n_{Ic,k} + n_{Q,j,k} n_{Qc,k} \right\} \right)^2 \right] = \\
&= M \left[ \cos(\tilde{\psi}_{j,k}) \times \right. \\
&\times \left. \left. \left( \bar{I}_{j,k} \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{I,m,k} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{Q,m,k} \right) - \bar{Q}_{j,k} \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{I,m,k} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{Q,m,k} \right) \right) \right. \right. \\
&\left. \left. + \left( \bar{I}_{j,k} \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{I,m,k} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{Q,m,k} \right) - \bar{Q}_{j,k} \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{I,m,k} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{Q,m,k} \right) \right) \right) \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +n_{I,j,k} \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) \bar{I}_{m,k} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) \bar{Q}_{m,k} \right) - n_{Q,j,k} \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) \bar{I}_{m,k} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) \bar{Q}_{m,k} \right) + \\
& +n_{I,j,k} \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{I,m,k} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{Q,m,k} \right) - n_{Q,j,k} \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{I,m,k} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{Q,m,k} \right) \Bigg\} - \\
& -\sin(\tilde{\psi}_{j,k}) \times \\
& \left\{ \bar{I}_{j,k} \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{I,m,k} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{Q,m,k} \right) + \bar{Q}_{j,k} \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{I,m,k} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{Q,m,k} \right) + \right. \\
& +n_{I,j,k} \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) \bar{I}_{m,k} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) \bar{Q}_{m,k} \right) + n_{Q,j,k} \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) \bar{I}_{m,k} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) \bar{Q}_{m,k} \right) + \\
& +n_{I,j,k} \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{I,m,k} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{Q,m,k} \right) + \\
& \left. \left. +n_{Q,j,k} \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{I,m,k} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{Q,m,k} \right) \right\}^2 = \\
& = M \left[ \left( \cos(\tilde{\psi}_{j,k}) \times \right. \right. \\
& \times \left\{ \bar{I}_{j,k} n_{G1,k} - \bar{Q}_{j,k} n_{G2,k} + \bar{G}_{1,k} n_{I,j,k} - \bar{G}_{2,k} n_{Q,j,k} + n_{I,j,k} n_{G1,k} - n_{Q,j,k} n_{G2,k} \right\} - \\
& -\sin(\tilde{\psi}_{j,k}) \times \\
& \left. \left. \times \left\{ \bar{I}_{j,k} n_{G2,k} + \bar{Q}_{j,k} n_{G1,k} + \bar{G}_{1,k} n_{Q,j,k} + \bar{G}_{2,k} n_{I,j,k} + n_{I,j,k} n_{G2,k} + n_{Q,j,k} n_{G1,k} \right\} \right)^2 \right], \tag{2.148}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{G}_{1,j} &= \sum_{\substack{df \\ m=1 \\ m \neq j}}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) \bar{I}_{m,k} + \sum_{\substack{df \\ m=1 \\ m \neq j}}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) \bar{Q}_{m,k}; \\
\bar{G}_{2,j} &= \sum_{\substack{df \\ m=1 \\ m \neq j}}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) \bar{I}_{m,k} - \sum_{\substack{df \\ m=1 \\ m \neq j}}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) \bar{Q}_{m,k}; \tag{2.149}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_{G1,j} &= \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{df} \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{I,m,k} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{Q,m,k}; \\
n_{G2,j} &= \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{df} \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{I,m,k} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) n_{Q,m,k}.
\end{aligned} \tag{2.150}$$

Найдем взаимную дисперсию  $n_{G1,j}$  и  $n_{G2,j}$

$$\begin{aligned}
D_{n_{G12}} &= E \left[ n_{G1,j} n_{G2,j} - M \left[ n_{G1,j} n_{G2,j} \right] \right]^2 = \\
&= \sum_{\substack{a=1 \\ a \neq j}}^M \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq j}}^M E \left[ \left( \sin(\tilde{\psi}_{a,k}) n_{I,a,k} + \cos(\tilde{\psi}_{a,k}) n_{Q,a,k} \right) \times \left( \cos(\tilde{\psi}_{b,k}) n_{I,b,k} - \sin(\tilde{\psi}_{b,k}) n_{Q,b,k} \right) \right] = \\
&= \sum_{\substack{a=1 \\ a \neq j}}^M \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq j}}^M E \left[ \sin(\tilde{\psi}_{a,k}) \cos(\tilde{\psi}_{b,k}) n_{I,a,k} n_{I,b,k} - \cos(\tilde{\psi}_{a,k}) \sin(\tilde{\psi}_{b,k}) n_{Q,a,k} n_{Q,b,k} \right] + \\
&+ \sum_{\substack{a=1 \\ a \neq j}}^M \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq j}}^M E \left[ \cos(\tilde{\psi}_{a,k}) \cos(\tilde{\psi}_{b,k}) n_{Q,a,k} n_{I,b,k} - \sin(\tilde{\psi}_{a,k}) \sin(\tilde{\psi}_{b,k}) n_{I,a,k} n_{Q,b,k} \right] = 0.
\end{aligned} \tag{2.151}$$

Дисперсия случайных величин  $n_{G1,j}$  и  $n_{G2,j}$

$$\begin{aligned}
\sigma_{G,k}^2 &= \sigma_{G,j,k}^2 = \sigma_{G1,j,k}^2 = \sigma_{G2,j,k}^2 = E \left[ n_{G1,j} n_{G2,j} - M \left[ n_{G1,j} n_{G2,j} \right] \right]^2 = \\
\sigma_{G1,j,k}^2 &= \sigma_{IQ,k}^2 \left\{ \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \sin^2(\tilde{\psi}_{m,k}) + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \cos^2(\tilde{\psi}_{m,k}) \right\} = \sigma_{IQ,k}^2 \cdot (M-1) = \sigma_{G,k}^2; \\
\sigma_{G2,j,k}^2 &= \sigma_{IQ,k}^2 \left\{ \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \cos^2(\tilde{\psi}_{m,k}) + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \left( -\sin(\tilde{\psi}_{m,k}) \right)^2 \right\} = \sigma_{IQ,k}^2 \cdot (M-1) = \sigma_{G,k}^2.
\end{aligned} \tag{2.152}$$

Преобразуем

$$\begin{aligned}
\frac{D_{n_{\psi}}(\delta\lambda)}{(2\Upsilon)^2} &= \cos^2(\tilde{\psi}_{j,k}) \cdot M \left[ \bar{I}_{j,k} n_{G1,k} - \bar{Q}_{j,k} n_{G2,k} + \bar{G}_{1,j} n_{I,j,k} - \right. \\
&\quad \left. - \bar{G}_{2,j} n_{Q,j,k} + n_{I,j,k} n_{G1,k} - n_{Q,j,k} n_{G2,k} \right]^2 + \\
&+ \sin^2(\tilde{\psi}_{j,k}) \cdot M \left[ \bar{I}_{j,k} n_{G2,k} + \bar{Q}_{j,k} n_{G1,k} + \bar{G}_{2,j} n_{I,j,k} + \right. \\
&\quad \left. + \bar{G}_{1,j} n_{Q,j,k} + n_{I,j,k} n_{G2,k} + n_{Q,j,k} n_{G1,k} \right]^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin^2(2\tilde{\psi}_{j,k}) \cdot M \left[ \left\{ \bar{I}_{j,k} n_{G1,k} - \bar{Q}_{j,k} n_{G2,k} + \bar{G}_{1,j} n_{I,j,k} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \bar{G}_{2,j} n_{Q,j,k} + n_{I,j,k} n_{G1,k} - n_{Q,j,k} n_{G2,k} \right\} \left\{ \bar{I}_{j,k} n_{G2,k} + \bar{Q}_{j,k} n_{G1,k} + \bar{G}_{2,j} n_{I,j,k} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \bar{G}_{1,j} n_{Q,j,k} + n_{I,j,k} n_{G2,k} + n_{Q,j,k} n_{G1,k} \right\} \right]. \tag{2.153}
\end{aligned}$$

Рассмотрим слагаемые раздельно

$$\begin{aligned}
& M \left[ \bar{I}_{j,k} n_{G1,k} - \bar{Q}_{j,k} n_{G2,k} + \bar{G}_{1,j} n_{I,j,k} - \bar{G}_{2,j} n_{Q,j,k} + n_{I,j,k} n_{G1,k} - n_{Q,j,k} n_{G2,k} \right]^2 = \\
& \bar{I}_{j,k}^2 \sigma_{G,k}^2 + \bar{Q}_{j,k}^2 \sigma_{G,k}^2 + \bar{G}_{1,j}^2 \sigma_{IQ,k}^2 + \bar{G}_{2,j}^2 \sigma_{IQ,k}^2 + 2\sigma_{IQ,k}^2 \sigma_{G,k}^2 = \\
& = \sigma_{G,k}^2 A_{IQ,k}^2 \rho^2(\delta\tau_{j,k}) \text{sinc}^2(\alpha_{j,k}) + 2\sigma_{IQ,k}^2 \sigma_{G,k}^2 + \\
& + \sigma_{IQ,k}^2 A_{IQ,k}^2 \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \rho^2(\delta\tau_{m,k}) \text{sinc}^2(\alpha_{m,k}) + \sum_{\substack{a=1 \\ a \neq j}}^M \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq j,a}}^M \rho(\delta\tau_{a,k}) \text{sinc}(\alpha_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \right) \times \\
& \times \left\{ \sin(\varphi_{1,k} + \alpha_{a,k} + \delta\psi_{a,k}) \sin(\varphi_{1,k} + \alpha_{b,k} + \delta\psi_{b,k}) + \right. \\
& \left. + \cos(\varphi_{1,k} + \alpha_{m,k} + \delta\psi_{m,k}) \cos(\varphi_{1,k} + \alpha_{m,k} + \delta\psi_{m,k}) \right\} = \\
& = \sigma_{G,k}^2 A_{IQ,k}^2 \rho^2(\delta\tau_{j,k}) \text{sinc}^2(\alpha_{j,k}) + 2\sigma_{IQ,k}^2 \sigma_{G,k}^2 + \\
& + \sigma_{IQ,k}^2 A_{IQ,k}^2 \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \rho^2(\delta\tau_{m,k}) \text{sinc}^2(\alpha_{m,k}) + \sum_{\substack{a=1 \\ a \neq j}}^M \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq j,a}}^M \rho(\delta\tau_{a,k}) \text{sinc}(\alpha_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \right) \times \\
& \times \cos(\alpha_{a,k} + \delta\psi_{a,k} - \alpha_{b,k} - \delta\psi_{b,k}). \tag{2.154}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M \left[ \bar{I}_{j,k} n_{G2,k} + \bar{Q}_{j,k} n_{G1,k} + \bar{G}_{2,j} n_{I,j,k} + \bar{G}_{1,j} n_{Q,j,k} + n_{I,j,k} n_{G2,k} + n_{Q,j,k} n_{G1,k} \right]^2 = \\
& \bar{I}_{j,k}^2 \sigma_{G,k}^2 + \bar{Q}_{j,k}^2 \sigma_{G,k}^2 + \bar{G}_{1,j}^2 \sigma_{IQ,k}^2 + \bar{G}_{2,j}^2 \sigma_{IQ,k}^2 + 2\sigma_{IQ,k}^2 \sigma_{G,k}^2 = \\
& = \sigma_{G,k}^2 A_{IQ,k}^2 \rho^2(\delta\tau_{j,k}) \text{sinc}^2(\alpha_{j,k}) + 2\sigma_{IQ,k}^2 \sigma_{G,k}^2 + \\
& + \sigma_{IQ,k}^2 A_{IQ,k}^2 \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \rho^2(\delta\tau_{m,k}) \text{sinc}^2(\alpha_{m,k}) + \sum_{\substack{a=1 \\ a \neq j}}^M \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq j,a}}^M \rho(\delta\tau_{a,k}) \text{sinc}(\alpha_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \right) \times \\
& \times \cos(\alpha_{a,k} + \delta\psi_{a,k} - \alpha_{b,k} - \delta\psi_{b,k}). \tag{2.155}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M \left[ \left\{ \bar{I}_{j,k} n_{G1,k} - \bar{Q}_{j,k} n_{G2,k} + \bar{G}_{1,j} n_{I,j,k} - \bar{G}_{2,j} n_{Q,j,k} + n_{I,j,k} n_{G1,k} - n_{Q,j,k} n_{G2,k} \right\} \times \right. \\
& \left. \left\{ \bar{I}_{j,k} n_{G2,k} + \bar{Q}_{j,k} n_{G1,k} + \bar{G}_{2,j} n_{I,j,k} + \bar{G}_{1,j} n_{Q,j,k} + n_{I,j,k} n_{G2,k} + n_{Q,j,k} n_{G1,k} \right\} \right] = \\
& \bar{G}_{1,j} \bar{G}_{2,j} \sigma_{IQ,k}^2 - \bar{G}_{1,j} \bar{G}_{2,j} \sigma_{IQ,k}^2 + \bar{I}_{j,k} \bar{Q}_{j,k} \sigma_{G,k}^2 - \bar{I}_{j,k} \bar{Q}_{j,k} \sigma_{G,k}^2 = 0. \tag{2.156}
\end{aligned}$$

Подставляем (2.154), (2.155), (2.156) в (2.153)

$$\begin{aligned}
& \frac{D_{\eta_\psi}(\delta\lambda)}{(2\Upsilon)^2} = \\
& = \left( \cos^2(\tilde{\psi}_{j,k}) + \sin^2(\tilde{\psi}_{j,k}) \right) \times \\
& \times \left\{ \sigma_{G,k}^2 A_{IQ,k}^2 \rho^2(\delta\tau_{j,k}) \operatorname{sinc}^2(\alpha_{j,k}) + 2\sigma_{IQ,k}^2 \sigma_{G,k}^2 + \right. \\
& + \sigma_{IQ,k}^2 A_{IQ,k}^2 \left( \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \rho^2(\delta\tau_{m,k}) \operatorname{sinc}^2(\alpha_{m,k}) + \sum_{\substack{a=1 \\ a \neq j}}^M \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq j, a}}^M \rho(\delta\tau_{a,k}) \operatorname{sinc}(\alpha_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \operatorname{sinc}(\alpha_{b,k}) \right) \times \\
& \left. \times \cos(\alpha_{a,k} + \delta\psi_{a,k} - \alpha_{b,k} - \delta\psi_{b,k}) \right\}, \quad (2.157)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{\eta_\psi}(\delta\lambda) &= (2\Upsilon A_{IQ,k} \sigma_{IQ,k})^2 \\
& \times \left\{ (M-1) \rho^2(\delta\tau_{j,k}) \operatorname{sinc}^2(\alpha_{j,k}) + \sum_{m=1, m \neq j}^M \rho^2(\delta\tau_{m,k}) \operatorname{sinc}^2(\alpha_{m,k}) + \frac{2\sigma_{IQ,k}^2 (M-1)}{A_{IQ,k}^2} + \right. \\
& \left. + \sum_{\substack{a=1 \\ a \neq j}}^M \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq j, a}}^M \rho(\delta\tau_{a,k}) \operatorname{sinc}(\alpha_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \operatorname{sinc}(\alpha_{b,k}) \cos(\alpha_{a,k} + \delta\psi_{a,k} - \alpha_{b,k} - \delta\psi_{b,k}) \right\}. \quad (2.158)
\end{aligned}$$

Дисперсия в точке истинных значений

$$D_{\eta_\psi}(0) = 2(2\Upsilon A_{IQ,k} \sigma_{IQ,k})^2 (M-1) \left( 1 + \frac{M-2}{2} + \frac{\sigma_{IQ,k}^2}{A_{IQ,k}^2} \right). \quad (2.159)$$

Приведенная на вход дисперсия в точке истинных значений

$$D_{\tilde{\eta}_\psi}(0) = \frac{2(2\Upsilon A_{IQ,k}^2 \sigma_{IQ,k})^2 (M-1) \left( 1 + \frac{M-2}{2} + \frac{\sigma_{IQ,k}^2}{A_{IQ,k}^2} \right)}{(2\Upsilon A_{IQ,k}^2 (M-1))^2} = \frac{1}{(M-1)q} \left( 1 + \frac{M-2}{2} + \frac{1}{2q} \right), \quad (2.160)$$

$$\tilde{\alpha} \tilde{\alpha} \stackrel{df}{q} = \frac{E}{N_0} = \frac{A_{IQ}^2}{2\sigma_{IQ,k}^2}, \quad \sigma_{IQ,k}^2 \stackrel{df}{=} \sigma_{n,k}^2 \frac{L}{2}, \quad A_{IQ} \stackrel{df}{=} \frac{A_k L}{2}$$

$$-\hat{i} \hat{o} \hat{i} \hat{i} \hat{\phi} \hat{a} \hat{i} \hat{e} \hat{a} \quad \tilde{n} \hat{e} \hat{a} \hat{i} \hat{e} / \hat{\phi} \hat{o} \hat{i},$$

$$\hat{a} \hat{e} \hat{n} \hat{a} \hat{d} \hat{n} \hat{e} \hat{y} \hat{e} \quad " \hat{a} \hat{i} \hat{i} \hat{e} \hat{e} \hat{o} \hat{o} \hat{i} \hat{a} " \quad \hat{e} \hat{a} \hat{a} \hat{d} \hat{a} \hat{o} \hat{o} \hat{i} \hat{u} \hat{o} \quad \hat{e} \hat{i} \hat{i} \hat{i} \hat{a} \hat{i} \hat{o}.$$

## П.2.11 Алгоритм дискриминатора частоты

Найдем компонент вектора (2.28), соответствующий параметру  $\omega_{1,k}$ :

$$\frac{\partial X_{\psi}^2(\lambda_k)}{\partial \omega_{1,k}} = 2 \sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k} \frac{\partial \sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k}}{\partial \omega_{1,k}} + 2 \sum_{m=1}^M Q_{\psi,m,k} \frac{\partial \sum_{m=1}^M Q_{\psi,m,k}}{\partial \omega_{1,k}} \quad (2.161)$$

По отдельности рассчитаем производные корреляционных сумм с учетом  $\psi_{1,k} = 0$ :

$$\frac{\partial \sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k}}{\partial \omega_{1,k}} = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_{c,m,k,l} \frac{\partial}{\partial \omega_{1,k}} \cos(\Phi_{\psi,m,k,l}(\lambda_k)), \quad (2.162)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega_{1,k}} \cos(\Phi_{\psi,m,k,l}(\lambda_k)) &= \frac{\partial}{\partial \omega_{1,k}} \cos(\omega_{if} t_{k,l} + (\omega_{1,k} + \psi'_{m,k})(l-1)T_d + \psi_{m,k}) = \\ &= -\sin(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k) + \psi_{m,k})(l-1)T_d = \\ &= -\cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) \cdot \sin(\psi_{m,k})(l-1)T_d - \sin(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) \cos(\psi_{m,k})(l-1)T_d. \end{aligned} \quad (2.163)$$

где  $\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)$  определено в (2.96). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k}(\lambda)}{\partial \omega_{1,k}} &= -\sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) \sum_{l=1}^L l T_d y_{m,k,l} G_{c,m,k,l} \sin(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) - \\ &\quad - \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) \sum_{l=1}^L l T_d y_{m,k,l} G_{c,m,k,l} \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) = \\ &= \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) I'_{m,k}(\lambda) - \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) Q'_{m,k}(\lambda), \end{aligned} \quad (2.164)$$

где

$$\begin{aligned} I'_{m,k}(\lambda) &= -\sum_{l=1}^L l T_d y_{m,k,l} G_c(t_{k,l} - \tau_{m,k}) \sin(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)); \\ Q'_{m,k}(\lambda) &= \sum_{l=1}^L l T_d y_{m,k,l} G_c(t_{k,l} - \tau_{m,k}) \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)). \end{aligned} \quad (2.165)$$

Аналогично с производной суммы квадратурных компонент

$$\frac{\partial \sum_{m=1}^M Q_{\psi,m,k}}{\partial \omega_{1,k}} = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L y_m(t_{k,l}) G_{c,m,k,l} \frac{\partial}{\partial \omega_{1,k}} \sin(\Phi_{\psi,m,k,l}(\lambda_k)), \quad (2.166)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega_{1,k}} \sin(\Phi_{\psi,m,k,l}(\lambda_k)) &= \frac{\partial}{\partial \omega_{1,k}} \sin(\omega_{if} t_{k,l} + (\omega_{1,k} + \psi'_{m,k})(l-1)T_d + \psi_{m,k}) = \\ &= \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k) + \psi_{m,k})(l-1)T_d = \\ &= \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) \cdot \cos(\psi_{m,k})(l-1)T_d - \sin(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) \sin(\psi_{m,k})(l-1)T_d. \end{aligned} \quad (2.167)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sum_{m=1}^M Q_{\psi,m,k}(\lambda)}{\partial \omega_{1,k}} &= \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) \sum_{l=1}^L IT_d y_{m,k,l} G_{c,m,k,l} \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) - \\
&- \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) \sum_{l=1}^L IT_d y_{m,k,l} G_{c,m,k,l} \sin(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) = \\
&= \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) Q'_{m,k}(\lambda) + \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) I'_{m,k}(\lambda).
\end{aligned} \tag{2.168}$$

Произведение в первом слагаемом (2.161) с учетом (2.164) принимает вид

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k} \frac{\partial \sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k}}{\partial \omega_{1,k}} &= \left( \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) I_{m,k} - \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) Q_{m,k} \right) \times \\
&\times \left( \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) I'_{m,k} - \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) Q'_{m,k} \right) = \\
&= \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\psi_{a,k}) I_{a,k} \cos(\psi_{b,k}) I'_{b,k} - \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\psi_{a,k}) I_{a,k} \sin(\psi_{b,k}) Q'_{b,k} - \\
&- \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\psi_{a,k}) Q_{a,k} \cos(\psi_{b,k}) I'_{b,k} + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\psi_{a,k}) Q_{a,k} \sin(\psi_{b,k}) Q'_{b,k}.
\end{aligned} \tag{2.169}$$

Аналогично со вторым слагаемым:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^M Q_{\psi,m,k} \frac{\partial \sum_{m=1}^M Q_{\psi,m,k}}{\partial \omega_{1,k}} &= \left( \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) I_{m,k} + \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) Q_{m,k} \right) \times \\
&\times \left( \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) Q'_{m,k} + \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) I'_{m,k} \right) = \\
&= \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\psi_{a,k}) I_{a,k} \cos(\psi_{b,k}) Q'_{b,k} + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\psi_{a,k}) I_{a,k} \sin(\psi_{b,k}) I'_{b,k} + \\
&+ \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\psi_{a,k}) Q_{a,k} \cos(\psi_{b,k}) Q'_{b,k} + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\psi_{a,k}) Q_{a,k} \sin(\psi_{b,k}) I'_{b,k}.
\end{aligned} \tag{2.171}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{u_{\omega_1}(\tilde{\omega}_{1,k})}{2\Upsilon} &= \\
&= \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{a,k}) I_{a,k}(\tilde{\lambda}_k) \cos(\tilde{\psi}_{b,k}) I'_{b,k}(\tilde{\lambda}_k) - \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{a,k}) I_{a,k}(\tilde{\lambda}_k) \sin(\tilde{\psi}_{b,k}) Q'_{b,k}(\tilde{\lambda}_k) - \\
&- \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\tilde{\psi}_{a,k}) Q_{a,k}(\tilde{\lambda}_k) \cos(\tilde{\psi}_{b,k}) I'_{b,k}(\tilde{\lambda}_k) + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\tilde{\psi}_{a,k}) Q_{a,k}(\tilde{\lambda}_k) \sin(\tilde{\psi}_{b,k}) Q'_{b,k}(\tilde{\lambda}_k) + \\
&+ \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\tilde{\psi}_{a,k}) I_{a,k}(\tilde{\lambda}_k) \cos(\tilde{\psi}_{b,k}) Q'_{b,k}(\tilde{\lambda}_k) + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\tilde{\psi}_{a,k}) I_{a,k}(\tilde{\lambda}_k) \sin(\tilde{\psi}_{b,k}) I'_{b,k}(\tilde{\lambda}_k) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{a,k}) Q_{a,k}(\tilde{\lambda}_k) \cos(\tilde{\psi}_{b,k}) Q'_{b,k}(\tilde{\lambda}_k) + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{a,k}) Q_{a,k}(\tilde{\lambda}_k) \sin(\tilde{\psi}_{b,k}) I'_{b,k}(\tilde{\lambda}_k) = \\
& = \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{a,k} - \tilde{\psi}_{b,k}) (I_{a,k} I'_{b,k} + Q_{a,k} Q_{b,k}) \\
& + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\tilde{\psi}_{a,k}) \cos(\tilde{\psi}_{b,k}) (I_{a,k} Q'_{b,k} + I'_{a,k} Q_{b,k} - Q'_{a,k} I_{b,k} - Q_{a,k} I'_{b,k}).
\end{aligned} \tag{2.172}$$

Выражения под суммами можно представить в виде элементов матрицы  $M \times M$ , оставляем элементы выше главной диагонали

$$\begin{aligned}
u_{\omega_1}(\tilde{\omega}_{1,k}) & = \\
& = 2\Upsilon \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{a,b}\right) \cos(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) (I_{a,k} I'_{b,k} + Q_{a,k} Q'_{b,k} + I_{b,k} I'_{a,k} + Q_{b,k} Q'_{a,k}) + \\
& + 2\Upsilon \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{a,b}\right) \sin(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) (Q'_{a,k} I_{b,k} + Q_{a,k} I'_{b,k} - I_{a,k} Q'_{b,k} - I'_{a,k} Q_{b,k}),
\end{aligned} \tag{2.173}$$

где  $\delta_{i,i} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  - символ Кронекера.

Альтернативная форма записи выражения (2.173) является более удобной для реализации совместно с ДРФ:

$$\begin{aligned}
u_{\omega_1}(\tilde{\omega}_{1,k}) & = \\
& = 2\Upsilon \sum_{m=1}^M \left\{ \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) [I'_{m,k} I_{c,k} + Q'_{m,k} Q_{c,k}] + \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) [I'_{m,k} Q_{c,k} - Q'_{m,k} I_{c,k}] \right\},
\end{aligned} \tag{2.174}$$

где  $I_{c,k}, Q_{c,k}$  определяются выражением (2.109).

Выражение (2.174) преобразуется к более компактному виду, если по аналогии с совместными квадратурами  $I_{c,k}, Q_{c,k}$  ввести совместные квадратуры  $I'_{c,k}, Q'_{c,k}$ :

$$\begin{aligned}
u_{\omega_1}(\tilde{\omega}_{1,k}) & = 2\Upsilon \left\{ I_{c,k} \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) I'_{m,k} - \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) Q'_{m,k} + \right. \\
& \left. + Q_{c,k} \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) Q'_{m,k} + \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) I'_{m,k} = I_{c,k} I'_{c,k} + Q_{c,k} Q'_{c,k}, \right.
\end{aligned} \tag{2.175}$$

где

$$\begin{aligned}
I'_{c,k}(\tilde{\lambda}_k) &= \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) I'_{m,k} - \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) Q'_{m,k}, \\
Q'_{c,k}(\tilde{\lambda}_k) &= \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) Q'_{m,k} + \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) I'_{m,k}.
\end{aligned}
\tag{2.176}$$

Если используется аппроксимация суммой взвешенных квадратур

$$\begin{aligned}
I'_{c,k}{}^{appr}(\tilde{\lambda}_k) &= -T_1 \sum_{n_1=1}^{N_1} n_1 Q_{c,n_1,k}, \\
Q'_{c,k}{}^{appr}(\tilde{\lambda}_k) &= T_1 \sum_{n_1=1}^{N_1} n_1 I_{c,n_1,k}. \\
Q_{c,n_1,k} &= \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) Q_{m,n_1,k} + \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) I_{m,n_1,k} \\
I_{c,n_1,k} &= \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) I_{m,n_1,k} - \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) Q_{m,n_1,k}
\end{aligned}$$

## П.2.12 Расчет дискриминационной характеристики ДЧ и её крутизны

На первом этапе найдем статистические характеристики величин (2.165).

$$\begin{aligned}
I'_{m,k}(\tilde{\lambda}) &= -\sum_{l=1}^L l T_d A_k \cdot G_{\tilde{a}\tilde{e}}(t_{k,l} - \tau_{m,k}) \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k) + \phi_k) \times \\
&\times G_{\tilde{a}\tilde{e}}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k}) \sin(\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)) - T_d \sum_{l=1}^L n_{m,k,l} l G_{\tilde{a}\tilde{e}}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k}) \sin(\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k));
\end{aligned}
\tag{2.177}$$

где  $\phi_k$  определяется выражением

$$\phi_{m,k} \stackrel{df}{=} \psi_{m,k} + \pi \theta_{nd,k} + \varphi_{1,k}
\tag{2.178}$$

Для вычисления дисперсии требуется выражение для частичной суммы последовательности  $l^2$  (A000290 в OEIS [52]). Найдем его:

$$\begin{aligned}
L^3 &= \sum_{l=1}^L (l^3 - (l-1)^3) = \sum_{l=1}^L (3l^2 - 3l + 1) \rightarrow \\
\sum_{l=1}^L l^2 &= \frac{1}{3} \left( L^3 + 3 \sum_{l=1}^L l - L \right) = \frac{1}{3} \left( L^3 + 3 \frac{L(L+1)}{2} - L \right) = \frac{L(2L+1)(L+1)}{6}.
\end{aligned}
\tag{2.179}$$

Дисперсии выражения (2.177)

$$\sigma_{I'Q'}^2 = \sigma_n^2 \cdot T_d^2 \frac{L(2L+1)(L+1)}{12} \stackrel{L \gg 1}{\approx} \sigma_n^2 \cdot T_d^2 \frac{L^3}{6} = \sigma_{IQ}^2 \frac{T^2}{3}. \quad (2.180)$$

Математическое ожидание выражения (2.177)

$$\begin{aligned} \bar{I}'_{m,k}(\tilde{\lambda}) &= -E \left[ \sum_{l=1}^L l T_d A_k \cdot G_{\tilde{a}\tilde{e}}(t_{k,l} - \tau_{m,k}) \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k) + \phi_k) \times \right. \\ &\times G_{\tilde{a}\tilde{e}}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k}) \sin(\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)) \left. \right] \stackrel{L \gg 1}{\approx} \\ &\approx \frac{1}{2} T_d A_k \rho(\delta\tau_{m,k}) \sum_{l=1}^L l \cdot \sin(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k) - \Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k) + \phi_k). \end{aligned} \quad (2.181)$$

Для области аргументов функции (2.181), характерной для работы приемников СРНС, относительно хорошо подходит аппроксимация частичной суммы ряда

$$\bar{I}'_{m,k}(\tilde{\lambda}) = \frac{A_{IQ,k} \rho(\delta\tau_{m,k})}{\beta_{m,k}} \left[ \cos(\phi_{m,k} + \alpha_{m,k}) \text{sinc}(\alpha_{m,k}) - \cos(\phi_{m,k} + \beta_{m,k} T) \right], \quad (2.182)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{m,k} &\stackrel{df}{=} \frac{\beta_{m,k} T}{2}, \\ \beta_{m,k} &\stackrel{df}{=} \delta\psi'_{m,k} + \delta\omega_{1,k}. \end{aligned} \quad (2.183)$$

Аналогично для  $Q'_{m,k}(\tilde{\lambda})$  дисперсия определяется выражением (2.180), а математическое ожидание

$$\bar{Q}'_{m,k}(\tilde{\lambda}) = -\frac{A_{IQ,k} \rho(\delta\tau_{m,k})}{\beta_{m,k}} \left[ \sin(\phi_{m,k} + \alpha_{m,k}) \text{sinc}(\alpha_{m,k}) - \sin(\phi_{m,k} + \beta_{m,k} T) \right]. \quad (2.184)$$

Тогда величины  $I'_{m,k}$ ,  $Q'_{m,k}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} I'_{m,k}(\tilde{\lambda}_k) &= \bar{I}'_{m,k}(\tilde{\lambda}_k) + n_{I',m,k}; \\ Q'_{m,k}(\tilde{\lambda}_k) &= \bar{Q}'_{m,k}(\tilde{\lambda}_k) + n_{Q',m,k}. \end{aligned} \quad (2.185)$$

Математическое ожидание произведения случайных составляющих

$$\begin{aligned}
E[n_{I',m,k}n_{Q',m,k}] &= E\left[\frac{1}{2}T_d^2\sum_{a=1}^L\sum_{b=1}^Ln_{m,k,a}n_{m,k,b}abG_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,a}-\tilde{\tau}_{m,k})G_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,b}-\tilde{\tau}_{m,k})\times\right. \\
&\times\left.\left\{\sin\left(\Phi_{m,k,a}(\tilde{\lambda}_k)+\Phi_{m,k,b}(\tilde{\lambda}_k)\right)+\sin\left(\Phi_{m,k,a}(\tilde{\lambda}_k)-\Phi_{m,k,b}(\tilde{\lambda}_k)\right)\right\}\right]= \\
&= E\left[\frac{1}{2}T_d^2\sum_{l=1}^Ln_{m,k,l}^2l^2\sin\left(2\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)\right)\right]=\frac{\sigma_{n,k}^2}{2}T_d^2\sum_{l=1}^Ll^2\sin\left(2\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)\right)=\begin{cases} \approx 0 \\ \ll \sigma_{I'Q'}^2 \end{cases}.
\end{aligned} \tag{2.186}$$

Математическое ожидание нормированного дискриминационного отсчета

$$\begin{aligned}
&E\left[\frac{u_{\ddot{a},\omega_{\ddot{a}}}(\omega_{\ddot{a},k}-\tilde{\omega}_{\ddot{a},k})}{2\tilde{Y}}\right]= \\
&= E\left[\sum_{a=1}^M\sum_{b=1}^M\cos(\tilde{\psi}_{a,k}-\tilde{\psi}_{b,k})\times\right. \\
&\times\left.(\bar{I}_{a,k}\bar{I}'_{b,k}+\bar{I}_{a,k}n_{I',b,k}+\bar{I}'_{b,k}n_{I,a,k}+n_{I,a,k}n_{I',b,k}+\bar{Q}_{a,k}\bar{Q}'_{b,k}+\bar{Q}_{a,k}n_{Q',b,k}+\bar{Q}'_{b,k}n_{Q,a,k}+n_{Q,a,k}n_{Q',b,k})+\right. \\
&+\sum_{a=1}^M\sum_{b=1}^M\sin(\tilde{\psi}_{a,k})\cos(\tilde{\psi}_{b,k})\times \\
&\times\left.(\bar{I}_{a,k}\bar{Q}'_{b,k}+\bar{I}_{a,k}n_{Q',b,k}+\bar{Q}'_{b,k}n_{I,a,k}+n_{I,a,k}n_{Q',b,k}+\bar{Q}_{b,k}\bar{I}'_{a,k}+\bar{Q}_{b,k}n_{I',a,k}+\bar{I}'_{a,k}n_{Q,b,k}+n_{Q,b,k}n_{I',a,k}-\right. \\
&\left. -\bar{I}_{b,k}\bar{Q}'_{a,k}-\bar{I}_{b,k}n_{Q',a,k}-\bar{Q}'_{a,k}n_{I,b,k}-n_{I,b,k}n_{Q',a,k}-\bar{Q}_{a,k}\bar{I}'_{b,k}-\bar{Q}_{a,k}n_{I',b,k}-\bar{I}'_{b,k}n_{Q,a,k}-n_{Q,a,k}n_{I',b,k})\right].
\end{aligned} \tag{2.187}$$

Найдем математические ожидания величин

$$\begin{aligned}
E[n_{I,m,k}n_{Q',m,k}] &= E\left[T_d\sum_{a=1}^L\sum_{b=1}^Ln_{m,k,a}n_{m,k,b}aG_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,a}-\tilde{\tau}_{m,k})G_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,b}-\tilde{\tau}_{m,k})\times\right. \\
&\cos\left(\Phi_{m,k,a}(\tilde{\lambda}_k)\right)\cos\left(\Phi_{m,k,b}(\tilde{\lambda}_k)\right)\left.]=\right. \\
&= E\left[T_d\sum_{l=1}^Ln_{m,k,l}^2l\times\cos^2\left(\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)\right)\right]=\sigma_{n,k}^2\frac{T_d}{4}L(L-1)\stackrel{L\gg 1}{\approx}\sigma_{n,k}^2\frac{T_d}{4}L^2;
\end{aligned} \tag{2.188}$$

$$\begin{aligned}
E[n_{Q,m,k}n_{I',m,k}] &= -E\left[T_d\sum_{a=1}^L\sum_{b=1}^Ln_{m,k,a}n_{m,k,b}aG_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,a}-\tilde{\tau}_{m,k})G_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,b}-\tilde{\tau}_{m,k})\times\right. \\
&\sin\left(\Phi_{m,k,a}(\tilde{\lambda}_k)\right)\sin\left(\Phi_{m,k,b}(\tilde{\lambda}_k)\right)\left.]\stackrel{L\gg 1}{\approx}-\sigma_{n,k}^2\frac{T_d}{4}L^2;
\end{aligned} \tag{2.189}$$

$$\begin{aligned}
E[n_{I,m,k}n_{I',m,k}] &= -E\left[T_d\sum_{a=1}^L\sum_{b=1}^Ln_{m,k,a}n_{m,k,b}aG_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,a}-\tilde{\tau}_{m,k})G_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,b}-\tilde{\tau}_{m,k})\times\right. \\
&\sin\left(\Phi_{m,k,a}(\tilde{\lambda}_k)\right)\cos\left(\Phi_{m,k,b}(\tilde{\lambda}_k)\right)\left.]=\begin{cases} \approx 0 \\ \ll \sigma_{I'Q'}^2 \ll \sigma_{IQ}^2 \end{cases};
\end{aligned} \tag{2.190}$$

$$E[n_{Q,m,k}n_{Q',m,k}] = -E\left[T_d \sum_{a=1}^L \sum_{b=1}^L n_{m,k,a}n_{m,k,b} aG_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,a} - \tilde{\tau}_{m,k})G_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,b} - \tilde{\tau}_{m,k}) \times \right. \\ \left. \cos(\Phi_{m,k,a}(\tilde{\lambda}_k))\sin(\Phi_{m,k,b}(\tilde{\lambda}_k))\right] = \begin{cases} \approx 0 \\ \ll \sigma_{I'Q'}^2 \ll \sigma_{IQ}^2 \end{cases}. \quad (2.191)$$

Преобразуем

$$E\left[\frac{u_{\omega}(\omega_{1,k} - \bar{\omega}_{1,k})}{2Y}\right] = \\ = E\left[\sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{a,k} - \tilde{\psi}_{b,k}) \times (\bar{I}_{a,k}\bar{I}'_{b,k} + \bar{Q}_{a,k}\bar{Q}'_{b,k}) + \right. \\ \left. + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\tilde{\psi}_{a,k})\cos(\tilde{\psi}_{b,k}) \times \right. \\ \left. \times (\bar{I}_{a,k}\bar{Q}'_{b,k} + n_{I,a,k}n_{Q',b,k} + \bar{Q}_{b,k}\bar{I}'_{a,k} + n_{Q,b,k}n_{I',a,k} - \bar{I}_{b,k}\bar{Q}'_{a,k} - n_{I,b,k}n_{Q',a,k} - \bar{Q}_{a,k}\bar{I}'_{b,k} - n_{Q,a,k}n_{I',b,k})\right] = \\ = \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{a,k} - \tilde{\psi}_{b,k}) (\bar{I}_{a,k}\bar{I}'_{b,k} + \bar{Q}_{a,k}\bar{Q}'_{b,k}) + \\ + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\tilde{\psi}_{a,k})\cos(\tilde{\psi}_{b,k}) (\bar{I}_{a,k}\bar{Q}'_{b,k} + \bar{Q}_{b,k}\bar{I}'_{a,k} - \bar{I}_{b,k}\bar{Q}'_{a,k} - \bar{Q}_{a,k}\bar{I}'_{b,k}). \quad (2.192)$$

Найдем произведение математических ожиданий компонент:

$$\bar{I}_{a,k}\bar{I}'_{b,k} = A_{IQ,k}\rho(\delta\tau_{a,k})\text{sinc}(\alpha_{a,k})\cos(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k}) \times \\ \times \frac{A_{IQ,k}\rho(\delta\tau_{b,k})}{\beta_{b,k}} \left[ \cos(\phi_{b,k} + \alpha_{b,k})\text{sinc}(\alpha_{b,k}) - \cos(\phi_{b,k} + \beta_{b,k}T) \right] = \\ = \frac{A_{IQ,k}^2\rho(\delta\tau_{a,k})\rho(\delta\tau_{b,k})}{\beta_{b,k}} \left[ \text{sinc}(\alpha_{a,k})\text{sinc}(\alpha_{b,k})\cos(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k})\cos(\phi_{b,k} + \alpha_{b,k}) - \right. \\ \left. - \text{sinc}(\alpha_{a,k})\cos(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k})\cos(\phi_{b,k} + \beta_{b,k}T) \right]; \quad (2.193)$$

$$\bar{Q}_{a,k}\bar{Q}'_{b,k} = \\ = \frac{A_{IQ,k}^2\rho(\delta\tau_{a,k})\rho(\delta\tau_{b,k})}{\beta_{b,k}} \left[ \text{sinc}(\alpha_{a,k})\text{sinc}(\alpha_{b,k})\sin(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k})\sin(\phi_{b,k} + \alpha_{b,k}) - \right. \\ \left. - \text{sinc}(\alpha_{a,k})\sin(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k})\sin(\phi_{b,k} + \beta_{b,k}T) \right]; \quad (2.194)$$

$$\bar{I}_{a,k}\bar{Q}'_{b,k} = \\ = -\frac{A_{IQ,k}^2\rho(\delta\tau_{a,k})\rho(\delta\tau_{b,k})}{\beta_{b,k}} \left[ \text{sinc}(\alpha_{a,k})\text{sinc}(\alpha_{b,k})\cos(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k})\sin(\phi_{b,k} + \alpha_{b,k}) - \right. \\ \left. - \text{sinc}(\alpha_{a,k})\cos(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k})\sin(\phi_{b,k} + \beta_{b,k}T) \right]; \quad (2.195)$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{b,k} &= \\
&= -\frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k})}{\beta_{b,k}} \left[ \text{sinc}(\alpha_{a,k}) \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \sin(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k}) \cos(\phi_{b,k} + \alpha_{b,k}) - \right. \\
&\quad \left. - \text{sinc}(\alpha_{a,k}) \sin(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k}) \cos(\phi_{b,k} + \beta_{b,k} T) \right]. \quad (2.196)
\end{aligned}$$

С учетом (2.193), (2.194), (2.195), (2.196) выражение (2.192) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
E \left[ \frac{u_{\bar{a},\omega_i}(\omega_{\bar{a},k} - \tilde{\omega}_{\bar{a},k})}{2\tilde{Y}} \right] &= \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \text{sinc}(\alpha_{a,k})}{\beta_{b,k}} \cos(\tilde{\psi}_{a,k} - \tilde{\psi}_{b,k}) \times \\
&\times \left[ \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \cos(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k}) \cos(\phi_{b,k} + \alpha_{b,k}) - \cos(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k}) \cos(\phi_{b,k} + \beta_{b,k} T) + \right. \\
&\quad \left. + \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \sin(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k}) \sin(\phi_{b,k} + \alpha_{b,k}) - \sin(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k}) \sin(\phi_{b,k} + \beta_{b,k} T) \right] + \\
&\quad + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\tilde{\psi}_{a,k}) \cos(\tilde{\psi}_{b,k}) \times \\
&\quad \times \left\{ \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \text{sinc}(\alpha_{a,k})}{\beta_{b,k}} \times \right. \\
&\quad \left[ \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \sin(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k}) \cos(\phi_{b,k} + \alpha_{b,k}) - \sin(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k}) \cos(\phi_{b,k} + \beta_{b,k} T) - \right. \\
&\quad \left. - \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \cos(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k}) \sin(\phi_{b,k} + \alpha_{b,k}) + \cos(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k}) \sin(\phi_{b,k} + \beta_{b,k} T) \right] + \\
&\quad \left. + \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \text{sinc}(\alpha_{b,k})}{\beta_{a,k}} \times \right. \\
&\quad \times \left[ \text{sinc}(\alpha_{a,k}) \cos(\phi_{b,k} + \alpha_{b,k}) \sin(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k}) - \cos(\phi_{b,k} + \alpha_{b,k}) \sin(\phi_{a,k} + \beta_{a,k} T) - \right. \\
&\quad \left. - \text{sinc}(\alpha_{a,k}) \sin(\phi_{b,k} + \alpha_{b,k}) \cos(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k}) + \sin(\phi_{b,k} + \alpha_{b,k}) \cos(\phi_{a,k} + \beta_{a,k} T) \right] \left. \right\} = \\
&= \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \text{sinc}(\alpha_{a,k})}{\beta_{b,k}} \cos(\tilde{\psi}_{a,k} - \tilde{\psi}_{b,k}) \times \\
&\quad \times \left[ \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \cos(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k} - \phi_{b,k} - \alpha_{b,k}) - \cos(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k} - \phi_{b,k} - \beta_{b,k} T) \right] + \\
&\quad + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\tilde{\psi}_{a,k}) \cos(\tilde{\psi}_{b,k}) \times \\
&\quad \times \left\{ \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \text{sinc}(\alpha_{a,k})}{\beta_{b,k}} \times \right. \\
&\quad \left[ \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \sin(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k} - \phi_{b,k} - \alpha_{b,k}) - \sin(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k} - \phi_{b,k} - \beta_{b,k} T) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \text{sinc}(\alpha_{b,k})}{\beta_{a,k}} \times \\
& \left[ \text{sinc}(\alpha_{a,k}) \sin(\phi_{a,k} + \alpha_{a,k} - \phi_{b,k} - \alpha_{b,k}) - \sin(\phi_{a,k} + \beta_{a,k}T - \phi_{b,k} - \alpha_{b,k}) \right] = \\
& \begin{aligned}
& \overset{\Delta\psi=\psi_a-\psi_b \quad \Sigma\psi=\psi_a+\psi_b}{\Delta\tilde{\psi}=\tilde{\psi}_a-\tilde{\psi}_b \quad \Sigma\tilde{\psi}=\tilde{\psi}_a+\tilde{\psi}_b} = \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \text{sinc}(\alpha_{a,k})}{2\beta_{b,k}} \times \\
& \times \left[ \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \cos(\Delta\psi + \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) + \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \cos(\Delta\psi - \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) - \right. \\
& - \cos(\Delta\psi + \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \beta_{b,k}T) - \cos(\Delta\psi - \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \beta_{b,k}T) + \\
& + \frac{1}{2} \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \cos(\Delta\psi - \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) - \frac{1}{2} \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \cos(\Delta\psi + \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) - \\
& - \frac{1}{2} \cos(\Delta\psi - \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \beta_{b,k}T) + \frac{1}{2} \cos(\Delta\psi + \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \beta_{b,k}T) + \\
& + \frac{1}{2} \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \cos(\Delta\psi - \Sigma\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) - \frac{1}{2} \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \cos(\Delta\psi + \Sigma\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) - \\
& \left. - \frac{1}{2} \cos(\Delta\psi - \Sigma\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \beta_{b,k}T) + \frac{1}{2} \cos(\Delta\psi + \Sigma\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \beta_{b,k}T) \right] + \\
& + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \text{sinc}(\alpha_{b,k})}{2\beta_{a,k}} \times \\
& \times \left[ \frac{1}{2} \text{sinc}(\alpha_{a,k}) \cos(\Delta\psi - \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) - \frac{1}{2} \text{sinc}(\alpha_{a,k}) \cos(\Delta\psi + \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \text{sinc}(\alpha_{a,k}) \cos(\Delta\psi - \Sigma\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) - \frac{1}{2} \text{sinc}(\alpha_{a,k}) \cos(\Delta\psi + \Sigma\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) - \\
& - \frac{1}{2} \cos(\Delta\psi - \Delta\tilde{\psi} + \beta_{a,k}T - \alpha_{b,k}) + \frac{1}{2} \cos(\Delta\psi + \Delta\tilde{\psi} + \beta_{a,k}T - \alpha_{b,k}) - \\
& \left. \left[ -\frac{1}{2} \cos(\Delta\psi - \Sigma\tilde{\psi} + \beta_{a,k}T - \alpha_{b,k}) + \frac{1}{2} \cos(\Delta\psi + \Sigma\tilde{\psi} + \beta_{a,k}T - \alpha_{b,k}) \right] = \right. \\
& = \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_{a,b} \right) \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \text{sinc}(\alpha_{a,k})}{2\beta_{b,k}} \times \\
& \times \left[ \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \cos(\Delta\psi - \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) - \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \cos(\Delta\psi + \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) - \right. \\
& - \cos(\Delta\psi - \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \beta_{b,k}T) + \cos(\Delta\psi + \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \beta_{b,k}T) + \\
& + \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \cos(\Delta\psi + \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) + \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \cos(\Delta\psi - \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) - \\
& - \cos(\Delta\psi + \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \beta_{b,k}T) - \cos(\Delta\psi - \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \beta_{b,k}T) \left. \right] + \\
& + \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_{a,b} \right) \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \text{sinc}(\alpha_{b,k})}{2\beta_{a,k}} \times
\end{aligned}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \operatorname{sinc}(\alpha_{a,k}) \cos(\Delta\psi - \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) - \operatorname{sinc}(\alpha_{a,k}) \cos(\Delta\psi + \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) - \right. \\
& - \cos(\Delta\psi - \Delta\tilde{\psi} + \beta_{a,k}T - \alpha_{b,k}) + \cos(\Delta\psi + \Delta\tilde{\psi} + \beta_{a,k}T - \alpha_{b,k}) + \\
& + \operatorname{sinc}(\alpha_{a,k}) \cos(\Delta\psi + \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) + \operatorname{sinc}(\alpha_{a,k}) \cos(\Delta\psi - \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) - \\
& \left. - \cos(\Delta\psi + \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \beta_{b,k}T) - \cos(\Delta\psi - \Delta\tilde{\psi} + \alpha_{a,k} - \beta_{b,k}T) \right] = \\
& = \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_{a,b} \right) A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \times \\
& \left\{ \frac{\operatorname{sinc}(\alpha_{a,k})}{\beta_{b,k}} \times \left[ \operatorname{sinc}(\alpha_{b,k}) \cos(\delta\psi_{a,k} - \delta\psi_{b,k} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) - \cos(\delta\psi_{a,k} - \delta\psi_{b,k} + \alpha_{a,k} - \beta_{b,k}T) \right] + \right. \\
& + \frac{\operatorname{sinc}(\alpha_{b,k})}{\beta_{a,k}} \times \\
& \left. \times \left[ \operatorname{sinc}(\alpha_{a,k}) \cos(\delta\psi_{a,k} - \delta\psi_{b,k} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) - \cos(\delta\psi_{a,k} - \delta\psi_{b,k} + \beta_{a,k}T - \alpha_{b,k}) \right] \right\}, \tag{2.197}
\end{aligned}$$

где  $\delta_{i,i} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  - символ Кронекера.

Пользуясь определениями (2.183) преобразуем (2.197) к виду:

$$\begin{aligned}
E \left[ \frac{u_{\tilde{a}, \omega_{\tilde{a}}}(\omega_{\tilde{a},k} - \tilde{\omega}_{\tilde{a},k})}{2\tilde{Y}} \right] &= \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_{a,b} \right) A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \times \\
& \left\{ \frac{\operatorname{sinc}(\alpha_{a,k})}{\beta_{b,k}} \times \left[ \operatorname{sinc}(\alpha_{b,k}) \cos(\gamma_{ab}) - \cos(\alpha_{b,k} - \gamma_{ab}) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\operatorname{sinc}(\alpha_{b,k})}{\beta_{a,k}} \times \left[ \operatorname{sinc}(\alpha_{a,k}) \cos(\gamma_{ab}) - \cos(\alpha_{a,k} + \gamma_{ab}) \right] \right\}, \tag{2.198}
\end{aligned}$$

где

$$\gamma_{ab} \stackrel{df}{=} \delta\psi_{a,k} - \delta\psi_{b,k} + \frac{(\delta\psi'_{a,k} - \delta\psi'_{b,k})T}{2} \tag{2.199}$$

Для упрощения формулы рассмотрим срез  $\forall a, b \in \{1..M\}: \delta\psi'_a = \delta\psi'_b$ ;  
 $\delta\psi_{a,k} = \delta\psi_{b,k}$ ;  $\delta\tau_{a,k} = \delta\tau_{b,k}$  (в частности равны нулю)  $\rightarrow \alpha_{a,k} = \alpha_{b,k} = \alpha_k$ ;  $\beta_{a,k} = \beta_{b,k} = \beta_k$ :

$$\begin{aligned}
& E \left[ u_{\tilde{\omega}_i, \omega_i} (\omega_{\tilde{a}, k} - \tilde{\omega}_{\tilde{a}, k}) \right] \Big|_{\delta\omega_{\psi, a} = \delta\omega_{\psi, b}; \delta\varepsilon_{\psi, a} = \delta\varepsilon_{\psi, b}; \delta\tau_a = \delta\tau_b} = \\
& = 2\tilde{\Upsilon} \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_{a,b} \right) A_{IQ,k}^2 T \rho^2 (\delta\tau_k) \frac{\text{sinc}(\alpha_k)}{\alpha_k} \left[ \text{sinc}(\alpha_k) - \cos(\alpha_k) \right], \quad (2.200) \\
& \alpha_k = \frac{(\delta\psi'_k + \delta\omega_{1,k}) T}{2}
\end{aligned}$$

Найдем крутизну дискриминационной характеристики в точке истинных значений

$$\begin{aligned}
& \lim_{\alpha_k \rightarrow 0} \frac{d}{d\alpha_k} \frac{\text{sinc}(\alpha_k) - \cos(\alpha_k)}{\alpha_k} = \frac{1}{3} \rightarrow \\
& S_{\omega_i} = 2\tilde{\Upsilon} \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} M + \frac{M(M-1)}{2} \right) A_{IQ,k}^2 T^2 \rho^2 (\delta\tau_k) = 2\tilde{\Upsilon} \frac{1}{12} A_{IQ,k}^2 T^2 M^2. \quad (2.201)
\end{aligned}$$

Выражение (2.200) описывает дискриминационную характеристику синтезированного дискриминатора, а зависимость (2.201) - её крутизну.

Крутизна дискриминационной характеристики упрощенного дискриминатора (2.64) основной Книги диссертации

$$S_{\omega_i, \text{main}} = 2\tilde{\Upsilon} \frac{1}{12} A_{IQ,k}^2 T^2 M, \quad (2.202)$$

а сама дискриминационная характеристика

$$\begin{aligned}
& E \left[ u_{\alpha_i, \text{main}} (\tilde{\omega}_{\tilde{a}, k}) \right] = \\
& = 2\tilde{\Upsilon} \sum_{m=1}^M \frac{A_{IQ,k}^2 T \rho^2 (\delta\tau_{m,k})}{2} \frac{\text{sinc}(\alpha_{m,k})}{\alpha_{m,k}} \left[ \text{sinc}(\alpha_{m,k}) - \cos(\alpha_{m,k}) \right], \quad (2.203) \\
& \alpha_{m,k} = \frac{(\delta\omega_{\psi, m,k} + \delta\omega_{\tilde{a}, k}) T}{2}
\end{aligned}$$

## П.2.13 Расчет флуктуационной характеристики ДЧ

Определим полную выходную флуктуационную характеристику синтезированного дискриминатора поступательного доплеровского смещения частоты, а затем приведем её на вход в точке истинного значения.

$$\begin{aligned}
& E \left[ \frac{u_{\omega_1}(\omega_{1,k} - \tilde{\omega}_{1,k})}{2\Upsilon} - E \left[ \frac{u_{\omega_1}(\omega_{1,k} - \tilde{\omega}_{1,k})}{2\Upsilon} \right] \right]^2 = E \left[ \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_{a,b} \right) \times \right. \\
& \left\{ \cos(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \times \left[ \bar{I}_{a,k} \bar{I}'_{b,k} + \bar{I}_{a,k} n_{I',b,k} + \bar{I}'_{b,k} n_{I,a,k} + n_{I,a,k} n_{I',b,k} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}'_{b,k} + \bar{Q}_{a,k} n_{Q',b,k} + \bar{Q}'_{b,k} n_{Q,a,k} + n_{Q,a,k} n_{Q',b,k} + \bar{I}_{b,k} \bar{I}'_{a,k} + \bar{I}_{b,k} n_{I',a,k} + \bar{I}'_{a,k} n_{I,b,k} + n_{I,b,k} n_{I',a,k} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}'_{a,k} + \bar{Q}_{b,k} n_{Q',a,k} + \bar{Q}'_{a,k} n_{Q,b,k} + n_{Q,b,k} n_{Q',a,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{I}'_{b,k} - \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}'_{b,k} - \bar{I}_{b,k} \bar{I}'_{a,k} - \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}'_{a,k} \right] + \right. \\
& \left. + \sin(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \times \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{a,k} + \bar{I}_{b,k} n_{Q',a,k} + \bar{Q}'_{a,k} n_{I,b,k} + n_{I,b,k} n_{Q',a,k} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{b,k} + \bar{Q}_{a,k} n_{I',b,k} + \bar{I}'_{b,k} n_{Q,a,k} + n_{Q,a,k} n_{I',b,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{b,k} - \bar{I}_{a,k} n_{Q',b,k} - \bar{Q}'_{b,k} n_{I,a,k} - n_{I,a,k} n_{Q',b,k} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{a,k} - \bar{Q}_{b,k} n_{I',a,k} - \bar{I}'_{a,k} n_{Q,b,k} - n_{Q,b,k} n_{I',a,k} - \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{a,k} - E \left[ n_{I,b,k} n_{Q',a,k} \right] - \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{b,k} - \right. \right. \\
& \left. \left. - E \left[ n_{Q,a,k} n_{I',b,k} \right] + \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{b,k} + E \left[ n_{I,a,k} n_{Q',b,k} \right] + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{a,k} + E \left[ n_{Q,b,k} n_{I',a,k} \right] \right] \right]^2 = \\
& = E \left[ \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_{a,b} \right) \times \right. \\
& \left\{ \cos(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \times \left[ \bar{I}_{a,k} n_{I',b,k} + \bar{I}'_{b,k} n_{I,a,k} + n_{I,a,k} n_{I',b,k} + \bar{Q}_{a,k} n_{Q',b,k} + \bar{Q}'_{b,k} n_{Q,a,k} + n_{Q,a,k} n_{Q',b,k} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \bar{I}_{b,k} n_{I',a,k} + \bar{I}'_{a,k} n_{I,b,k} + n_{I,b,k} n_{I',a,k} + \bar{Q}_{b,k} n_{Q',a,k} + \bar{Q}'_{a,k} n_{Q,b,k} + n_{Q,b,k} n_{Q',a,k} \right] + \right. \\
& \left. + \sin(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \times \left[ \bar{I}_{b,k} n_{Q',a,k} + \bar{Q}'_{a,k} n_{I,b,k} + \left\{ n_{I,b,k} n_{Q',a,k} - E \left[ n_{I,b,k} n_{Q',a,k} \right] \right\} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \bar{Q}_{a,k} n_{I',b,k} + \bar{I}'_{b,k} n_{Q,a,k} + \left\{ n_{Q,a,k} n_{I',b,k} - E \left[ n_{Q,a,k} n_{I',b,k} \right] \right\} - \bar{I}_{a,k} n_{Q',b,k} - \bar{Q}'_{b,k} n_{I,a,k} - \right. \right. \\
& \left. \left. \left\{ n_{I,a,k} n_{Q',b,k} - E \left[ n_{I,a,k} n_{Q',b,k} \right] \right\} - \bar{Q}_{b,k} n_{I',a,k} - \bar{I}'_{a,k} n_{Q,b,k} - \left\{ n_{Q,b,k} n_{I',a,k} - E \left[ n_{Q,b,k} n_{I',a,k} \right] \right\} \right] \right]^2 = \\
& = E \left[ \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \kappa_{a,b} \times \left\{ \cos(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \times J_{1,ab} + \sin(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \times J_{2,ab} \right\} \right]^2, \quad (2.204)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
J_{1,ab} & \stackrel{df}{=} \bar{I}_{a,k} n_{I',b,k} + \bar{I}'_{b,k} n_{I,a,k} + n_{I,a,k} n_{I',b,k} + \bar{Q}_{a,k} n_{Q',b,k} + \bar{Q}'_{b,k} n_{Q,a,k} + n_{Q,a,k} n_{Q',b,k} + \\
& + \bar{I}_{b,k} n_{I',a,k} + \bar{I}'_{a,k} n_{I,b,k} + n_{I,b,k} n_{I',a,k} + \bar{Q}_{b,k} n_{Q',a,k} + \bar{Q}'_{a,k} n_{Q,b,k} + n_{Q,b,k} n_{Q',a,k}; \\
J_{2,ab} & \stackrel{df}{=} \bar{I}_{b,k} n_{Q',a,k} + \bar{Q}'_{a,k} n_{I,b,k} + \left\{ n_{I,b,k} n_{Q',a,k} - E \left[ n_{I,b,k} n_{Q',a,k} \right] \right\} + \\
& + \bar{Q}_{a,k} n_{I',b,k} + \bar{I}'_{b,k} n_{Q,a,k} + \left\{ n_{Q,a,k} n_{I',b,k} - E \left[ n_{Q,a,k} n_{I',b,k} \right] \right\} - \bar{I}_{a,k} n_{Q',b,k} - \bar{Q}'_{b,k} n_{I,a,k} - \\
& \left\{ n_{I,a,k} n_{Q',b,k} - E \left[ n_{I,a,k} n_{Q',b,k} \right] \right\} - \bar{Q}_{b,k} n_{I',a,k} - \bar{I}'_{a,k} n_{Q,b,k} - \left\{ n_{Q,b,k} n_{I',a,k} - E \left[ n_{Q,b,k} n_{I',a,k} \right] \right\}; \\
\kappa_{a,b} & \stackrel{df}{=} \kappa_{b,a} = \begin{cases} 0.5, & a = b \\ 1, & a \neq b \end{cases}.
\end{aligned} \quad (2.205)$$

Преобразуем выражение

$$\begin{aligned}
& E \left[ \frac{u_{\omega_1}(\omega_{1,k} - \tilde{\omega}_{1,k})}{2\Upsilon} - E \left[ \frac{u_{\omega_1}(\omega_{1,k} - \tilde{\omega}_{1,k})}{2\Upsilon} \right] \right]^2 = \\
& = E \left[ \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \sum_{c=1}^M \sum_{d=c}^M \kappa_{a,b} \kappa_{c,d} \times \right. \\
& \quad \times \left\{ \cos(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \times J_{1,ab} + \sin(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \times J_{2,ab} \right\} \times \\
& \quad \times \left\{ \cos(\tilde{\psi}_{d,k} - \tilde{\psi}_{c,k}) \times J_{1,cd} + \sin(\tilde{\psi}_{d,k} - \tilde{\psi}_{c,k}) \times J_{2,cd} \right\} \Big] = \\
& = E \left[ \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \sum_{c=1}^M \sum_{d=c}^M \kappa_{a,b} \kappa_{c,d} \times \right. \\
& \quad \left\{ \cos(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) J_{1,ab} \times \cos(\tilde{\psi}_{d,k} - \tilde{\psi}_{c,k}) J_{1,cd} + \right. \\
& \quad \quad + \sin(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) J_{2,ab} \times \cos(\tilde{\psi}_{d,k} - \tilde{\psi}_{c,k}) J_{1,cd} + \\
& \quad \quad + \cos(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) J_{1,ab} \times \sin(\tilde{\psi}_{d,k} - \tilde{\psi}_{c,k}) J_{2,cd} + \\
& \quad \quad \left. \left. + \sin(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) J_{2,ab} \times \sin(\tilde{\psi}_{d,k} - \tilde{\psi}_{c,k}) J_{2,cd} \right\} \right]. \tag{2.206}
\end{aligned}$$

Найдем математическое ожидание произведения случайных величин  $J_{1,ij}$ ,

$J_{2,ij}$

$$\begin{aligned}
E[J_{1,ab} J_{1,cd}] & = E \left[ \left( \bar{I}_{a,k} n_{I',b,k} + \bar{I}'_{b,k} n_{I,a,k} + n_{I,a,k} n_{I',b,k} + \bar{Q}_{a,k} n_{Q',b,k} + \bar{Q}'_{b,k} n_{Q,a,k} + n_{Q,a,k} n_{Q',b,k} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \bar{I}_{b,k} n_{I',a,k} + \bar{I}'_{a,k} n_{I,b,k} + n_{I,b,k} n_{I',a,k} + \bar{Q}_{b,k} n_{Q',a,k} + \bar{Q}'_{a,k} n_{Q,b,k} + n_{Q,b,k} n_{Q',a,k} \right) \times \right. \\
& \quad \times \left( \bar{I}_{c,k} n_{I',d,k} + \bar{I}'_{d,k} n_{I,c,k} + n_{I,c,k} n_{I',d,k} + \bar{Q}_{c,k} n_{Q',d,k} + \bar{Q}'_{d,k} n_{Q,c,k} + n_{Q,c,k} n_{Q',d,k} + \right. \\
& \quad \left. \left. + \bar{I}_{d,k} n_{I',c,k} + \bar{I}'_{c,k} n_{I,d,k} + n_{I,d,k} n_{I',c,k} + \bar{Q}_{d,k} n_{Q',c,k} + \bar{Q}'_{c,k} n_{Q,d,k} + n_{Q,d,k} n_{Q',c,k} \right) \right] = \\
& = E \left[ \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{c,k} n_{I',b,k} n_{I',d,k} + \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} n_{Q,c,k} n_{I',b,k} + \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{d,k} n_{I',b,k} n_{I',c,k} + \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} n_{Q,d,k} n_{I',b,k} + \right. \\
& \quad \left. + \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{d,k} n_{I,a,k} n_{I,c,k} + \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}_{c,k} n_{I,a,k} n_{Q',d,k} + \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{c,k} n_{I,a,k} n_{I,d,k} + \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}_{d,k} n_{I,a,k} n_{Q',c,k} + \right. \\
& \quad \left. + n_{I,a,k} n_{I,c,k} n_{I',b,k} n_{I',d,k} + n_{I,a,k} n_{Q',d,k} n_{I',b,k} n_{Q,c,k} + n_{I,a,k} n_{I,d,k} n_{I',b,k} n_{I',c,k} + n_{I,a,k} n_{Q',c,k} n_{I',b,k} n_{Q,d,k} + \right. \\
& \quad \left. + \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{d,k} n_{I,c,k} n_{Q',b,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{c,k} n_{Q',b,k} n_{Q',d,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{c,k} n_{I,d,k} n_{Q',b,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{d,k} n_{Q',b,k} n_{Q',c,k} + \right. \\
& \quad \left. + \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{c,k} n_{Q,a,k} n_{I',d,k} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} n_{Q,a,k} n_{Q,c,k} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{d,k} n_{Q,a,k} n_{I',c,k} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} n_{Q,a,k} n_{Q,d,k} + \right. \\
& \quad \left. + n_{Q,a,k} n_{I',d,k} n_{Q',b,k} n_{I,c,k} + n_{Q,a,k} n_{Q',d,k} n_{Q',b,k} n_{Q,c,k} + n_{Q,a,k} n_{I',c,k} n_{Q',b,k} n_{I,d,k} + n_{Q,a,k} n_{Q',c,k} n_{Q',b,k} n_{Q,d,k} + \right. \\
& \quad \left. + \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{c,k} n_{I',a,k} n_{I',d,k} + \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} n_{Q,c,k} n_{I',a,k} + \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{d,k} n_{I',a,k} n_{I',c,k} + \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} n_{I',a,k} n_{Q,d,k} + \right. \\
& \quad \left. + \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{d,k} n_{I,b,k} n_{I,c,k} + \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}_{c,k} n_{I,b,k} n_{Q',d,k} + \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{c,k} n_{I,b,k} n_{I,d,k} + \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}_{d,k} n_{I,b,k} n_{Q',c,k} + \right. \\
& \quad \left. + n_{I,b,k} n_{I,c,k} n_{I',a,k} n_{I',d,k} + n_{I,b,k} n_{Q',d,k} n_{I',a,k} n_{Q,c,k} + n_{I,b,k} n_{I,d,k} n_{I',a,k} n_{I',c,k} + n_{I,b,k} n_{Q',c,k} n_{I',a,k} n_{Q,d,k} + \right. \\
& \quad \left. + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{d,k} n_{I,c,k} n_{Q',a,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{c,k} n_{Q',a,k} n_{Q',d,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{c,k} n_{I,d,k} n_{Q',a,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{d,k} n_{Q',a,k} n_{Q',c,k} + \right. \\
& \quad \left. + \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{c,k} n_{Q,b,k} n_{I',d,k} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} n_{Q,b,k} n_{Q,c,k} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{d,k} n_{Q,b,k} n_{I',c,k} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} n_{Q,b,k} n_{Q,d,k} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +n_{Q,b,k}n_{I',d,k}n_{Q',a,k}n_{I,c,k} + n_{Q,b,k}n_{Q',d,k}n_{Q',a,k}n_{Q,c,k} \\
& + n_{Q,b,k}n_{I',c,k}n_{Q',a,k}n_{I,d,k} + n_{Q,b,k}n_{Q',c,k}n_{Q',a,k}n_{Q,d,k} \Big]. \tag{2.207}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E \left[ J_{1,ab} J_{1,cd} \right] = & \\
= (b=d) & \left( \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{c,k} \sigma_{I'Q'}^2 + \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} E_{QI'} + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{c,k} \sigma_{I'Q'}^2 + \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{c,k} E_{IQ'} + \right. \\
& + \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}_{c,k} E_{IQ'} + \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{c,k} \sigma_{IQ}^2 + \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{c,k} E_{QI'} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} \sigma_{IQ}^2 \Big) + \\
+ (b=c) & \left( \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} E_{QI'} + \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{d,k} \sigma_{I'Q'}^2 + \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{d,k} E_{IQ'} + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{d,k} \sigma_{I'Q'}^2 + \right. \\
& + \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{d,k} \sigma_{IQ}^2 + \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}_{d,k} E_{IQ'} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \sigma_{IQ}^2 + \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{d,k} E_{QI'} \Big) + \\
+ (a=c) & \left( \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{d,k} \sigma_{IQ}^2 + \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}_{d,k} E_{IQ'} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} \sigma_{IQ}^2 + \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{d,k} E_{QI'} + \right. \\
& + \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} E_{QI'} + \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{d,k} \sigma_{I'Q'}^2 + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{d,k} E_{IQ'} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{d,k} \sigma_{I'Q'}^2 \Big) + \\
+ (a=d) & \left( \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}_{c,k} E_{IQ'} + \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{c,k} \sigma_{IQ}^2 + \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{c,k} E_{QI'} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} \sigma_{IQ}^2 + \right. \\
& + \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{c,k} \sigma_{I'Q'}^2 + \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} E_{QI'} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{c,k} \sigma_{I'Q'}^2 + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{c,k} E_{IQ'} \Big) + \\
+ (a=c)(b=d) & \left( \sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 + E_{IQ} E_{QI'} + \sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 + E_{IQ} E_{QI'} + \right. \\
& + E_{IQ} E_{QI'} + \sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 + E_{IQ} E_{QI'} + \sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 \Big) + \\
+ (a=d)(b=c) & \left( E_{IQ} E_{QI'} + \sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 + E_{IQ} E_{QI'} + \sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 + \right. \\
& \left. \sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 + E_{IQ} E_{QI'} + \sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 + E_{IQ} E_{QI'} \right) = \\
\stackrel{E_{QI'} = -E_{IQ}}{=} & (b=d) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{c,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{c,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} + \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{c,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ} \cdot \left[ \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{c,k} + \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}_{c,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{c,k} \right] \Big) + \\
+ (b=c) & \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{d,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{d,k} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ} \cdot \left[ \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{d,k} + \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}_{d,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} - \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{d,k} \right] \Big) + \\
+ (a=c) & \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{d,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{d,k} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ} \cdot \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}_{d,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{d,k} - \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] \Big) + \\
+ (a=d) & \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{c,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{c,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{c,k} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ} \cdot \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}_{c,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{c,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{c,k} - \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} \right] \Big) + \\
+ (a=c)(b=d) & \left( 4\sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 - 4E_{IQ}^2 \right) + (a=d)(b=c) \left( 4\sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 - 4E_{IQ}^2 \right), \tag{2.208}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
E_{IQ'} &\stackrel{df}{=} E \left[ n_{I,m,k} n_{Q',m,k} \right] = \sigma_{n,k}^2 \frac{T_d}{4} L^2 = \sigma_{IQ,k}^2 \frac{T}{2}; \\
E_{QI'} &\stackrel{df}{=} E \left[ n_{Q,m,k} n_{I',m,k} \right] = -\sigma_{n,k}^2 \frac{T_d}{4} L^2 = -\sigma_{IQ,k}^2 \frac{T}{2}.
\end{aligned}
\tag{2.209}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
E \left[ J_{2,ab} J_{2,cd} \right] &= E \left[ \left( \bar{I}_{b,k} n_{Q',a,k} + \bar{Q}'_{a,k} n_{I,b,k} + n_{I,b,k} n_{Q',a,k} - E_{IQ'} + \right. \right. \\
&+ \bar{Q}_{a,k} n_{I',b,k} + \bar{I}'_{b,k} n_{Q,a,k} + n_{Q,a,k} n_{I',b,k} - E_{QI'} - \bar{I}_{a,k} n_{Q',b,k} - \bar{Q}'_{b,k} n_{I,a,k} - \\
&- n_{I,a,k} n_{Q',b,k} + E_{IQ'} - \bar{Q}_{b,k} n_{I',a,k} - \bar{I}'_{a,k} n_{Q,b,k} - n_{Q,b,k} n_{I',a,k} + E_{QI'} \left. \right) \times \\
&\times \left( \bar{I}_{d,k} n_{Q',c,k} + \bar{Q}'_{c,k} n_{I,d,k} + n_{I,d,k} n_{Q',c,k} - E_{IQ'} + \right. \\
&+ \bar{Q}_{c,k} n_{I',d,k} + \bar{I}'_{d,k} n_{Q,c,k} + n_{Q,c,k} n_{I',d,k} - E_{QI'} - \bar{I}_{c,k} n_{Q',d,k} - \bar{Q}'_{d,k} n_{I,c,k} - \\
&- n_{I,c,k} n_{Q',d,k} + E_{IQ'} - \bar{Q}_{d,k} n_{I',c,k} - \bar{I}'_{c,k} n_{Q,d,k} - n_{Q,d,k} n_{I',c,k} + E_{QI'} \left. \right) ] = \\
&= E \left[ \left( \bar{I}_{b,k} n_{Q',a,k} + \bar{Q}'_{a,k} n_{I,b,k} + n_{I,b,k} n_{Q',a,k} + \bar{Q}_{a,k} n_{I',b,k} + \right. \right. \\
&+ \bar{I}'_{b,k} n_{Q,a,k} + n_{Q,a,k} n_{I',b,k} - \bar{I}_{a,k} n_{Q',b,k} - \bar{Q}'_{b,k} n_{I,a,k} - \\
&- n_{I,a,k} n_{Q',b,k} - \bar{Q}_{b,k} n_{I',a,k} - \bar{I}'_{a,k} n_{Q,b,k} - n_{Q,b,k} n_{I',a,k} \left. \right) \times \\
&\times \left( \bar{I}_{d,k} n_{Q',c,k} + \bar{Q}'_{c,k} n_{I,d,k} + n_{I,d,k} n_{Q',c,k} + \bar{Q}_{c,k} n_{I',d,k} + \right. \\
&+ \bar{I}'_{d,k} n_{Q,c,k} + n_{Q,c,k} n_{I',d,k} - \bar{I}_{c,k} n_{Q',d,k} - \bar{Q}'_{d,k} n_{I,c,k} - \\
&- n_{I,c,k} n_{Q',d,k} - \bar{Q}_{d,k} n_{I',c,k} - \bar{I}'_{c,k} n_{Q,d,k} - n_{Q,d,k} n_{I',c,k} \left. \right) ] = \\
&= E \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{d,k} n_{Q',a,k} n_{Q',c,k} + \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} n_{Q',a,k} n_{I,d,k} - \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{c,k} n_{Q',a,k} n_{Q',d,k} - \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} n_{Q',a,k} n_{I,c,k} + \right. \\
&+ \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{d,k} n_{I,b,k} n_{Q',c,k} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} n_{I,b,k} n_{I,d,k} - \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{c,k} n_{I,b,k} n_{Q',d,k} - \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} n_{I,b,k} n_{I,c,k} + \\
&+ n_{I,b,k} n_{I,d,k} n_{Q',a,k} n_{Q',c,k} - n_{I,b,k} n_{I,c,k} n_{Q',a,k} n_{Q',d,k} + n_{Q',a,k} n_{I,b,k} n_{Q,c,k} n_{I',d,k} - n_{Q',a,k} n_{I,b,k} n_{Q,d,k} n_{I',c,k} + \\
&+ \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{c,k} n_{I',b,k} n_{I',d,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{d,k} n_{I',b,k} n_{Q,c,k} - \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{d,k} n_{I',b,k} n_{I',c,k} - \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{c,k} n_{I',b,k} n_{Q,d,k} + \\
&+ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}_{c,k} n_{Q,a,k} n_{I',d,k} + \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{d,k} n_{Q,a,k} n_{Q,c,k} - \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}_{d,k} n_{Q,a,k} n_{I',c,k} - \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{c,k} n_{Q,a,k} n_{Q,d,k} + \\
&+ n_{Q,a,k} n_{I',b,k} n_{Q',c,k} n_{I,d,k} + n_{Q,a,k} n_{I',b,k} n_{Q,c,k} n_{I',d,k} - n_{Q,a,k} n_{I',b,k} n_{I,c,k} n_{Q',d,k} - n_{Q,a,k} n_{I',b,k} n_{I',c,k} n_{Q,d,k} - \\
&- \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{d,k} n_{Q',b,k} n_{Q',c,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} n_{Q',b,k} n_{I,d,k} + \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{c,k} n_{Q',b,k} n_{Q',d,k} + \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} n_{Q',b,k} n_{I,c,k} - \\
&- \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{d,k} n_{I,a,k} n_{Q',c,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} n_{I,a,k} n_{I,d,k} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{c,k} n_{I,a,k} n_{Q',d,k} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} n_{I,a,k} n_{I,c,k} - \\
&- n_{I,a,k} n_{Q',b,k} n_{Q',c,k} n_{I,d,k} - n_{I,a,k} n_{Q',b,k} n_{Q,c,k} n_{I',d,k} + n_{I,a,k} n_{Q',b,k} n_{I,c,k} n_{Q',d,k} + n_{I,a,k} n_{Q',b,k} n_{I',c,k} n_{Q,d,k} - \\
&- \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{c,k} n_{I',a,k} n_{I',d,k} - \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{d,k} n_{I',a,k} n_{Q,c,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{d,k} n_{I',a,k} n_{I',c,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{c,k} n_{I',a,k} n_{Q,d,k} - \\
&- \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}_{c,k} n_{Q,b,k} n_{I',d,k} - \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{d,k} n_{Q,b,k} n_{Q,c,k} + \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}_{d,k} n_{Q,b,k} n_{I',c,k} + \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{c,k} n_{Q,b,k} n_{Q,d,k} - \\
&- n_{I',a,k} n_{Q,b,k} n_{Q',c,k} n_{I,d,k} - n_{I',a,k} n_{Q,b,k} n_{Q,c,k} n_{I',d,k} + n_{I',a,k} n_{Q,b,k} n_{I,c,k} n_{Q',d,k} + n_{I',a,k} n_{Q,b,k} n_{I',c,k} n_{Q,d,k} \left. \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (b=d) \left( \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} \sigma_{IQ}^2 - \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{c,k} E_{IQ'} + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{c,k} \sigma_{I'Q'}^2 - \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{c,k} E_{QI'} + \right. \\
&\quad \left. - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} E_{IQ'} + \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{c,k} \sigma_{I'Q'}^2 - \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}_{c,k} E_{QI'} + \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{c,k} \sigma_{IQ}^2 \right) + \\
&\quad + (b=c) \left( \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{d,k} E_{IQ'} - \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \sigma_{IQ}^2 + \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{d,k} E_{QI'} - \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{d,k} \sigma_{I'Q'}^2 - \right. \\
&\quad \left. - \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{d,k} \sigma_{I'Q'}^2 + \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} E_{IQ'} - \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{d,k} \sigma_{IQ}^2 + \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}_{d,k} E_{QI'} \right) + \\
&\quad + (a=c) \left( \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{d,k} \sigma_{I'Q'}^2 - \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} E_{IQ'} + \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{d,k} \sigma_{IQ}^2 - \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}_{d,k} E_{QI'} - \right. \\
&\quad \left. - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{d,k} E_{IQ'} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} \sigma_{IQ}^2 - \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{d,k} E_{QI'} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{d,k} \sigma_{I'Q'}^2 \right) + \\
&\quad + (a=d) \left( \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} E_{IQ'} - \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{c,k} \sigma_{I'Q'}^2 + \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}_{c,k} E_{QI'} - \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{c,k} \sigma_{IQ}^2 - \right. \\
&\quad \left. - \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} \sigma_{IQ}^2 + \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{c,k} E_{IQ'} - \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{c,k} \sigma_{I'Q'}^2 + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{c,k} E_{QI'} \right) + \\
&\quad + (a=c)(b=d) \left( \sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 - E_{IQ'}^2 + \sigma_{I'Q'}^2 \sigma_{IQ}^2 - E_{QI'}^2 - E_{IQ'}^2 + \sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 - E_{QI'}^2 + \sigma_{I'Q'}^2 \sigma_{IQ}^2 \right) + \\
&\quad + (a=d)(b=c) \left( E_{IQ'}^2 - \sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 + E_{QI'}^2 - \sigma_{I'Q'}^2 \sigma_{IQ}^2 - \sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 + E_{IQ'}^2 - \sigma_{I'Q'}^2 \sigma_{IQ}^2 + E_{QI'}^2 \right) + \\
&\quad + (a=b)(c=d) \left( E_{IQ'}^2 - E_{IQ'}^2 + E_{IQ'} E_{QI'} - E_{IQ'} E_{QI'} + E_{IQ'} E_{QI'} + E_{QI'}^2 - E_{IQ'} E_{QI'} - E_{QI'}^2 - \right. \\
&\quad \left. - E_{IQ'}^2 - E_{IQ'} E_{QI'} + E_{IQ'}^2 + E_{IQ'} E_{QI'} - E_{IQ'} E_{QI'} - E_{QI'}^2 + E_{IQ'} E_{QI'} + E_{QI'}^2 \right) + \\
&\quad + (a=b=c=d) \left( E \left[ n_{I,b,k} n_{I,d,k} n_{Q',a,k} n_{Q',c,k} \right] - E \left[ n_{I,b,k} n_{I,d,k} n_{Q',a,k} n_{Q',c,k} \right] + 0 - 0 + \right. \\
&\quad + 0 + E \left[ n_{Q,a,k} n_{I',b,k} n_{Q,c,k} n_{I',d,k} \right] - 0 - \left[ n_{Q,a,k} n_{I',b,k} n_{I',c,k} n_{Q,d,k} \right] - \\
&\quad - E \left[ n_{I,a,k} n_{Q',b,k} n_{Q',c,k} n_{I,d,k} \right] - 0 + E \left[ n_{I,a,k} n_{Q',b,k} n_{I,c,k} n_{Q',d,k} \right] + 0 - \\
&\quad - 0 - E \left[ n_{I',a,k} n_{Q,b,k} n_{Q,c,k} n_{I',d,k} \right] + 0 + E \left[ n_{I',a,k} n_{Q,b,k} n_{I',c,k} n_{Q,d,k} \right] - \\
&\quad \left( \sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 - E_{IQ'}^2 + \sigma_{I'Q'}^2 \sigma_{IQ}^2 - E_{QI'}^2 - E_{IQ'}^2 + \sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 - E_{QI'}^2 + \sigma_{I'Q'}^2 \sigma_{IQ}^2 \right) - \\
&\quad \left( E_{IQ'}^2 - \sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 + E_{QI'}^2 - \sigma_{I'Q'}^2 \sigma_{IQ}^2 - \sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 + E_{IQ'}^2 - \sigma_{I'Q'}^2 \sigma_{IQ}^2 + E_{QI'}^2 \right) = \\
&= (b=d) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{c,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{c,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{c,k} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} \right] + \right. \\
&\quad \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}_{c,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{c,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{c,k} \right] \right) - \\
&\quad - (b=c) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{d,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{d,k} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \right. \\
&\quad \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}_{d,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} - \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{d,k} \right] \right) + \\
&\quad + (a=c) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{d,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{d,k} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \right. \\
&\quad \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}_{d,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{d,k} \right] \right) - \\
&\quad - (a=d) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{c,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{c,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{c,k} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} \right] + \right. \\
&\quad \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}_{c,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{c,k} - \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{c,k} \right] \right) + \\
&\quad + (a=c)(b=d) \left( 4\sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 - 4E_{IQ'}^2 \right) - (a=d)(b=c) \left( 4\sigma_{I'Q'}^2 \sigma_{IQ}^2 - 4E_{I'Q'}^2 \right). \tag{2.210}
\end{aligned}$$

Аналогично кросс-произведение

$$\begin{aligned}
E[J_{1,ab}J_{2,cd}] &= E\left[\left(\bar{I}_{a,k}n_{I',b,k} + \bar{I}'_{b,k}n_{I,a,k} + n_{I,a,k}n_{I',b,k} + \bar{Q}_{a,k}n_{Q',b,k} + \bar{Q}'_{b,k}n_{Q,a,k} + n_{Q,a,k}n_{Q',b,k} + \right. \right. \\
&+ \bar{I}_{b,k}n_{I',a,k} + \bar{I}'_{a,k}n_{I,b,k} + n_{I,b,k}n_{I',a,k} + \bar{Q}_{b,k}n_{Q',a,k} + \bar{Q}'_{a,k}n_{Q,b,k} + n_{Q,b,k}n_{Q',a,k}) \times \\
&\times \left(\bar{I}_{d,k}n_{Q',c,k} + \bar{Q}'_{c,k}n_{I,d,k} + n_{I,d,k}n_{Q',c,k} + \bar{Q}_{c,k}n_{I',d,k} + \bar{I}'_{d,k}n_{Q,c,k} + n_{Q,c,k}n_{I',d,k} - \right. \\
&\left. - \bar{I}_{c,k}n_{Q',d,k} - \bar{Q}'_{d,k}n_{I,c,k} - n_{I,c,k}n_{Q',d,k} - \bar{Q}_{d,k}n_{I',c,k} - \bar{I}'_{c,k}n_{Q,d,k} - n_{Q,d,k}n_{I',c,k}\right) \Big] = \\
&= E\left[\bar{I}_{a,k}\bar{Q}_{c,k}n_{I',b,k}n_{I',d,k} + \bar{I}_{a,k}\bar{I}'_{d,k}n_{I',b,k}n_{Q,c,k} - \bar{I}_{a,k}\bar{Q}_{d,k}n_{I',b,k}n_{I',c,k} - \bar{I}_{a,k}\bar{I}'_{c,k}n_{I',b,k}n_{Q,d,k} + \right. \\
&+ \bar{I}'_{b,k}\bar{I}_{d,k}n_{I,a,k}n_{Q',c,k} + \bar{I}'_{b,k}\bar{Q}'_{c,k}n_{I,a,k}n_{I,d,k} - \bar{I}'_{b,k}\bar{I}_{c,k}n_{I,a,k}n_{Q',d,k} - \bar{I}'_{b,k}\bar{Q}'_{d,k}n_{I,a,k}n_{I,c,k} + \\
&+ \bar{Q}_{a,k}\bar{I}_{d,k}n_{Q',b,k}n_{Q',c,k} + \bar{Q}_{a,k}\bar{Q}'_{c,k}n_{Q',b,k}n_{I,d,k} - \bar{Q}_{a,k}\bar{I}_{c,k}n_{Q',b,k}n_{Q',d,k} + \bar{Q}_{a,k}\bar{Q}'_{d,k}n_{Q',b,k}n_{I,c,k} + \\
&+ \bar{Q}'_{b,k}\bar{Q}_{c,k}n_{Q,a,k}n_{I',d,k} + \bar{Q}'_{b,k}\bar{I}'_{d,k}n_{Q,a,k}n_{Q,c,k} - \bar{Q}'_{b,k}\bar{Q}_{d,k}n_{Q,a,k}n_{I',c,k} - \bar{Q}'_{b,k}\bar{I}'_{c,k}n_{Q,a,k}n_{Q,d,k} + \\
&+ \bar{I}_{b,k}\bar{Q}_{c,k}n_{I',a,k}n_{I',d,k} + \bar{I}_{b,k}\bar{I}'_{d,k}n_{I',a,k}n_{Q,c,k} - \bar{I}_{b,k}\bar{Q}_{d,k}n_{I',a,k}n_{I',c,k} - \bar{I}_{b,k}\bar{I}'_{c,k}n_{I',a,k}n_{Q,d,k} + \\
&+ \bar{I}'_{a,k}\bar{I}_{d,k}n_{I,b,k}n_{Q',c,k} + \bar{I}'_{a,k}\bar{Q}'_{c,k}n_{I,b,k}n_{I,d,k} - \bar{I}'_{a,k}\bar{I}_{c,k}n_{I,b,k}n_{Q',d,k} - \bar{I}'_{a,k}\bar{Q}'_{d,k}n_{I,b,k}n_{I,c,k} + \\
&+ \bar{Q}_{b,k}\bar{I}_{d,k}n_{Q',a,k}n_{Q',c,k} + \bar{Q}_{b,k}\bar{Q}'_{c,k}n_{Q',a,k}n_{I,d,k} - \bar{Q}_{b,k}\bar{I}_{c,k}n_{Q',a,k}n_{Q',d,k} - \bar{Q}_{b,k}\bar{Q}'_{d,k}n_{Q',a,k}n_{I,c,k} + \\
&+ \bar{Q}'_{a,k}\bar{Q}_{c,k}n_{Q,b,k}n_{I',d,k} + \bar{Q}'_{a,k}\bar{I}'_{d,k}n_{Q,b,k}n_{Q,c,k} - \bar{Q}'_{a,k}\bar{Q}_{d,k}n_{Q,b,k}n_{I',c,k} - \bar{Q}'_{a,k}\bar{I}'_{c,k}n_{Q,b,k}n_{Q,d,k} + \\
&+ n_{I,a,k}n_{I',b,k}n_{Q',c,k}n_{I,d,k} + n_{I,a,k}n_{I',b,k}n_{Q,c,k}n_{I',d,k} - n_{I,a,k}n_{I',b,k}n_{I,c,k}n_{Q',d,k} - n_{I,a,k}n_{I',b,k}n_{I',c,k}n_{Q,d,k} + \\
&+ n_{Q,a,k}n_{Q',b,k}n_{Q',c,k}n_{I,d,k} + n_{Q,a,k}n_{Q',b,k}n_{Q,c,k}n_{I',d,k} - n_{Q,a,k}n_{Q',b,k}n_{I,c,k}n_{Q',d,k} - n_{Q,a,k}n_{Q',b,k}n_{I',c,k}n_{Q,d,k} + \\
&+ n_{I',a,k}n_{I,b,k}n_{Q',c,k}n_{I,d,k} + n_{I',a,k}n_{I,b,k}n_{Q,c,k}n_{I',d,k} - n_{I',a,k}n_{I,b,k}n_{I,c,k}n_{Q',d,k} - n_{I',a,k}n_{I,b,k}n_{I',c,k}n_{Q,d,k} + \\
&+ n_{Q',a,k}n_{Q,b,k}n_{Q',c,k}n_{I,d,k} + n_{Q',a,k}n_{Q,b,k}n_{Q,c,k}n_{I',d,k} - n_{Q',a,k}n_{Q,b,k}n_{I,c,k}n_{Q',d,k} - n_{Q',a,k}n_{Q,b,k}n_{I',c,k}n_{Q,d,k} \Big] = \\
&= (a=c)\left(\bar{I}'_{b,k}\bar{I}_{d,k}E_{IQ'} - \bar{I}'_{b,k}\bar{Q}'_{d,k}\sigma_{IQ'}^2 + \bar{Q}'_{b,k}\bar{I}_{d,k}\sigma_{IQ'}^2 - \bar{Q}'_{b,k}\bar{Q}_{d,k}E_{QI'}^2 + \right. \\
&+ \bar{I}_{b,k}\bar{I}_{d,k}E_{QI'}^2 - \bar{I}_{b,k}\bar{Q}_{d,k}\sigma_{I'Q'}^2 + \bar{Q}_{b,k}\bar{I}_{d,k}\sigma_{I'Q'}^2 - \bar{Q}_{b,k}\bar{Q}'_{d,k}E_{IQ'}\Big) + \\
&+ (a=d)\left(\bar{I}'_{b,k}\bar{Q}'_{c,k}\sigma_{IQ'}^2 - \bar{I}'_{b,k}\bar{I}_{c,k}E_{IQ'} + \bar{Q}'_{b,k}\bar{Q}_{c,k}E_{QI'} - \bar{Q}'_{b,k}\bar{I}'_{c,k}\sigma_{IQ'}^2 + \right. \\
&+ \bar{I}_{b,k}\bar{Q}_{c,k}\sigma_{I'Q'}^2 - \bar{I}_{b,k}\bar{I}'_{c,k}E_{QI'} + \bar{Q}_{b,k}\bar{Q}'_{c,k}E_{IQ'} - \bar{Q}_{b,k}\bar{I}_{c,k}\sigma_{I'Q'}^2\Big) + \\
&+ (b=c)\left(\bar{I}_{a,k}\bar{I}'_{d,k}E_{QI'}^2 - \bar{I}_{a,k}\bar{Q}_{d,k}\sigma_{I'Q'}^2 + \bar{Q}_{a,k}\bar{I}_{d,k}\sigma_{I'Q'}^2 - \bar{Q}_{a,k}\bar{Q}'_{d,k}E_{IQ'} + \right. \\
&+ \bar{I}'_{a,k}\bar{I}_{d,k}E_{IQ'} - \bar{I}'_{a,k}\bar{Q}'_{d,k}\sigma_{IQ'}^2 + \bar{Q}'_{a,k}\bar{I}_{d,k}\sigma_{IQ'}^2 - \bar{Q}'_{a,k}\bar{Q}_{d,k}E_{QI'}^2\Big) + \\
&+ (b=d)\left(\bar{I}_{a,k}\bar{Q}_{c,k}\sigma_{I'Q'}^2 - \bar{I}_{a,k}\bar{I}'_{c,k}E_{QI'} + \bar{Q}_{a,k}\bar{Q}'_{c,k}E_{IQ'} - \bar{Q}_{a,k}\bar{I}_{c,k}\sigma_{I'Q'}^2 + \right. \\
&+ \bar{I}'_{a,k}\bar{Q}'_{c,k}\sigma_{IQ'}^2 - \bar{I}'_{a,k}\bar{I}_{c,k}E_{IQ'} + \bar{Q}'_{a,k}\bar{Q}_{c,k}E_{QI'} - \bar{Q}'_{a,k}\bar{I}'_{c,k}\sigma_{IQ'}^2\Big) = \\
&= (a=c)\left(\sigma_{I'Q'}^2\left[\bar{Q}_{b,k}\bar{I}_{d,k} - \bar{I}_{b,k}\bar{Q}_{d,k}\right] + \sigma_{IQ'}^2\left[\bar{Q}'_{b,k}\bar{I}'_{d,k} - \bar{I}'_{b,k}\bar{Q}'_{d,k}\right] + \right. \\
&+ E_{IQ'}\left[\bar{I}'_{b,k}\bar{I}_{d,k} + \bar{Q}'_{b,k}\bar{Q}_{d,k} - \bar{I}_{b,k}\bar{I}'_{d,k} - \bar{Q}_{b,k}\bar{Q}'_{d,k}\right]\Big) + \\
&+ (a=d)\left(\sigma_{I'Q'}^2\left[\bar{I}_{b,k}\bar{Q}_{c,k} - \bar{Q}_{b,k}\bar{I}_{c,k}\right] + \sigma_{IQ'}^2\left[\bar{I}'_{b,k}\bar{Q}'_{c,k} - \bar{Q}'_{b,k}\bar{I}'_{c,k}\right] + \right. \\
&+ E_{IQ'}\left[\bar{I}_{b,k}\bar{I}'_{c,k} + \bar{Q}_{b,k}\bar{Q}'_{c,k} - \bar{I}'_{b,k}\bar{I}_{c,k} - \bar{Q}'_{b,k}\bar{Q}_{c,k}\right]\Big) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (b=c) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{Q}_{a,k} \bar{I}_{d,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{I}_{d,k} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}_{d,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] \left. + \right. \\
& \quad + (b=d) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{a,k} \bar{Q}_{c,k} - \bar{Q}_{a,k} \bar{I}_{c,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}'_{c,k} \right] + \right. \\
& \quad \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{I}_{a,k} \bar{I}'_{c,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{I}'_{a,k} \bar{I}_{c,k} - \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}_{c,k} \right] \right). \tag{2.211}
\end{aligned}$$

Откуда сменой индексов следует

$$\begin{aligned}
E \left[ J_{1,cd} J_{2,ab} \right] & = (a=c) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{Q}_{d,k} - \bar{Q}_{b,k} \bar{I}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}'_{d,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}'_{d,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} - \bar{I}'_{b,k} \bar{I}_{d,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}_{d,k} \right] \left. + \right. \\
& + (b=c) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{Q}_{a,k} \bar{I}_{d,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{I}_{d,k} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}_{d,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] \left. + \right. \\
& + (a=d) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{Q}_{c,k} - \bar{Q}_{b,k} \bar{I}_{c,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}'_{c,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}'_{c,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{I}'_{b,k} \bar{I}_{c,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}_{c,k} \right] \left. + \right. \\
& \quad + (b=d) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{c,k} \bar{Q}_{a,k} - \bar{Q}_{c,k} \bar{I}_{a,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{c,k} \bar{Q}'_{a,k} - \bar{Q}'_{c,k} \bar{I}'_{a,k} \right] + \right. \\
& \quad \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{I}_{c,k} \bar{I}'_{a,k} + \bar{Q}_{c,k} \bar{Q}'_{a,k} - \bar{I}'_{c,k} \bar{I}_{a,k} - \bar{Q}'_{c,k} \bar{Q}_{a,k} \right] \right). \tag{2.212}
\end{aligned}$$

В полученных выражениях присутствуют однотипные множители, преобразуем для аргументов, соответствующих срезу  $\forall i, j \in \{1..M\} : \delta\psi'_i = \delta\psi'_j :$

$$\begin{aligned}
& \bar{I}'_{i,k} \bar{Q}'_{j,k} - \bar{Q}'_{i,k} \bar{I}'_{j,k} \Big|_{\delta\psi'_i = \delta\psi'_j} = - \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k})}{\beta_k^2} \times \\
& \times \left\{ \left[ \cos(\phi_{i,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) - \cos(\phi_{i,k} + \beta_k T) \right] \cdot \left[ \sin(\phi_{j,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) - \sin(\phi_{j,k} + \beta_k T) \right] - \right. \\
& \left. - \left[ \sin(\phi_{i,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) - \sin(\phi_{i,k} + \beta_k T) \right] \cdot \left[ \cos(\phi_{j,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) - \cos(\phi_{j,k} + \beta_k T) \right] \right\} = \\
& = - \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k})}{\beta_k^2} \times \\
& \left[ \cos(\phi_{i,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) \sin(\phi_{j,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) - \cos(\phi_{i,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) \sin(\phi_{j,k} + \beta_k T) - \right. \\
& - \cos(\phi_{i,k} + \beta_k T) \sin(\phi_{j,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) + \cos(\phi_{i,k} + \beta_k T) \sin(\phi_{j,k} + \beta_k T) - \\
& - \sin(\phi_{i,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) \cos(\phi_{j,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) + \sin(\phi_{i,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) \cos(\phi_{j,k} + \beta_k T) + \\
& \left. + \sin(\phi_{i,k} + \beta_k T) \cos(\phi_{j,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) - \sin(\phi_{i,k} + \beta_k T) \cos(\phi_{j,k} + \beta_k T) \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k})}{\beta_k^2} \times \left[ \text{sinc}^2(\alpha_k) \sin(\psi_{j,k} - \psi_{i,k}) + \sin(\psi_{j,k} - \psi_{i,k}) - \right. \\
&\left. - \text{sinc}(\alpha_k) \sin(\psi_{j,k} - \psi_{i,k} + \beta_k T - \alpha_k) - \text{sinc}(\alpha_k) \sin(\psi_{j,k} - \psi_{i,k} + \alpha_k - \beta_k T) \right] = \\
&= \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k})}{\beta_k^2} \times \\
&\quad \times \sin(\psi_{i,k} - \psi_{j,k}) \left[ \text{sinc}^2(\alpha_k) + 1 - 2 \text{sinc}(\alpha_k) \cos(\beta_k T - \alpha_k) \right]. \tag{2.213}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{I}_{i,k} \bar{Q}_{j,k} - \bar{Q}_{i,k} \bar{I}_{j,k} \Big|_{\delta\psi'_i = \delta\psi'_j} &= A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k}) \text{sinc}^2(\alpha_k) \times \\
&\times \left[ \sin(\phi_{i,k} + \alpha_k) \cos(\phi_{j,k} + \alpha_k) - \cos(\phi_{i,k} + \alpha_k) \sin(\phi_{j,k} + \alpha_k) \right] = \\
&= A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k}) \text{sinc}^2(\alpha_k) \sin(\psi_{i,k} - \psi_{j,k}). \tag{2.214}
\end{aligned}$$

Согласно выражениям (2.193), (2.194)

$$\begin{aligned}
\bar{I}'_{i,k} \bar{I}'_{j,k} + \bar{Q}'_{i,k} \bar{Q}'_{j,k} - \bar{I}_{i,k} \bar{I}'_{j,k} - \bar{Q}_{i,k} \bar{Q}'_{j,k} \Big|_{\delta\psi'_i = \delta\psi'_j} &= \\
&= \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k})}{\beta_k} \text{sinc}(\alpha_k) \times \\
&\times \left[ \text{sinc}(\alpha_k) \cos(\phi_{j,k} + \alpha_k) \cos(\phi_{i,k} + \alpha_k) - \text{sinc}(\alpha_k) \cos(\phi_{j,k} + \alpha_k) \cos(\phi_{i,k} + \alpha_k) + \right. \\
&+ \cos(\phi_{i,k} + \alpha_k) \cos(\phi_{j,k} + \beta_k T) - \cos(\phi_{j,k} + \alpha_k) \cos(\phi_{i,k} + \beta_k T) + \\
&+ \text{sinc}(\alpha_k) \sin(\phi_{j,k} + \alpha_k) \sin(\phi_{i,k} + \alpha_k) - \text{sinc}(\alpha_k) \sin(\phi_{j,k} + \alpha_k) \sin(\phi_{i,k} + \alpha_k) + \\
&+ \sin(\phi_{i,k} + \alpha_k) \sin(\phi_{j,k} + \beta_k T) - \sin(\phi_{j,k} + \alpha_k) \sin(\phi_{i,k} + \beta_k T) \left. \right] = \\
&= \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k})}{\beta_k} \text{sinc}(\alpha_k) \times \\
&\left[ \cos(\psi_{i,k} - \psi_{j,k} + \alpha_k - \beta_k T) - \cos(\psi_{i,k} - \psi_{j,k} + \beta_k T - \alpha_k) \right] = \\
&= \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k})}{\beta_k} \text{sinc}(\alpha_k) \times 2 \sin(\psi_{i,k} - \psi_{j,k}) \sin(\beta_k T - \alpha_k). \tag{2.215}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{I}'_{i,k} \bar{I}'_{j,k} + \bar{Q}'_{i,k} \bar{Q}'_{j,k} \Big|_{\delta\psi'_i = \delta\psi'_j} &= \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k})}{\beta_k^2} \times \\
&\times \left\{ \left[ \cos(\phi_{i,k} + \alpha_k) \text{sinc}(\alpha_k) - \cos(\phi_{i,k} + \beta_k T) \right] \cdot \left[ \cos(\phi_{j,k} + \alpha_k) \text{sinc}(\alpha_k) - \cos(\phi_{j,k} + \beta_k T) \right] + \right. \\
&\left. + \left[ \sin(\phi_{i,k} + \alpha_k) \text{sinc}(\alpha_k) - \sin(\phi_{i,k} + \beta_k T) \right] \cdot \left[ \sin(\phi_{j,k} + \alpha_k) \text{sinc}(\alpha_k) - \sin(\phi_{j,k} + \beta_k T) \right] \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k})}{\beta_k^2} \times \\
&\left[ \cos(\phi_{i,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) \cos(\phi_{j,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) - \cos(\phi_{i,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) \cos(\phi_{j,k} + \beta_k T) - \right. \\
&- \cos(\phi_{i,k} + \beta_k T) \cos(\phi_{j,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) + \cos(\phi_{i,k} + \beta_k T) \cos(\phi_{j,k} + \beta_k T) + \\
&+ \sin(\phi_{i,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) \sin(\phi_{j,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) - \sin(\phi_{i,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) \sin(\phi_{j,k} + \beta_k T) - \\
&- \sin(\phi_{i,k} + \beta_k T) \sin(\phi_{j,k} + \alpha_k) \operatorname{sinc}(\alpha_k) + \sin(\phi_{i,k} + \beta_k T) \sin(\phi_{j,k} + \beta_k T) \left. \right] = \\
&= \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k})}{\beta_k^2} \times \left[ \operatorname{sinc}^2(\alpha_k) \cos(\psi_{i,k} - \psi_{j,k}) + \cos(\psi_{i,k} - \psi_{j,k}) - \right. \\
&- \operatorname{sinc}(\alpha_k) \cos(\psi_{i,k} - \psi_{j,k} + \alpha_k - \beta_k T) - \operatorname{sinc}(\alpha_k) \cos(\psi_{i,k} - \psi_{j,k} - \alpha_k + \beta_k T) \left. \right] = \\
&= \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k})}{\beta_k^2} \cos(\psi_{i,k} - \psi_{j,k}) \left[ \operatorname{sinc}^2(\alpha_k) + 1 - 2 \operatorname{sinc}(\alpha_k) \cos(\beta_k T - \alpha_k) \right]. \quad (2.216)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{I}_{i,k} \bar{I}_{j,k} + \bar{Q}_{i,k} \bar{Q}_{j,k} \Big|_{\delta\psi'_i = \delta\psi'_j} &= A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k}) \operatorname{sinc}^2(\alpha_k) \times \\
&\times \left[ \cos(\phi_{i,k} + \alpha_k) \cos(\phi_{j,k} + \alpha_k) + \sin(\phi_{i,k} + \alpha_k) \sin(\phi_{j,k} + \alpha_k) \right] = \\
&= A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k}) \operatorname{sinc}^2(\alpha_k) \cos(\psi_{i,k} - \psi_{j,k}). \quad (2.217)
\end{aligned}$$

Согласно выражениям (2.195), (2.196)

$$\begin{aligned}
\bar{I}'_{i,k} \bar{Q}_{j,k} + \bar{Q}_{i,k} \bar{I}'_{j,k} - \bar{I}_{i,k} \bar{Q}'_{j,k} - \bar{Q}'_{i,k} \bar{I}_{j,k} \Big|_{\delta\psi'_i = \delta\psi'_j} &= \\
&= \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k})}{\beta_k} \operatorname{sinc}(\alpha_k) \times \\
&\left[ -\operatorname{sinc}(\alpha_k) \sin(\phi_{j,k} + \alpha_k) \cos(\phi_{i,k} + \alpha_k) + \sin(\phi_{j,k} + \alpha_k) \cos(\phi_{i,k} + \beta_k T) - \right. \\
&- \operatorname{sinc}(\alpha_k) \sin(\phi_{i,k} + \alpha_k) \cos(\phi_{j,k} + \alpha_k) + \sin(\phi_{i,k} + \alpha_k) \cos(\phi_{j,k} + \beta_k T) + \\
&+ \operatorname{sinc}(\alpha_k) \cos(\phi_{i,k} + \alpha_k) \sin(\phi_{j,k} + \alpha_k) - \cos(\phi_{i,k} + \alpha_k) \sin(\phi_{j,k} + \beta_k T) + \\
&+ \operatorname{sinc}(\alpha_k) \cos(\phi_{j,k} + \alpha_k) \sin(\phi_{i,k} + \alpha_k) - \cos(\phi_{j,k} + \alpha_k) \sin(\phi_{i,k} + \beta_k T) \left. \right] = \\
&= \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k})}{\beta_k} \operatorname{sinc}(\alpha_k) \times \\
&\times \left[ \sin(\psi_{i,k} - \psi_{j,k} + \alpha_k - \beta_k T) - \sin(\psi_{i,k} - \psi_{j,k} - (\alpha_k - \beta_k T)) \right] = \\
&= \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k})}{\beta_k} \operatorname{sinc}(\alpha_k) \times 2 \cos(\psi_{i,k} - \psi_{j,k}) \sin(\alpha_k - \beta_k T). \quad (2.218)
\end{aligned}$$

Объединяем результаты:

$$\begin{aligned}
& \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{Q}_{i,k} \bar{I}_{j,k} - \bar{I}_{i,k} \bar{Q}_{j,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{Q}'_{i,k} \bar{I}'_{j,k} - \bar{I}'_{i,k} \bar{Q}'_{j,k} \right] + \right. \\
& \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{i,k} \bar{I}_{j,k} + \bar{Q}'_{i,k} \bar{Q}_{j,k} - \bar{I}_{i,k} \bar{I}'_{j,k} - \bar{Q}_{i,k} \bar{Q}'_{j,k} \right] \right) \Big|_{\delta\psi'_i = \delta\psi'_j} = \\
& = \sigma_{IQ}^2 \frac{T^2}{3} A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k}) \sin(\psi_{j,k} - \psi_{i,k}) + \\
& + \sigma_{IQ}^2 \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k}) T^2}{4} \sin(\psi_{j,k} - \psi_{i,k}) - \\
& - \sigma_{IQ}^2 \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k}) T^2}{2} \sin(\psi_{j,k} - \psi_{i,k}) = \\
& = 1/12 \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k}) \sin(\psi_{j,k} - \psi_{i,k}). \tag{2.219}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{i,k} \bar{I}_{j,k} + \bar{Q}_{i,k} \bar{Q}_{j,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{i,k} \bar{I}'_{j,k} + \bar{Q}'_{i,k} \bar{Q}'_{j,k} \right] + \right. \\
& \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{i,k} \bar{Q}_{j,k} + \bar{Q}_{i,k} \bar{I}'_{j,k} - \bar{Q}'_{i,k} \bar{I}_{j,k} - \bar{I}_{i,k} \bar{Q}'_{j,k} \right] \right) \Big|_{\delta\psi'_i = \delta\psi'_j = 0} = \\
& = \sigma_{IQ}^2 \frac{T^2}{3} A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k}) \cos(\psi_{i,k} - \psi_{j,k}) + \\
& + \sigma_{IQ}^2 \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k}) T^2}{4} \cos(\psi_{i,k} - \psi_{j,k}) - \\
& - \sigma_{IQ}^2 \frac{A_{IQ,k}^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k}) T^2}{2} \cos(\psi_{i,k} - \psi_{j,k}) = \\
& = 1/12 \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k}) \cos(\psi_{i,k} - \psi_{j,k}). \tag{2.220}
\end{aligned}$$

Подставляем полученные выражения в (2.206)

$$\begin{aligned}
& E \left[ \frac{u_{\omega_1}(\omega_{1,k} - \tilde{\omega}_{1,k})}{2\Upsilon} - E \left[ \frac{u_{\omega_1}(\omega_{1,k} - \tilde{\omega}_{1,k})}{2\Upsilon} \right] \right]^2 = \\
& = \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \sum_{c=1}^M \sum_{d=c}^M \kappa_{a,b} \kappa_{c,d} \times \\
& \times \left\{ \cos(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \cos(\tilde{\psi}_{d,k} - \tilde{\psi}_{c,k}) \times \right. \\
& \left[ (b=d) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{c,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{c,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} + \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{c,k} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{c,k} + \bar{I}_{a,k} \bar{Q}_{c,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{c,k} \right] \right) + \right. \\
& \left. + (b=c) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{d,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{d,k} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{d,k} + \bar{I}_{a,k} \bar{Q}_{d,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} - \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{d,k} \right] \right) + \right. \\
& \left. + (a=c) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{d,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{d,k} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}_{d,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{d,k} - \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (a = d) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{c,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{c,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{c,k} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ'} \cdot \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}_{c,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{c,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{c,k} - \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} \right] + \\
& + (a = c) (b = d) \left( 4\sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 - 4E_{IQ'}^2 \right) + (a = d) (b = c) \left( 4\sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 - 4E_{IQ'}^2 \right) \left. \right] \\
& + \sin(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \cos(\tilde{\psi}_{d,k} - \tilde{\psi}_{c,k}) \times \\
& \left[ (a = c) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{Q}_{d,k} - \bar{Q}_{b,k} \bar{I}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}'_{d,k} \right] + \right. \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}'_{d,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} - \bar{I}'_{b,k} \bar{I}_{d,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \\
& + (b = c) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{Q}_{a,k} \bar{I}_{d,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{I}_{d,k} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}_{d,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \\
& + (a = d) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{Q}_{c,k} - \bar{Q}_{b,k} \bar{I}_{c,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}'_{c,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}'_{c,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{I}'_{b,k} \bar{I}_{c,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}_{c,k} \right] + \\
& + (b = d) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{c,k} \bar{Q}_{a,k} - \bar{Q}_{c,k} \bar{I}_{a,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{c,k} \bar{Q}'_{a,k} - \bar{Q}'_{c,k} \bar{I}'_{a,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}_{c,k} \bar{I}'_{a,k} + \bar{Q}_{c,k} \bar{Q}'_{a,k} - \bar{I}'_{c,k} \bar{I}_{a,k} - \bar{Q}'_{c,k} \bar{Q}_{a,k} \right] \left. \right) + \\
& + \cos(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \sin(\tilde{\psi}_{d,k} - \tilde{\psi}_{c,k}) \times \\
& \left[ (a = c) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{Q}_{b,k} \bar{I}_{d,k} - \bar{I}_{b,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \right. \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{I}_{d,k} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}_{d,k} - \bar{I}_{b,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \\
& + (a = d) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{Q}_{c,k} - \bar{Q}_{b,k} \bar{I}_{c,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}'_{c,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}'_{c,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{I}'_{b,k} \bar{I}_{c,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}_{c,k} \right] + \\
& + (b = c) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{Q}_{a,k} \bar{I}_{d,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{I}_{d,k} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}_{d,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \\
& + (b = d) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{a,k} \bar{Q}_{c,k} - \bar{Q}_{a,k} \bar{I}_{c,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}'_{c,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}_{a,k} \bar{I}'_{c,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{I}'_{a,k} \bar{I}_{c,k} - \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}_{c,k} \right] \left. \right) + \\
& + \sin(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \sin(\tilde{\psi}_{d,k} - \tilde{\psi}_{c,k}) \times \\
& \left[ (b = d) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{c,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{c,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{c,k} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} \right] + \right. \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}_{c,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{c,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{c,k} \right] - \\
& - (b = c) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{d,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{d,k} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +E_{IQ'} \left[ \bar{I}_{a,k} \bar{Q}_{d,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} - \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{d,k} \right] + \\
& + (a=c) \left( \sigma_{IQ'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{d,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{d,k} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{Q}_{d,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{d,k} \right] - \\
& \left. - (a=d) \left( \sigma_{IQ'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{c,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{c,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{c,k} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{Q}_{c,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{c,k} - \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{c,k} \right] + \\
& \left. + (a=c)(b=d) \left( 4\sigma_{IQ}^2 \sigma_{IQ'}^2 - 4E_{IQ'}^2 \right) - (a=d)(b=c) \left( 4\sigma_{IQ}^2 \sigma_{IQ'}^2 - 4E_{IQ'}^2 \right) \right] = \\
& = \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \sum_{c=1}^M \sum_{d=c}^M \kappa_{a,b} \kappa_{c,d} \times \\
& \times \left\{ \cos(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k} - \tilde{\psi}_{d,k} + \tilde{\psi}_{c,k}) \times \right. \\
& \left[ (b=d) \left( \sigma_{IQ'}^2 \left[ \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{c,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{c,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} + \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{c,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{c,k} + \bar{I}_{a,k} \bar{Q}_{c,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{c,k} \right] + \\
& + (a=c) \left( \sigma_{IQ'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{d,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{d,k} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}_{d,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{d,k} - \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \\
& \left. + (a=c)(b=d) \left( 4\sigma_{IQ}^2 \sigma_{IQ'}^2 - 4E_{IQ'}^2 \right) \right] + \\
& + \sin(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k} - \tilde{\psi}_{d,k} + \tilde{\psi}_{c,k}) \times \\
& \left[ (a=c) \left( \sigma_{IQ'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{Q}_{d,k} - \bar{Q}_{b,k} \bar{I}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}'_{d,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}'_{d,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} - \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{d,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \\
& + (b=d) \left( \sigma_{IQ'}^2 \left[ \bar{I}_{c,k} \bar{Q}_{a,k} - \bar{Q}_{c,k} \bar{I}_{a,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{c,k} \bar{Q}'_{a,k} - \bar{Q}'_{c,k} \bar{I}'_{a,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}_{c,k} \bar{I}'_{a,k} + \bar{Q}_{c,k} \bar{Q}'_{a,k} - \bar{I}_{c,k} \bar{I}_{a,k} - \bar{Q}'_{c,k} \bar{Q}_{a,k} \right] + \\
& \left. + \sin(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k} + \tilde{\psi}_{d,k} - \tilde{\psi}_{c,k}) \times \right. \\
& \left[ (a=d) \left( \sigma_{IQ'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{Q}_{c,k} - \bar{Q}_{b,k} \bar{I}_{c,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}'_{c,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}'_{c,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{I}'_{b,k} \bar{I}_{c,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}_{c,k} \right] + \\
& + (b=c) \left( \sigma_{IQ'}^2 \left[ \bar{Q}_{a,k} \bar{I}_{d,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \right. \\
& + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{I}_{d,k} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}_{d,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \\
& \left. + \cos(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k} + \tilde{\psi}_{d,k} - \tilde{\psi}_{c,k}) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ (b=c) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{d,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{d,k} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}_{d,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} - \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{d,k} \right] \right) + \right. \\
& \left. (a=d) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{c,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{c,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{c,k} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}_{c,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{c,k} - \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{c,k} \right] \right) + \right. \\
& \left. + (a=d)(b=c) \left( 4\sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 - 4E_{IQ'}^2 \right) \right] = \\
& = \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \sum_{c=1}^M \sum_{d=c}^M \kappa_{a,b} \kappa_{c,d} \times \\
& \times \left\{ (b=d) \cos(\tilde{\psi}_{c,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{c,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{c,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} + \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{c,k} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{c,k} + \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}_{c,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{c,k} \right] \right) + \right. \\
& \left. + (a=c) \cos(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{d,k}) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{d,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{d,k} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}_{d,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{d,k} - \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] \right) + \right. \\
& \left. + (a=c)(b=d) \left( 4\sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 - 4E_{IQ'}^2 \right) + \right. \\
& \left. + (a=c) \sin(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{d,k}) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{Q}_{d,k} - \bar{Q}_{b,k} \bar{I}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}'_{d,k} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}'_{d,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}'_{d,k} - \bar{I}'_{b,k} \bar{I}_{d,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}_{d,k} \right] \right) + \right. \\
& \left. + (b=d) \sin(\tilde{\psi}_{c,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{c,k} \bar{Q}_{a,k} - \bar{Q}_{c,k} \bar{I}_{a,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{c,k} \bar{Q}'_{a,k} - \bar{Q}'_{c,k} \bar{I}'_{a,k} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{I}_{c,k} \bar{I}'_{a,k} + \bar{Q}_{c,k} \bar{Q}'_{a,k} - \bar{I}'_{c,k} \bar{I}_{a,k} - \bar{Q}'_{c,k} \bar{Q}_{a,k} \right] \right) + \right. \\
& \left. + (a=d) \sin(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{c,k}) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{Q}_{c,k} - \bar{Q}_{b,k} \bar{I}_{c,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}'_{c,k} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}'_{c,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{I}'_{b,k} \bar{I}_{c,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}_{c,k} \right] \right) + \right. \\
& \left. + (b=c) \sin(\tilde{\psi}_{d,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{Q}_{a,k} \bar{I}_{d,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{I}_{d,k} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}_{d,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] \right) - \right. \\
& \left. - (b=c) \cos(\tilde{\psi}_{d,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{d,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{d,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{I}'_{d,k} + \bar{Q}'_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{a,k} \bar{Q}_{d,k} + \bar{Q}_{a,k} \bar{I}'_{d,k} - \bar{I}_{a,k} \bar{Q}'_{d,k} - \bar{Q}'_{a,k} \bar{I}_{d,k} \right] \right) - \right. \\
& \left. - (a=d) \cos(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{c,k}) \left( \sigma_{I'Q'}^2 \left[ \bar{I}_{b,k} \bar{I}_{c,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{Q}_{c,k} \right] + \sigma_{IQ}^2 \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{I}'_{c,k} + \bar{Q}'_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + E_{IQ'} \left[ \bar{I}'_{b,k} \bar{Q}_{c,k} + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}'_{c,k} - \bar{I}_{b,k} \bar{Q}'_{c,k} - \bar{Q}'_{b,k} \bar{I}_{c,k} \right] \right) \right\} + \\
& \left. + (a=d)(b=c) \left( 4\sigma_{IQ}^2 \sigma_{I'Q'}^2 - 4E_{IQ'}^2 \right) \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[ \frac{u_{\omega_1}(\omega_{1,k} - \tilde{\omega}_{1,k})}{2\Upsilon} - E \left[ \frac{u_{\omega_1}(\omega_{1,k} - \tilde{\omega}_{1,k})}{2\Upsilon} \right] \right]^2 \\
&= \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \sum_{c=1}^M \sum_{d=c}^M \kappa_{a,b} \kappa_{c,d} \times \\
&\times \left\{ (b=d) \cos(\tilde{\psi}_{c,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \rho(\delta\tau_{c,k}) \rho(\delta\tau_{a,k}) \cos(\psi_{c,k} - \psi_{a,k}) + \right. \\
&+ (a=c) \cos(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{d,k}) \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \rho(\delta\tau_{b,k}) \rho(\delta\tau_{d,k}) \cos(\psi_{b,k} - \psi_{d,k}) + \\
&+ (a=c) \sin(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{d,k}) \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \rho(\delta\tau_{b,k}) \rho(\delta\tau_{d,k}) \sin(\psi_{b,k} - \psi_{d,k}) + \\
&+ (b=d) \sin(\tilde{\psi}_{c,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \rho(\delta\tau_{c,k}) \rho(\delta\tau_{a,k}) \sin(\psi_{c,k} - \psi_{a,k}) + \\
&+ (a=d) \sin(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{c,k}) \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \rho(\delta\tau_{b,k}) \rho(\delta\tau_{c,k}) \sin(\psi_{b,k} - \psi_{c,k}) + \\
&+ (b=c) \sin(\tilde{\psi}_{d,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \rho(\delta\tau_{d,k}) \rho(\delta\tau_{a,k}) \sin(\psi_{d,k} - \psi_{a,k}) + \\
&+ (b=c) \cos(\tilde{\psi}_{d,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{d,k}) \cos(\psi_{a,k} - \psi_{d,k}) + \\
&+ (a=d) \cos(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{c,k}) \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \rho(\delta\tau_{b,k}) \rho(\delta\tau_{c,k}) \cos(\psi_{b,k} - \psi_{c,k}) + \\
&+ (a=c)(b=d)(4\sigma_{IQ}^2 \sigma_{IQ'}^2 - 4E_{IQ'}^2) + (a=d)(b=c)(4\sigma_{IQ}^2 \sigma_{IQ'}^2 - 4E_{IQ'}^2) \left. \right\} = \\
&= \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \sum_{c=1}^M \sum_{d=c}^M \kappa_{a,b} \kappa_{c,d} \times \\
&\times \left\{ (b=d) \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \rho(\delta\tau_{c,k}) \rho(\delta\tau_{a,k}) \cos(\delta\psi_{c,k} - \delta\psi_{a,k}) + \right. \\
&+ (a=c) \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \rho(\delta\tau_{b,k}) \rho(\delta\tau_{d,k}) \cos(\delta\psi_{b,k} - \delta\psi_{d,k}) + \\
&+ (b=c) \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{d,k}) \cos(\delta\psi_{a,k} - \delta\psi_{d,k}) + \\
&+ (a=d) \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \rho(\delta\tau_{b,k}) \rho(\delta\tau_{c,k}) \cos(\delta\psi_{b,k} - \delta\psi_{c,k}) + \\
&+ (a=c)(b=d)(4\sigma_{IQ}^2 \sigma_{IQ'}^2 - 4E_{IQ'}^2) + (a=d)(b=c)(4\sigma_{IQ}^2 \sigma_{IQ'}^2 - 4E_{IQ'}^2) \left. \right\} = \\
&= (4\sigma_{IQ}^2 \sigma_{IQ'}^2 - 4E_{IQ'}^2) \left[ \sum_{i=1}^M \sum_{j=i}^M \kappa_{i,j}^2 + \sum_{i=1}^M \kappa_{i,i}^2 \right] + \\
&+ \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \frac{M}{4} \sum_{a=1}^M \sum_{c=1}^M \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{c,k}) \cos(\delta\psi_{a,k} - \delta\psi_{c,k}) + \\
&+ \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \frac{M}{4} \sum_{b=1}^M \sum_{d=1}^M \rho(\delta\tau_{b,k}) \rho(\delta\tau_{d,k}) \cos(\delta\psi_{b,k} - \delta\psi_{d,k}) + \\
&+ \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \frac{M}{4} \sum_{a=1}^M \sum_{d=1}^M \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{d,k}) \cos(\delta\psi_{a,k} - \delta\psi_{d,k}) + \\
&+ \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \frac{M}{4} \sum_{b=1}^M \sum_{c=1}^M \rho(\delta\tau_{b,k}) \rho(\delta\tau_{c,k}) \cos(\delta\psi_{b,k} - \delta\psi_{c,k}) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} \sigma_{IQ}^4 T^2 M^2 + \\
&\quad + \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 M \sum_{i=1}^M \sum_{j=i}^M \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k}) \cos(\delta\psi_{i,k} - \delta\psi_{j,k}).
\end{aligned} \tag{2.221}$$

Тогда дисперсия отсчетов на выходе дискриминатора в указанной области аргументов

$$\begin{aligned}
&E \left[ u_{\omega_1}(\omega_{1,k} - \tilde{\omega}_{1,k}) - E \left[ u_{\omega_1}(\omega_{1,k} - \tilde{\omega}_{1,k}) \right] \right]^2 \Big|_{\delta\psi'_i = \delta\psi'_j = 0} = \\
&= (2\tilde{\Upsilon})^2 \frac{1}{6} \sigma_{IQ}^4 T^2 M^2 + \\
&\quad + (2\tilde{\Upsilon})^2 \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 M \sum_{i=1}^M \sum_{j=i}^M \rho(\delta\tau_{i,k}) \rho(\delta\tau_{j,k}) \cos(\delta\psi_{i,k} - \delta\psi_{j,k}).
\end{aligned} \tag{2.222}$$

Для дальнейшего упрощения выражения добавим условие  $\forall i, j \in \{1..M\}$ :

$\delta\psi_{i,k} = \delta\psi_{j,k} = \delta\psi_k$ ;  $\delta\tau_{i,k} = \delta\tau_{j,k} = \delta\tau_k$ , тогда

$$\begin{aligned}
&E \left[ u_{\omega_1}(\omega_{1,k} - \tilde{\omega}_{1,k}) - E \left[ u_{\omega_1}(\omega_{1,k} - \tilde{\omega}_{1,k}) \right] \right]^2 \Big|_{\substack{\delta\psi'_i = \delta\psi'_j = 0 \\ \delta\psi_{i,k} = \delta\psi_{j,k} = \delta\psi_k}} = \\
&= (2\tilde{\Upsilon})^2 \frac{1}{6} \sigma_{IQ}^4 T^2 M^2 + (2\tilde{\Upsilon})^2 \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \rho^2(\delta\tau_k) M^3 = \\
&= (2\Upsilon)^2 \cdot \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \rho^2(\delta\tau_k) M^3 \left( 1 + \frac{2\sigma_{IQ}^2}{\rho^2(\delta\tau_k) A_{IQ,k}^2 M} \right).
\end{aligned} \tag{2.223}$$

Для нахождения дисперсии дискриминационных отсчетов, приведенных к оцениваемому параметру, поделим полученное выражение (2.223) на квадрат крутизны, задаваемой выражением (2.201)

$$\begin{aligned}
D_{\tilde{\omega}_1} (0) &= \frac{(2\Upsilon)^2 \cdot \frac{1}{12} \sigma_{IQ}^2 A_{IQ,k}^2 T^2 \rho^2(\delta\tau_k) M^3 \left( 1 + \frac{2\sigma_{IQ}^2}{\rho^2(\delta\tau_k) A_{IQ,k}^2 M} \right)}{\left( 2\Upsilon \frac{1}{12} A_{IQ,k}^2 T^2 M^2 \rho^2(\delta\tau_k) \right)^2} = \\
&= \frac{12\sigma_{IQ}^2}{A_{IQ,k}^2 T^2 M \rho^2(\delta\tau_k)} \left( 1 + \frac{2\sigma_{IQ}^2}{\rho^2(\delta\tau_k) A_{IQ,k}^2 M} \right) = \frac{6}{qMT^2 \rho^2(\delta\tau_k)} \left( 1 + \frac{1}{qM \rho^2(\delta\tau_k)} \right).
\end{aligned} \tag{2.224}$$

## П.2.14 Алгоритм дискриминатора задержки

Как отмечено во второй главе основной книги диссертации, для угломерных приложений СРНС характерен разнос приемных точек на расстояния порядка единиц метров. В то же время, характерная точность слежения за задержкой огибающей сигнала порядка 1-10 метров. Тогда для ряда приложений можно принять приближение о равенстве задержек огибающей сигнала во всех приемных точках, что и было сделано в постановке задачи.

Проведем синтез дискриминатора задержки огибающей. Найдем компонент векторного дискриминатора, соответствующий параметру  $\tau_k$ , для чего преобразуем

$$\frac{\partial \check{X}_k^2(\lambda_k)}{\partial \tau_k} = 2 \cdot \sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k} \cdot \frac{\partial \sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k}}{\partial \tau_k} + 2 \cdot \sum_{m=1}^M Q_{\psi,m,k} \cdot \frac{\partial \sum_{m=1}^M Q_{\psi,m,k}}{\partial \tau_k} \quad (2.225)$$

По отдельности рассчитаем производные корреляционных сумм:

$$\frac{\partial \sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k}}{\partial \tau_k} = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L y_m(t_{k,l}) \cos(\Phi_{\psi,m,k,l}(\lambda_k)) \frac{\partial}{\partial \tau_k} G_{c,m}(t_{k,l} - \tau_k), \quad (2.226)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_k} G_{c,m}(t_{k,l} - \tau_k) \approx \frac{G_{c,m}(t_{k,l} - \tau_k - \Delta\tau) - G_{c,m}(t_{k,l} - \tau_k + \Delta\tau)}{2\Delta\tau}, \quad (2.227)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sum_{m=1}^M I_{\psi,m,k}(\lambda_k)}{\partial \tau_{j,k}} \approx \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \frac{G_{c,m}(t_{k,l} - \tau_{m,k} - \Delta\tau) - G_{\check{a}\check{e}}(t_{k,l} - \tau_{m,k} + \Delta\tau)}{2\Delta\tau} y_m(t_{k,l}) \times \\ & \times (\cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) \cdot \cos(\psi_{m,k}) - \sin(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) \sin(\psi_{m,k})) = \\ & = \sum_{m=1}^M \frac{\cos(\psi_{m,k})}{2\Delta\tau} (I_{E,m}^s(\lambda_k) - I_{L,m}^s(\lambda_k)) - \sum_{m=1}^M \frac{\sin(\psi_{m,k})}{2\Delta\tau} (Q_{E,m}^s(\lambda_k) - Q_{L,m}^s(\lambda_k)), \end{aligned} \quad (2.228)$$

где

$$\begin{aligned}
I_{E,m}(\lambda_k) &= \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_{c,m}(t_{k,l} - \tau_k - \Delta\tau) \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)); \\
Q_{E,m}(\lambda_k) &= \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_{c,m}(t_{k,l} - \tau_k - \Delta\tau) \sin(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)); \\
I_{L,m}(\lambda_k) &= \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_{c,m}(t_{k,l} - \tau_k + \Delta\tau) \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)); \\
Q_{L,m}(\lambda_k) &= \sum_{l=1}^L y_{m,k,l} G_{c,m}(t_{k,l} - \tau_k + \Delta\tau) \sin(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k))
\end{aligned} \tag{2.229}$$

- опаздывающие и опережающие квадратурные корреляционные суммы.

Аналогично с производной суммы квадратурных компонент

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sum_{m=1}^M \check{Q}_{m,k}}{\partial \tau_k} &= \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L y_m(t_{k,l}) \sin(\check{\Phi}_{m,k,l}(\lambda_k)) \frac{\partial}{\partial \tau_k} G_{\check{a}\check{e}}(t_{k,l} - \tau_k) \approx \\
&\approx \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \frac{G_{\check{a}\check{e}}(t_{k,l} - \tau_k - \Delta\tau) - G_{\check{a}\check{e}}(t_{k,l} - \tau_k + \Delta\tau)}{2\Delta\tau} y_m(t_{k,l}) \times \\
&\quad \times (\cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) \cdot \sin(\psi_{m,k}) + \sin(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k)) \cos(\psi_{m,k})) = \\
&= \sum_{m=1}^M \frac{\sin(\psi_{m,k})}{2\Delta\tau} (I_{E,m}(\lambda_k) - I_{L,m}(\lambda_k)) + \sum_{m=1}^M \frac{\cos(\psi_{m,k})}{2\Delta\tau} (Q_{E,m}(\lambda_k) - Q_{L,m}(\lambda_k)).
\end{aligned} \tag{2.230}$$

Произведение в первом слагаемом (2.225) с учетом (2.228), (2.230)

принимает вид

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^M \check{I}_{m,k} \cdot \frac{\partial \sum_{m=1}^M \check{I}_{m,k}}{\partial \tau_k} &= \left( \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) I_{m,k} - \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) Q_{m,k} \right) \times \\
&\times \left[ \sum_{m=1}^M \frac{\cos(\psi_{m,k})}{2\Delta\tau} (I_{E,m,k}(\lambda_k) - I_{L,m,k}(\lambda_k)) - \sum_{m=1}^M \frac{\sin(\psi_{m,k})}{2\Delta\tau} (Q_{E,m,k}(\lambda_k) - Q_{L,m,k}(\lambda_k)) \right] = \\
&= \frac{1}{2\Delta\tau} \times \left\{ \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\psi_{a,k}) \cos(\psi_{b,k}) I_{a,k} [I_{E,b,k} - I_{L,b,k}] \right. \\
&\quad - \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\psi_{a,k}) \sin(\psi_{b,k}) I_{a,k} [Q_{E,b,k} - Q_{L,b,k}] - \\
&\quad \left. - \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\psi_{a,k}) \cos(\psi_{b,k}) Q_{a,k} [I_{E,b,k} - I_{L,b,k}] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\psi_{a,k}) \sin(\psi_{b,k}) Q_{a,k} [Q_{E,b,k} - Q_{L,b,k}] \right\}.
\end{aligned} \tag{2.231}$$

Аналогично со вторым слагаемым в (2.225):

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^M \tilde{Q}_{m,k} \cdot \frac{\partial \sum_{m=1}^M \tilde{Q}_{m,k}}{\partial \tau_k} = \left( \sum_{m=1}^M \sin(\psi_{m,k}) I_{m,k} + \sum_{m=1}^M \cos(\psi_{m,k}) Q_{m,k} \right) \times \\
& \times \left( \sum_{m=1}^M \frac{\sin(\psi_{m,k})}{2\Delta\tau} (I_{E,m}(\lambda_k) - I_{L,m}(\lambda_k)) + \sum_{m=1}^M \frac{\cos(\psi_{m,k})}{2\Delta\tau} (Q_{E,m}(\lambda_k) - Q_{L,m}(\lambda_k)) \right) = \\
& = \frac{1}{2\Delta\tau} \times \left\{ \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\psi_{a,k}) \cos(\psi_{b,k}) I_{a,k} (Q_{E,b,k} - Q_{L,b,k}) + \right. \\
& + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\psi_{a,k}) \sin(\psi_{b,k}) I_{a,k} (I_{E,b,k} - I_{L,b,k}) + \\
& \qquad \qquad \qquad + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\psi_{a,k}) \cos(\psi_{b,k}) Q_{a,k} (Q_{E,b,k} - Q_{L,b,k}) + \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\psi_{a,k}) \sin(\psi_{b,k}) Q_{a,k} (I_{E,b,k} - I_{L,b,k}) \right\}. \tag{2.232}
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& \frac{u_\tau(\tau_k - \tilde{\tau}_k) 2\Delta\tau}{2\Upsilon} = \\
& = \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{a,k}) I_{a,k}(\tilde{\lambda}_k) \cos(\tilde{\psi}_{b,k}) (I_{E,b,k}(\tilde{\lambda}_k) - I_{L,b,k}(\tilde{\lambda}_k)) - \\
& - \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{a,k}) I_{a,k}(\tilde{\lambda}_k) \sin(\tilde{\psi}_{b,k}) (Q_{E,b,k}(\tilde{\lambda}_k) - Q_{L,b,k}(\tilde{\lambda}_k)) - \\
& - \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\tilde{\psi}_{a,k}) Q_{a,k}(\tilde{\lambda}_k) \cos(\tilde{\psi}_{b,k}) (I_{E,b,k}(\tilde{\lambda}_k) - I_{L,b,k}(\tilde{\lambda}_k)) + \\
& + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\tilde{\psi}_{a,k}) Q_{a,k}(\tilde{\lambda}_k) \sin(\tilde{\psi}_{b,k}) (Q_{E,b,k}(\tilde{\lambda}_k) - Q_{L,b,k}(\tilde{\lambda}_k)) + \\
& + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\psi_{a,k}) I_{a,k}(\tilde{\lambda}_k) \cos(\psi_{b,k}) (Q_{E,b,k}(\tilde{\lambda}_k) - Q_{L,b,k}(\tilde{\lambda}_k)) + \\
& + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\psi_{a,k}) I_{a,k}(\tilde{\lambda}_k) \sin(\psi_{b,k}) (I_{E,b,k}(\tilde{\lambda}_k) - I_{L,b,k}(\tilde{\lambda}_k)) + \\
& + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\psi_{a,k}) Q_{a,k}(\tilde{\lambda}_k) \cos(\psi_{b,k}) (Q_{E,b,k}(\tilde{\lambda}_k) - Q_{L,b,k}(\tilde{\lambda}_k)) + \\
& + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\psi_{a,k}) Q_{a,k}(\tilde{\lambda}_k) \sin(\psi_{b,k}) (I_{E,b,k}(\tilde{\lambda}_k) - I_{L,b,k}(\tilde{\lambda}_k)) = \\
& = \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \left[ \cos(\tilde{\psi}_{a,k}) \cos(\tilde{\psi}_{b,k}) + \sin(\tilde{\psi}_{a,k}) \sin(\tilde{\psi}_{b,k}) \right] \times \\
& \times \left( \tilde{I}_{a,k} (\tilde{I}_{E,b,k} - \tilde{I}_{L,b,k}) + \tilde{Q}_{a,k} (\tilde{Q}_{E,b,k} - \tilde{Q}_{L,b,k}) \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\tilde{\psi}_{a,k}) \cos(\tilde{\psi}_{b,k}) \times \\
& \times \left( \tilde{I}_{a,k} (\tilde{Q}_{E,b,k} - \tilde{Q}_{L,b,k}) + (\tilde{I}_{E,a,k} - \tilde{I}_{L,a,k}) \tilde{Q}_{b,k} - (\tilde{Q}_{E,a,k} - \tilde{Q}_{L,a,k}) \tilde{I}_{b,k} - \tilde{Q}_{a,k} (\tilde{I}_{E,b,k} - \tilde{I}_{L,b,k}) \right) = \\
& = \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \times \left( \tilde{I}_{a,k} (\tilde{I}_{E,b,k} - \tilde{I}_{L,b,k}) + \tilde{Q}_{a,k} (\tilde{Q}_{E,b,k} - \tilde{Q}_{L,b,k}) \right) + \\
& + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\tilde{\psi}_{a,k}) \cos(\tilde{\psi}_{b,k}) \times \\
& \times \left( \tilde{I}_{a,k} (\tilde{Q}_{E,b,k} - \tilde{Q}_{L,b,k}) + (\tilde{I}_{E,a,k} - \tilde{I}_{L,a,k}) \tilde{Q}_{b,k} - (\tilde{Q}_{E,a,k} - \tilde{Q}_{L,a,k}) \tilde{I}_{b,k} - \tilde{Q}_{a,k} (\tilde{I}_{E,b,k} - \tilde{I}_{L,b,k}) \right). \tag{2.233}
\end{aligned}$$

Выражения под суммами можно представить в виде элементов матрицы  $M \times M$ , оставляем элементы выше главной диагонали

$$\begin{aligned}
u_\tau(\tau_k - \tilde{\tau}_k) & = \\
& = \frac{\tilde{\Upsilon}}{\Delta\tau} \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_{a,b} \right) \cos(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \times \\
& \times \left( \tilde{I}_{a,k} (\tilde{I}_{E,b,k} - \tilde{I}_{L,b,k}) + \tilde{Q}_{a,k} (\tilde{Q}_{E,b,k} - \tilde{Q}_{L,b,k}) + \tilde{I}_{b,k} (\tilde{I}_{E,a,k} - \tilde{I}_{L,a,k}) + \tilde{Q}_{b,k} (\tilde{Q}_{E,a,k} - \tilde{Q}_{L,a,k}) \right) + \\
& + \frac{\Upsilon}{\Delta\tau} \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_{a,b} \right) \sin(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \times \\
& \times \left( (\tilde{Q}_{E,a,k} - \tilde{Q}_{L,a,k}) \tilde{I}_{b,k} + \tilde{Q}_{a,k} (\tilde{I}_{E,b,k} - \tilde{I}_{L,b,k}) - \tilde{I}_{a,k} (\tilde{Q}_{E,b,k} - \tilde{Q}_{L,b,k}) - (\tilde{I}_{E,a,k} - \tilde{I}_{L,a,k}) \tilde{Q}_{b,k} \right). \tag{2.234}
\end{aligned}$$

где  $\delta_{i,i} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  - символ Кронекера.

Альтернативная запись выражения (2.234) с использованием «совместных» квадратурных сумм более удобна для реализации в аппаратуре совместно с ДРФ и ДЧ

$$\begin{aligned}
u_\tau(\tau_k - \tilde{\tau}_k) & = \frac{\Upsilon}{\Delta\tau} \times \\
& \times \sum_{m=1}^M \left\{ \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) \times \left[ (\mathcal{Q}_{E,m}(\tilde{\lambda}_k) - \mathcal{Q}_{L,m}(\tilde{\lambda}_k)) \mathcal{Q}_{c,k} + (I_{E,m}(\tilde{\lambda}_k) - I_{L,m}(\tilde{\lambda}_k)) I_{c,k} \right] \right. \\
& \left. + \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) \times \left[ (I_{E,m}(\tilde{\lambda}_k) - I_{L,m}(\tilde{\lambda}_k)) \mathcal{Q}_{c,k} - (\mathcal{Q}_{E,m}(\tilde{\lambda}_k) - \mathcal{Q}_{L,m}(\tilde{\lambda}_k)) I_{c,k} \right] \right\}. \tag{2.235}
\end{aligned}$$

Если ввести понятие опаздывающих и опережающих совместных корреляционных сумм, то выражение (2.235) еще более упрощается:

$$\begin{aligned}
u_{\tau}(\tau_k - \tilde{\tau}_k) &= \frac{\Upsilon}{\Delta\tau} \times \\
&\times \sum_{m=1}^M \left\{ \left( \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) Q_{E,m}(\tilde{\lambda}_k) + \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) I_{E,m}(\tilde{\lambda}_k) \right) Q_{c,k} + \right. \\
&+ \left( \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) I_{E,m}(\tilde{\lambda}_k) - \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) Q_{E,m}(\tilde{\lambda}_k) \right) I_{c,k} - \\
&- \left( \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) Q_{L,m}(\tilde{\lambda}_k) + \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) I_{L,m}(\tilde{\lambda}_k) \right) Q_{c,k} - \\
&\quad \left. - \left( \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) I_{L,m}(\tilde{\lambda}_k) - \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) Q_{L,m}(\tilde{\lambda}_k) \right) I_{c,k} \right\} = \\
&= \Upsilon \frac{(Q_{E,c,k} - Q_{L,c,k}) Q_{c,k} + (I_{E,c,k} - I_{L,c,k}) I_{c,k}}{\Delta\tau},
\end{aligned} \tag{2.236}$$

где

$$\begin{aligned}
I_{E,c,k}(\tilde{\lambda}_k) &= \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) I_{E,m}(\tilde{\lambda}_k) - \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) Q_{E,m}(\tilde{\lambda}_k), \\
Q_{E,c,k}(\tilde{\lambda}_k) &= \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) Q_{E,m}(\tilde{\lambda}_k) + \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) I_{E,m}(\tilde{\lambda}_k), \\
I_{L,c,k}(\tilde{\lambda}_k) &= \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) I_{L,m}(\tilde{\lambda}_k) - \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) Q_{L,m}(\tilde{\lambda}_k), \\
Q_{L,c,k}(\tilde{\lambda}_k) &= \sum_{m=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{m,k}) Q_{L,m}(\tilde{\lambda}_k) + \sin(\tilde{\psi}_{m,k}) I_{L,m}(\tilde{\lambda}_k).
\end{aligned} \tag{2.237}$$

Выражение (2.236) задает дискриминатор задержки дальномерного кода сигнала (фазы дальномерного кода). Сумма компонент, находящихся на главной диагонали ( $a = b$ ) (2.234), задает сумму  $M$  классических дискриминаторов задержки в соответствующих  $M$  точках:

$$u_{\tau, \text{main}}(\tau_k - \tilde{\tau}_k) = \frac{\Upsilon}{\Delta\tau} \sum_{m=1}^M \left( I_{m,k} (I_{E,m,k} - I_{L,m,k}) + Q_{m,k} (Q_{E,m,k} - Q_{L,m,k}) \right). \tag{2.238}$$

Дискриминатор (2.238) не использует всей апостериорной информации, но может быть использован с целью уменьшения вычислительной нагрузки и получения независимости ССЧ от ССРФ.

## П.2.15 Расчет дискриминационной характеристики ДЗ

Найдем статистические характеристики величин

$$(\tilde{I}_{E,m,k} - \tilde{I}_{L,m,k}), (\tilde{Q}_{E,m,k} - \tilde{Q}_{L,m,k})$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{I}_{E,m,k} - \tilde{I}_{L,m,k}) &= \sum_{l=1}^L A_k \cdot G_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,l} - \tau_{m,k}) \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k) + \phi_k) \times \\
&\times (G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k} - \Delta\tau) - G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k} + \Delta\tau)) \cos(\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)) + \\
&+ \sum_{l=1}^L n_{m,k,l} (G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k} - \Delta\tau) - G_c(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k} + \Delta\tau)) \cos(\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)) = \bar{I}_{EL,m,k} + n_{IEL}.
\end{aligned} \tag{2.239}$$

$$\begin{aligned}
\bar{I}_{EL,m,k} &\stackrel{df}{=} \sum_{l=1}^L A_k \cdot G_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,l} - \tau_{m,k}) \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k) + \phi_k) \times \\
&\times (G_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k} - \Delta\tau) - G_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k} + \Delta\tau)) \cos(\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)) = \\
&= A_{IQ,k} (\rho(\delta\tau_{m,k} - \Delta\tau) - \rho(\delta\tau_{m,k} + \Delta\tau)) \times \text{sinc}(\alpha_{m,k}) \times \cos(\phi_{m,k} + \alpha_{m,k}).
\end{aligned} \tag{2.240}$$

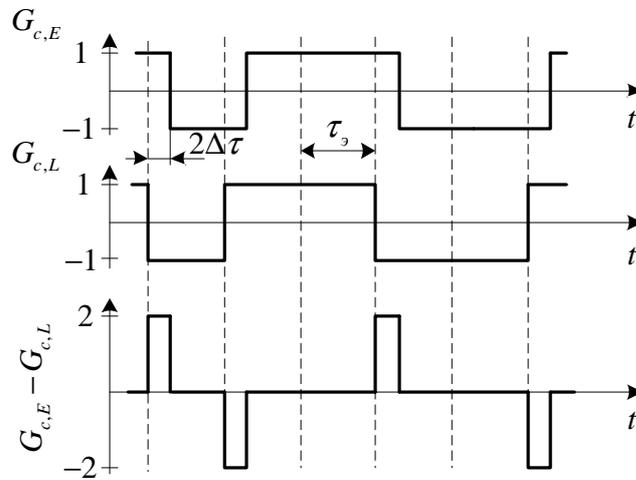


Рисунок 3. Образование функции  $G_{c,m}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k - \Delta\tau) - G_{c,m}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k + \Delta\tau)$

Случайная составляющая разности синфазных компонент (на рисунке 3 проиллюстрировано образование функции  $G_{c,m}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k - \Delta\tau) - G_{c,m}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_k + \Delta\tau)$ ):

$$n_{IEL} \stackrel{df}{=} \sum_{l=1}^L n_{m,k,l} (G_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k} - \Delta\tau) - G_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k} + \Delta\tau)) \cos(\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)). \tag{2.241}$$

Её дисперсия

$$\begin{aligned}
\sigma_{EL,k}^2 &= \sigma_{n,k}^2 \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L (G_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k} - \Delta\tau) - G_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k} + \Delta\tau))^2 = \\
&= \sigma_{n,k}^2 \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L G_{\ddot{a}\ddot{e}}^2(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k} - \Delta\tau) - 2G_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k} - \Delta\tau)G_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k} + \Delta\tau) + \\
&\quad + G_{\ddot{a}\ddot{e}}^2(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k} + \Delta\tau) = \sigma_{n,k}^2 L(1 - \rho(2\Delta\tau)).
\end{aligned} \tag{2.242}$$

Аналогично для  $(\tilde{Q}_{E,m,k} - \tilde{Q}_{L,m,k})$  дисперсия описывается выражением (2.242)

, а математическое ожидание

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{EL,m,k} &\stackrel{df}{=} \sum_{l=1}^L A_k \cdot G_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,l} - \tau_{m,k}) \cos(\Phi_{m,k,l}(\lambda_k) + \phi_k) \times \\ &\times (G_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k} - \Delta\tau) - G_{\ddot{a}\ddot{e}}(t_{k,l} - \tilde{\tau}_{m,k} + \Delta\tau)) \sin(\Phi_{m,k,l}(\tilde{\lambda}_k)) = \\ &= -A_{IQ,k} (\rho(\delta\tau_{m,k} - \Delta\tau) - \rho(\delta\tau_{m,k} + \Delta\tau)) \times \text{sinc}(\alpha_{m,k}) \times \sin(\phi_{m,k} + \alpha_{m,k}). \end{aligned} \quad (2.243)$$

Справедливо тождество

$$\begin{aligned} (I_{E,m,k}(\tilde{\lambda}_k) - I_{L,m,k}(\tilde{\lambda}_k)) &= \bar{I}_{EL,m,k}(\tilde{\lambda}_k) + n_{IEL,m,k}; \\ (Q_{E,m,k}(\tilde{\lambda}_k) - Q_{L,m,k}(\tilde{\lambda}_k)) &= \bar{Q}_{EL,m,k}(\tilde{\lambda}_k) + n_{QEL,m,k}, \end{aligned} \quad (2.244)$$

где  $n_{IEL,k}$ ,  $n_{QEL,k}$  - независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией (2.242).

В соответствии со схемой дискриминатора находим разность

$$\begin{aligned} &(I_{E,j}(\tilde{\lambda}_k) - I_{L,j}(\tilde{\lambda}_k))H_1 - (Q_{E,j}(\tilde{\lambda}_k) - Q_{L,j}(\tilde{\lambda}_k))H_2 = \\ &= (\bar{I}_{EL,j,k} \cdot \bar{H}_{1,k} + \bar{H}_{1,k}n_{IEL,j,k} + \bar{I}_{EL,j,k}n_{H1,k} + n_{IEL,j,k}n_{H1,k}) - \\ &\quad - (\bar{Q}_{EL,j,k} \cdot \bar{H}_{2,k} + \bar{H}_{2,k}n_{QEL,j,k} + \bar{Q}_{EL,j,k}n_{H2,k} + n_{QEL,j,k}n_{H2,k}) = \\ &= \bar{I}_{EL,j,k} \cdot \bar{H}_{1,k} - \bar{Q}_{EL,j,k} \cdot \bar{H}_{2,k} + \bar{I}_{EL,j,k}n_{H1,k} - \bar{Q}_{EL,j,k}n_{H2,k} + \\ &\quad + \bar{H}_{1,k}n_{IEL,j,k} - \bar{H}_{2,k}n_{QEL,j,k} + n_{IEL,j,k}n_{H1,k} - n_{QEL,j,k}n_{H2,k}. \end{aligned} \quad (2.245)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} &(Q_{E,j}(\tilde{\lambda}_k) - Q_{L,j}(\tilde{\lambda}_k))H_1 + (I_{E,j}(\tilde{\lambda}_k) - I_{L,j}(\tilde{\lambda}_k))H_2 = \\ &= \bar{I}_{EL,j,k} \cdot \bar{H}_{2,k} + \bar{Q}_{EL,j,k} \cdot \bar{H}_{1,k} + \bar{I}_{EL,j,k}n_{H2,k} + \bar{Q}_{EL,j,k}n_{H1,k} + \\ &\quad + \bar{H}_{1,k}n_{QEL,j,k} + \bar{H}_{2,k}n_{IEL,j,k} + n_{IEL,j,k}n_{H2,k} + n_{QEL,j,k}n_{H1,k}. \end{aligned} \quad (2.246)$$

Найдем математическое ожидание величины

$$\begin{aligned}
& E \left[ \frac{u_\tau(\tilde{\tau}_k) \Delta \tau}{Y} \right] = \\
& = E \left[ \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \times \left( \tilde{I}_{a,k} (\tilde{I}_{E,b,k} - \tilde{I}_{L,b,k}) + \tilde{Q}_{a,k} (\tilde{Q}_{E,b,k} - \tilde{Q}_{L,b,k}) \right) + \right. \\
& + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\tilde{\psi}_{a,k}) \cos(\tilde{\psi}_{b,k}) \times \\
& \times \left. \left( \tilde{I}_{a,k} (\tilde{Q}_{E,b,k} - \tilde{Q}_{L,b,k}) + (\tilde{I}_{E,a,k} - \tilde{I}_{L,a,k}) \tilde{Q}_{b,k} - (\tilde{Q}_{E,a,k} - \tilde{Q}_{L,a,k}) \tilde{I}_{b,k} - \tilde{Q}_{a,k} (\tilde{I}_{E,b,k} - \tilde{I}_{L,b,k}) \right) \right] = \\
& = E \left[ \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \cos(\tilde{\psi}_{b,k} - \tilde{\psi}_{a,k}) \times \right. \\
& \times \left( \bar{I}_{a,k} \bar{I}_{EL,b,k} + \bar{I}_{a,k} n_{IEL,b,k} + \bar{I}_{EL,b,k} n_{I,a,k} + n_{I,a,k} n_{IEL,b,k} \right. \\
& \quad \left. + \bar{Q}_{a,k} \bar{Q}_{EL,b,k} + \bar{Q}_{a,k} n_{QEL,b,k} + \bar{Q}_{EL,b,k} n_{Q,a,k} + n_{Q,a,k} n_{QEL,b,k} \right) + \\
& + \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \sin(\tilde{\psi}_{a,k}) \cos(\tilde{\psi}_{b,k}) \times \\
& \times \left( \bar{I}_{a,k} \bar{Q}_{EL,b,k} + \bar{I}_{a,k} n_{QEL,b,k} + \bar{Q}_{EL,b,k} n_{I,a,k} + n_{I,a,k} n_{QEL,b,k} + \right. \\
& \quad + \bar{Q}_{b,k} \bar{I}_{EL,a,k} + \bar{Q}_{b,k} n_{IEL,a,k} + \bar{I}_{EL,a,k} n_{Q,b,k} + n_{Q,b,k} n_{IEL,a,k} - \\
& \quad - \bar{I}_{b,k} \bar{Q}_{EL,a,k} - \bar{I}_{b,k} n_{QEL,a,k} - \bar{Q}_{EL,a,k} n_{I,b,k} - n_{I,b,k} n_{QEL,a,k} - \\
& \quad \left. \left. - \bar{Q}_{a,k} \bar{I}_{EL,b,k} - \bar{Q}_{a,k} n_{IEL,b,k} - \bar{I}_{EL,b,k} n_{Q,a,k} - n_{Q,a,k} n_{IEL,b,k} \right) \right]. \tag{2.247}
\end{aligned}$$

Найдем недостающие математические ожидания величин

$$\begin{aligned}
& E \left[ n_{Q,m,k} n_{QEL,m,k} \right] = E \left[ \sum_{a=1}^L \sum_{b=1}^L n_{m,k,a} n_{m,k,b} G_{\tilde{a}\tilde{e}}(t_{k,a} - \tilde{\tau}_{m,k}) \times \right. \\
& \times \left. \left( G_{\tilde{a}\tilde{e}}(t_{k,b} - \tilde{\tau}_{m,k} - \Delta \tau) - G_{\tilde{a}\tilde{e}}(t_{k,b} - \tilde{\tau}_{m,k} + \Delta \tau) \right) \sin(\Phi_{m,k,a}(\tilde{\lambda}_k)) \sin(\Phi_{m,k,b}(\tilde{\lambda}_k)) \right] = \tag{2.248} \\
& = (\rho(\Delta \tau) - \rho(-\Delta \tau)) \sigma_n^2 \frac{L^{\rho(\Delta \tau) = \rho(-\Delta \tau)}}{2} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E \left[ n_{I,m,k} n_{IEL,m,k} \right] = E \left[ \sum_{a=1}^L \sum_{b=1}^L n_{m,k,a} n_{m,k,b} G_{\tilde{a}\tilde{e}}(t_{k,a} - \tilde{\tau}_{m,k}) \times \right. \\
& \times \left. \left( G_{\tilde{a}\tilde{e}}(t_{k,b} - \tilde{\tau}_{m,k} - \Delta \tau) - G_{\tilde{a}\tilde{e}}(t_{k,b} - \tilde{\tau}_{m,k} + \Delta \tau) \right) \cos(\Phi_{m,k,a}(\tilde{\lambda}_k)) \cos(\Phi_{m,k,b}(\tilde{\lambda}_k)) \right] = \tag{2.249} \\
& = (\rho(\Delta \tau) - \rho(-\Delta \tau)) \sigma_n^2 \frac{L^{\rho(\Delta \tau) = \rho(-\Delta \tau)}}{2} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E \left[ n_{Q,m,k} n_{IEL,m,k} \right] = E \left[ \sum_{a=1}^L \sum_{b=1}^L n_{m,k,a} n_{m,k,b} G_{\tilde{a}\tilde{e}}(t_{k,a} - \tilde{\tau}_{m,k}) \times \right. \\
& \times \left. \left( G_{\tilde{a}\tilde{e}}(t_{k,b} - \tilde{\tau}_{m,k} - \Delta \tau) - G_{\tilde{a}\tilde{e}}(t_{k,b} - \tilde{\tau}_{m,k} + \Delta \tau) \right) \sin(\Phi_{m,k,a}(\tilde{\lambda}_k)) \cos(\Phi_{m,k,b}(\tilde{\lambda}_k)) \right] \approx 0; \tag{2.250}
\end{aligned}$$

$$E[n_{I,m,k}n_{QEL,m,k}] = E\left[\sum_{a=1}^L\sum_{b=1}^Ln_{m,k,a}n_{m,k,b}G_{\ddot{u}\ddot{e}}(t_{k,a}-\tilde{\tau}_{m,k})\times\right. \\ \left.\times(G_{\ddot{u}\ddot{e}}(t_{k,b}-\tilde{\tau}_{m,k}-\Delta\tau)-G_{\ddot{u}\ddot{e}}(t_{k,b}-\tilde{\tau}_{m,k}+\Delta\tau))\cos(\Phi_{m,k,a}(\tilde{\lambda}_k))\sin(\Phi_{m,k,b}(\tilde{\lambda}_k))\right] \approx 0. \quad (2.251)$$

Откуда следует

$$E[n_{H1,k}n_{QEL,m,k}] = E[n_{H1,k}n_{IEL,m,k}] = E[n_{H2,k}n_{QEL,m,k}] = E[n_{H2,k}n_{IEL,m,k}] = 0. \quad (2.252)$$

С учетом рассчитанных математических ожиданий входящих в него величин, выражение (2.247) преобразуется к виду

$$E\left[\frac{u_\tau(\tilde{\tau}_k)\Delta\tau}{Y}\right] = \sum_{a=1}^M\sum_{b=1}^M\cos(\tilde{\psi}_{b,k}-\tilde{\psi}_{a,k})\times(\bar{I}_{a,k}\bar{I}_{EL,b,k}+\bar{Q}_{a,k}\bar{Q}_{EL,b,k})+ \\ +\sum_{a=1}^M\sum_{b=1}^M\sin(\tilde{\psi}_{a,k})\cos(\tilde{\psi}_{b,k})\times(\bar{I}_{a,k}\bar{Q}_{EL,b,k}+\bar{Q}_{b,k}\bar{I}_{EL,a,k}-\bar{I}_{b,k}\bar{Q}_{EL,a,k}-\bar{Q}_{a,k}\bar{I}_{EL,b,k})= \\ =\sum_{a=1}^M\sum_{b=1}^M\cos(\tilde{\psi}_{b,k}-\tilde{\psi}_{a,k})\times \\ \times A_{IQ,k}^2\rho(\delta\tau_k)(\rho(\delta\tau_k-\Delta\tau)-\rho(\delta\tau_k+\Delta\tau))\text{sinc}(\alpha_{a,k})\text{sinc}(\alpha_{b,k})\times \\ \times\left[\cos(\phi_{a,k}+\alpha_{a,k})\cos(\phi_{b,k}+\alpha_{b,k})+\sin(\phi_{a,k}+\alpha_{a,k})\sin(\phi_{b,k}+\alpha_{b,k})\right]+ \\ +\sum_{a=1}^M\sum_{b=1}^M\sin(\tilde{\psi}_{a,k})\cos(\tilde{\psi}_{b,k})\times A_{IQ,k}^2\text{sinc}(\alpha_{a,k})\text{sinc}(\alpha_{b,k})\times \\ \times\left\{\rho(\delta\tau_k)(\rho(\delta\tau_k-\Delta\tau)-\rho(\delta\tau_k+\Delta\tau))+\right. \\ \left.+\rho(\delta\tau_k)(\rho(\delta\tau_k-\Delta\tau)-\rho(\delta\tau_k+\Delta\tau))\right\}\times \\ \times\left[\sin(\phi_{a,k}+\alpha_{a,k})\cos(\phi_{b,k}+\alpha_{b,k})-\cos(\phi_{a,k}+\alpha_{a,k})\sin(\phi_{b,k}+\alpha_{b,k})\right]= \\ =\sum_{a=1}^M\sum_{b=a}^M\left(1-\frac{1}{2}\delta_{a,b}\right)\cos(\tilde{\psi}_{b,k}-\tilde{\psi}_{a,k})\times A_{IQ,k}^2\text{sinc}(\alpha_{a,k})\text{sinc}(\alpha_{b,k})\times \\ \times\left\{\rho(\delta\tau_k)(\rho(\delta\tau_k-\Delta\tau)-\rho(\delta\tau_k+\Delta\tau))+\rho(\delta\tau_k)(\rho(\delta\tau_k-\Delta\tau)-\rho(\delta\tau_k+\Delta\tau))\right\}\times \\ \times\cos(\psi_{b,k}-\psi_{a,k}+\alpha_{b,k}-\alpha_{a,k})+ \\ +\sum_{a=1}^M\sum_{b=a}^M\left(1-\frac{1}{2}\delta_{a,b}\right)\sin(\tilde{\psi}_{b,k}-\tilde{\psi}_{a,k})\times A_{IQ,k}^2\text{sinc}(\alpha_{a,k})\text{sinc}(\alpha_{b,k})\times \\ \times\left\{\rho(\delta\tau_k)(\rho(\delta\tau_k-\Delta\tau)-\rho(\delta\tau_k+\Delta\tau))+\rho(\delta\tau_k)(\rho(\delta\tau_k-\Delta\tau)-\rho(\delta\tau_k+\Delta\tau))\right\}\times \\ \times\sin(\psi_{b,k}-\psi_{a,k}+\alpha_{b,k}-\alpha_{a,k})=$$

$$= \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{a,b}\right) \cos(\delta\psi_{b,k} - \delta\psi_{a,k} + \alpha_{b,k} - \alpha_{a,k}) \times A_{IQ,k}^2 \operatorname{sinc}(\alpha_{a,k}) \operatorname{sinc}(\alpha_{b,k}) \times (2.253)$$

$$\times 2\rho(\delta\tau_k) \left(\rho(\delta\tau_k - \Delta\tau) - \rho(\delta\tau_k + \Delta\tau)\right).$$

Тогда выражение для дискриминационной характеристики синтезированного ДЗ

$$E[u_\tau(\tilde{\tau}_k)] =$$

$$= \frac{\tilde{\Upsilon}}{\Delta\tau} \sum_{a=1}^M \sum_{b=a}^M \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{a,b}\right) \cos(\delta\psi_{b,k} - \delta\psi_{a,k} + \alpha_{b,k} - \alpha_{a,k}) \times A_{IQ,k}^2 \operatorname{sinc}(\alpha_{a,k}) \operatorname{sinc}(\alpha_{b,k}) \times (2.254)$$

$$\times 2\rho(\delta\tau_k) \left(\rho(\delta\tau_k - \Delta\tau) - \rho(\delta\tau_k + \Delta\tau)\right).$$

Для упрощения формулы рассмотрим срез  $\forall a, b \in \{1..M\}: \delta\omega_{\psi,a} = \delta\omega_{\psi,b}; \delta\varepsilon_{\psi,a} = \delta\varepsilon_{\psi,b}; \delta\psi_{a,k} = \delta\psi_{b,k}$  (в частности равны нулю)  $\rightarrow \alpha_{a,k} = \alpha_{b,k} = \alpha_k:$

$$E[u_\tau(\tilde{\tau}_k)] \Big|_{\delta\omega_{\psi,a}=\delta\omega_{\psi,b}; \delta\varepsilon_{\psi,a}=\delta\varepsilon_{\psi,b};} =$$

$$= \frac{\tilde{\Upsilon}}{\Delta\tau} A_{IQ,k}^2 \operatorname{sinc}^2(\alpha_k) \times \rho(\delta\tau_k) \left(\rho(\delta\tau_k - \Delta\tau) - \rho(\delta\tau_k + \Delta\tau)\right) \times M^2. (2.255)$$

Выражение (2.255) описывает дискриминационную характеристику ДЗ

Крутизна дискриминационной характеристики (2.255)

$$S_\tau = \frac{E[u_\tau(\delta\tau_k)]}{\delta\tau_k} \Big|_{\substack{\delta\omega_{\psi,a}=\delta\omega_{\psi,b}=0; \delta\varepsilon_{\psi,a}=\delta\varepsilon_{\psi,b}=0; \\ \delta\omega_i=0; \delta\varepsilon_i=0}} =$$

$$= \frac{\tilde{\Upsilon}}{\Delta\tau} A_{IQ,k}^2 \frac{\partial \left(\rho(\delta\tau_{j,k} - \Delta\tau) - \rho(\delta\tau_{j,k} + \Delta\tau)\right)}{\partial \delta\tau_{j,k}} \left(M(M-1) + M\right) \stackrel{\tilde{N} \tilde{M} \tilde{N}}{=} \frac{\tilde{\Upsilon}}{\Delta\tau} A_{IQ,k}^2 \frac{2}{\tau_y} M^2, (2.256)$$

где  $\tau_y$  - длительность чипа ПСП дальномерного кода сигнала целевой СРНС.

## П.2.16 Расчет флуктуационной характеристики ДЗ

Для получения ФХ ДЗ предварительно найдем математическое ожидание

$$M \left[ \Gamma_j - M [\Gamma_j]^2 \right] = M \left[ \sin(\tilde{\psi}_{j,k}) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \bar{I}_{EL,j,k} n_{H1,k} - \bar{Q}_{EL,j,k} n_{H2,k} + \bar{H}_{1,k} n_{IEL,j,k} - \bar{H}_{2,k} n_{QEL,j,k} + n_{IEL,j,k} n_{H1,k} - n_{QEL,j,k} n_{H2,k} \right\} + \\
& + \cos(\tilde{\psi}_{j,k}) \times \\
& \times \left\{ \bar{I}_{EL,j,k} n_{H2,k} + \bar{Q}_{EL,j,k} n_{H1,k} + \bar{H}_{1,k} n_{QEL,j,k} + \bar{H}_{2,k} n_{IEL,j,k} + n_{IEL,j,k} n_{H2,k} + n_{QEL,j,k} n_{H1,k} \right\}^2 = \\
& = E \left[ \sin^2(\tilde{\psi}_{j,k}) \times \right. \\
& \times \left\{ \bar{I}_{EL,j,k} n_{H1,k} - \bar{Q}_{EL,j,k} n_{H2,k} + \bar{H}_{1,k} n_{IEL,j,k} - \bar{H}_{2,k} n_{QEL,j,k} + n_{IEL,j,k} n_{H1,k} - n_{QEL,j,k} n_{H2,k} \right\}^2 + \\
& + 2 \sin(\tilde{\psi}_{j,k}) \cos(\tilde{\psi}_{j,k}) \times \\
& \times \left\{ \bar{I}_{EL,j,k} n_{H1,k} - \bar{Q}_{EL,j,k} n_{H2,k} + \bar{H}_{1,k} n_{IEL,j,k} - \bar{H}_{2,k} n_{QEL,j,k} + n_{IEL,j,k} n_{H1,k} - n_{QEL,j,k} n_{H2,k} \right\} \times \\
& \times \left\{ \bar{I}_{EL,j,k} n_{H2,k} + \bar{Q}_{EL,j,k} n_{H1,k} + \bar{H}_{1,k} n_{QEL,j,k} + \bar{H}_{2,k} n_{IEL,j,k} + n_{IEL,j,k} n_{H2,k} + n_{QEL,j,k} n_{H1,k} \right\} + \\
& + \cos^2(\tilde{\psi}_{j,k}) \times \\
& \left. \times \left\{ \bar{I}_{EL,j,k} n_{H2,k} + \bar{Q}_{EL,j,k} n_{H1,k} + \bar{H}_{1,k} n_{QEL,j,k} + \bar{H}_{2,k} n_{IEL,j,k} + n_{IEL,j,k} n_{H2,k} + n_{QEL,j,k} n_{H1,k} \right\}^2 \right], \quad (2.257)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Gamma_j &= \frac{2\tilde{\Upsilon}}{2\Delta\tau} \times \\
& \times \left\{ \cos(\tilde{\psi}_{j,k}) \times \left[ \left( Q_{E,j}(\tilde{\lambda}_k) - Q_{L,j}(\tilde{\lambda}_k) \right) H_1 + \left( I_{E,j}(\tilde{\lambda}_k) - I_{L,j}(\tilde{\lambda}_k) \right) H_2 \right] \right. \\
& \left. + \sin(\tilde{\psi}_{j,k}) \times \left[ \left( I_{E,j}(\tilde{\lambda}_k) - I_{L,j}(\tilde{\lambda}_k) \right) H_1 - \left( Q_{E,j}(\tilde{\lambda}_k) - Q_{L,j}(\tilde{\lambda}_k) \right) H_2 \right] \right\}. \quad (2.258)
\end{aligned}$$

Рассмотрим компоненты по отдельности

$$\begin{aligned}
M \left[ \bar{I}_{EL,j,k} n_{H1,k} - \bar{Q}_{EL,j,k} n_{H2,k} + \bar{H}_{1,k} n_{IEL,j,k} - \bar{H}_{2,k} n_{QEL,j,k} + n_{IEL,j,k} n_{H1,k} - n_{QEL,j,k} n_{H2,k} \right]^2 &= \\
= \bar{I}_{EL,j,k}^2 \sigma_{H,k}^2 + \bar{Q}_{EL,j,k}^2 \sigma_{H,k}^2 + \bar{H}_{1,k}^2 \sigma_{EL,k}^2 + \bar{H}_{2,k}^2 \sigma_{EL,k}^2 + 2\sigma_{EL,k}^2 \sigma_{H,k}^2. \quad (2.259)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M \left[ \left\{ \bar{I}_{EL,j,k} n_{H1,k} - \bar{Q}_{EL,j,k} n_{H2,k} + \bar{H}_{1,k} n_{IEL,j,k} - \bar{H}_{2,k} n_{QEL,j,k} + n_{IEL,j,k} n_{H1,k} - n_{QEL,j,k} n_{H2,k} \right\} \times \right. \\
\left. \times \left\{ \bar{I}_{EL,j,k} n_{H2,k} + \bar{Q}_{EL,j,k} n_{H1,k} + \bar{H}_{1,k} n_{QEL,j,k} + \bar{H}_{2,k} n_{IEL,j,k} + n_{IEL,j,k} n_{H2,k} + n_{QEL,j,k} n_{H1,k} \right\} \right] &= \\
= \bar{I}_{EL,j,k} \bar{Q}_{EL,j,k} \sigma_{H,k}^2 - \bar{Q}_{EL,j,k} \bar{I}_{EL,j,k} \sigma_{H,k}^2 + \bar{H}_{1,k} \bar{H}_{2,k} \sigma_{EL,k}^2 - \bar{H}_{1,k} \bar{H}_{2,k} \sigma_{EL,k}^2 = 0. \quad (2.260)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M \left[ \bar{I}_{EL,j,k} n_{H2,k} + \bar{Q}_{EL,j,k} n_{H1,k} + \bar{H}_{1,k} n_{QEL,j,k} + \bar{H}_{2,k} n_{IEL,j,k} + n_{IEL,j,k} n_{H2,k} + n_{QEL,j,k} n_{H1,k} \right]^2 &= \\
= \bar{I}_{EL,j,k}^2 \sigma_{H,k}^2 + \bar{Q}_{EL,j,k}^2 \sigma_{H,k}^2 + \bar{H}_{1,k}^2 \sigma_{EL,k}^2 + \bar{H}_{2,k}^2 \sigma_{EL,k}^2 + 2\sigma_{H,k}^2 \sigma_{EL,k}^2. \quad (2.261)
\end{aligned}$$

С учетом (2.259), (2.260), (2.261) выражение (2.257) принимает вид

$$M \left[ \Gamma_j - M \left[ \Gamma_j \right]^2 \right] = \bar{I}_{EL,j,k}^2 \sigma_{H,k}^2 + \bar{Q}_{EL,j,k}^2 \sigma_{H,k}^2 + \bar{H}_{1,k}^2 \sigma_{EL,k}^2 + \bar{H}_{2,k}^2 \sigma_{EL,k}^2 + 2\sigma_{H,k}^2 \sigma_{EL,k}^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma_{H,k}^2 A_{IQ,k}^2 \left( \rho(\delta\tau_{j,k} - \Delta\tau) - \rho(\delta\tau_{j,k} + \Delta\tau) \right)^2 \text{sinc}^2(\alpha_k) + \\
&+ \sigma_{EL,k}^2 A_{IQ,k}^2 \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \text{sinc}(\alpha_{a,k}) \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \times \\
&\times \left\{ \cos(\varphi_0 + \pi\theta_{i\bar{n},k} + \alpha_{a,k} + \delta\psi_{a,k}) \cos(\varphi_0 + \pi\theta_{i\bar{n},k} + \alpha_{b,k} + \delta\psi_{b,k}) + \right. \\
&\left. + \sin(\varphi_0 + \pi\theta_{i\bar{n},k} + \alpha_{a,k} + \delta\psi_{a,k}) \sin(\varphi_0 + \pi\theta_{i\bar{n},k} + \alpha_{b,k} + \delta\psi_{b,k}) \right\} + 2\sigma_{H,k}^2 \sigma_{EL,k}^2 = \\
&= \sigma_{H,k}^2 A_{IQ,k}^2 \left( \rho(\delta\tau_{j,k} - \Delta\tau) - \rho(\delta\tau_{j,k} + \Delta\tau) \right)^2 \text{sinc}^2(\alpha_k) + \\
&\quad + \sigma_{EL,k}^2 A_{IQ,k}^2 \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^M \rho(\delta\tau_{a,k}) \rho(\delta\tau_{b,k}) \text{sinc}(\alpha_{a,k}) \text{sinc}(\alpha_{b,k}) \times \\
&\quad \times \cos(\delta\psi_{a,k} - \delta\psi_{b,k} + \alpha_{a,k} - \alpha_{b,k}) + 2\sigma_{H,k}^2 \sigma_{EL,k}^2. \tag{2.262}
\end{aligned}$$

Из выражения для ДЗ следует тождество

$$u_\tau(\tilde{\tau}_k) = \sum_{j=1}^M \Gamma_j, \tag{2.263}$$

причем

$$\forall i \neq j: E[\Gamma_j \Gamma_i] = 0 \tag{2.264}$$

ввиду независимости величин  $\forall i \neq j: \{I_{E,i} - I_{L,i}, Q_{E,i} - Q_{L,i}, I_{E,j} - I_{L,j}, Q_{E,j} - Q_{L,j}\}$ .

Тогда выходная ФХ ДЗ есть сумма дисперсий  $\Gamma_j$  (2.262), что, ввиду их независимости, в точке истинных значений есть

$$\begin{aligned}
&M \left[ \left( u_\tau(\tilde{\tau}_k) - M[u_\tau(\tilde{\tau}_k)] \right)^2 \right] \Bigg|_{\substack{\delta\psi'_a = \delta\psi'_b = 0; \\ \delta\omega_k = 0; \delta\tau_k = 0 \\ \delta\psi_a = \delta\psi_b = \delta\psi_k;}} = \\
&= D_{\eta_\tau}(0) = \left( \frac{\tilde{\Upsilon}}{\Delta\tau} \right)^2 2\sigma_{IQ,k}^2 (1 - \rho(2\Delta\tau)) A_{IQ,k}^2 M^3 \left( 1 + \frac{2\sigma_{IQ,k}^2}{A_{IQ,k}^2 M} \right). \tag{2.265}
\end{aligned}$$

Для получения входной ФХ поделим результат на квадрат крутизны дискриминационной характеристики

$$D_{\tilde{\eta}_\tau}(0) = \frac{\left( \frac{2\Upsilon}{2\Delta\tau} \right)^2 2\sigma_{IQ,k}^2 (1 - \rho(2\Delta\tau)) A_{IQ,k}^2 M^3 \left( 1 + \frac{2\sigma_{IQ,k}^2}{A_{IQ,k}^2 M} \right) \Delta\tau\tau_y \left( 1 + \frac{1}{qM} \right)}{\left( \frac{2\tilde{\Upsilon}}{2\Delta\tau} A_{IQ,k}^2 \frac{2}{\tau_y} M^2 \right)^2} = \frac{\Delta\tau\tau_y \left( 1 + \frac{1}{qM} \right)}{2qM}. \tag{2.266}$$

Выражение (2.266) описывает входную ФХ синтезированного ДЗ – дисперсию отсчетов дискриминатора, приведенных к оцениваемому параметру задержки.

## П.2.17 Коэффициенты следящих систем при использовании эквивалентных наблюдений дискриминаторов

Выражения для коэффициента фильтра первого порядка ССЗ определяются тривиально, выкладки даны в тексте основной книги диссертации. Получим выражения для коэффициентов ССЧ и ССРФ.

*Коэффициенты ССЧ (системы второго порядка)*

При рассмотрении ССЧ выражение для матрицы, обратной ковариационной:

$$\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})} \begin{vmatrix} (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{22} + D_{\eta\omega}^{-1} \det(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k}) & -(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{21} \\ -(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{21} & (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{11} \end{vmatrix}, \quad (2.267)$$

откуда

$$\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k} = D_{\eta\omega} \frac{1}{(D_{\eta\omega} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{11})} \begin{vmatrix} (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{11} & (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{21} \\ (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{21} & (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{22} + D_{\eta\omega}^{-1} \det(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k}) \end{vmatrix}. \quad (2.268)$$

Тогда искомые элементы ковариационной матрицы определяются выражением

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{11} &= D_{\eta\omega} \frac{(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{11}}{D_{\eta\omega} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{11}}, \\ (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{21} &= D_{\eta\omega} \frac{(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{21}}{D_{\eta\omega} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{11}}. \end{aligned} \quad (2.269)$$

Необходимо определить недостающие элементы ковариационной экстраполяционной матрицы. Для начала преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\omega \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1} &= \begin{vmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{11} & (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} \\ (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} & (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{11} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} T & (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} T \\ (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} & (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.270)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\omega \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1} \mathbf{F}_\omega^T &= \begin{vmatrix} (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{11} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} T & (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} T \\ (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} & (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{11} + 2(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} T + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} T^2 & (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} T \\ (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} T & (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.271)$$

Тогда экстраполяционная ковариационная матрица ССЧ:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k} &= \mathbf{F}_\omega \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1} \mathbf{F}_\omega^T + \mathbf{G}_\omega D_{\xi\omega} \mathbf{G}_\omega^T = \\ &= \begin{vmatrix} (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{11} + 2(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} T + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} T^2 & (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} T \\ (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} T & (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} + D_{\xi\omega} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.272)$$

Итоговое выражение для коэффициентов ССЧ принимает вид:

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{K}}_{\omega, k})_1 &= (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{11} = D_{\bar{\eta}\omega} \frac{(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{11} + 2(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} T + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} T^2}{D_{\bar{\eta}\omega} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{11} + 2(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} T + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} T^2}, \\ (\dot{\mathbf{K}}_{\omega, k})_2 &= (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{21} = D_{\bar{\eta}\omega} \frac{(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} T}{D_{\bar{\eta}\omega} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{11} + 2(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} T + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} T^2}, \end{aligned} \quad (2.273)$$

где

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{22} &= \frac{D_{\bar{\eta}\omega} (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{22} + \det(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})}{(D_{\bar{\eta}\omega} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k})_{11})} = \\ &= \frac{A}{D_{\bar{\eta}\omega} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{11} + 2(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} T + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} T^2}, \\ A &= D_{\bar{\eta}\omega} \left( (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} + D_{\xi\omega} \right) + \\ &+ \left( (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{11} + 2(\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} T + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} T^2 \right) \left( (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} + D_{\xi\omega} \right) - \\ &- \left( (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{21} + (\mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\omega, k-1})_{22} T \right)^2. \end{aligned} \quad (2.274)$$

Коэффициенты ССРФ (системы третьего порядка)

Обратная ковариационная матрица:

$$\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})} \begin{vmatrix} A + D_{\hat{\eta}\psi}^{-1} \det(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k}) & B & C \\ B & E & F \\ C & F & K \end{vmatrix}, \quad (2.275)$$

где

$$\begin{aligned} A &= (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{22} (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{33} - (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{32}^2, \\ B &= (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{32} (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{31} - (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{21} (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{33}, \\ C &= (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{21} (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{32} - (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{22} (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{31}, \end{aligned} \quad (2.276)$$

$$\begin{aligned} E &= (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{11} (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{33} - (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{31}^2, \\ F &= (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{31} (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{21} - (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{11} (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{32}, \\ K &= (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{11} (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{22} - (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{21}^2, \end{aligned} \quad (2.277)$$

а детерминант

$$\det(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k}) = (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{11} A + (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{21} B + (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{31} C. \quad (2.278)$$

Преобразуем выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\psi \mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1} &= \begin{vmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & T \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{11} & (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{21} & (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{31} \\ (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{21} & (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{22} & (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{32} \\ (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{31} & (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{32} & (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{33} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{11} + (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{21} T & (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{21} + (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{22} T & (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{31} + (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{32} T \\ (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{21} + (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{31} T & (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{22} + (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{32} T & (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{32} + (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{33} T \\ (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{31} & (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{32} & (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.279)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{11} &= (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{11} + 2(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{21} T + (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{22} T^2, \\
(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{21} &= (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{21} + (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{31} T + (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{22} T + (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{32} T, \\
(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{31} &= (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{31} + (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{32} T, \\
(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{22} &= (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{22} + 2(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{32} T + (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{33} T^2, \\
(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{32} &= (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{32} + (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{33} T, \\
(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{33} &= (\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k-1})_{33} + D_{\xi\psi}.
\end{aligned} \tag{2.280}$$

Прямая ковариационная матрица

$$\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k} = \det(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k}) \frac{1}{\det(\det(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k}) \mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k}^{-1})} \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & k \end{vmatrix}, \tag{2.281}$$

где

$$\begin{aligned}
a &= EK - F^2, \\
b &= CF - BK, \\
c &= BF - CE, \\
e &= (A + D_{\hat{\eta}\psi}^{-1} \det(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})) K - C^2, \\
f &= CB - (A + D_{\hat{\eta}\psi}^{-1} \det(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})) F, \\
k &= (A + D_{\hat{\eta}\psi}^{-1} \det(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})) E - B^2,
\end{aligned} \tag{2.282}$$

знаменатель

$$\begin{aligned}
&\det(\det(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k}) \mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k}^{-1}) = \\
&= (A + D_{\hat{\eta}\psi}^{-1} \det(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})) (EK - F^2) + B(CF - BK) + C(BF - CE).
\end{aligned} \tag{2.283}$$

Тогда элементы ковариационной матрицы

$$(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{11} = \frac{\det(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k}) (EK - F^2)}{(A + D_{\hat{\eta}\psi}^{-1} \det(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})) (EK - F^2) + B(CF - BK) + C(BF - CE)}, \tag{2.284}$$

$$(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{21} = \frac{\det(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k}) (CF - BK)}{(A + D_{\hat{\eta}\psi}^{-1} \det(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})) (EK - F^2) + B(CF - BK) + C(BF - CE)}, \tag{2.285}$$

$$(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{31} = \frac{\det(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k}) (BF - CE)}{(A + D_{\hat{\eta}\psi}^{-1} \det(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})) (EK - F^2) + B(CF - BK) + C(BF - CE)}, \tag{2.286}$$

$$(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})_{22} = \frac{\det(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k}) ((A + D_{\hat{\eta}\psi}^{-1} \det(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})) K - C^2)}{(A + D_{\hat{\eta}\psi}^{-1} \det(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi, k})) (EK - F^2) + B(CF - BK) + C(BF - CE)}, \tag{2.287}$$

$$\left(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi,k}\right)_{32} = \frac{\det\left(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi,k}\right)\left(CB - \left(A + D_{\tilde{\eta}\psi}^{-1} \det\left(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi,k}\right)\right)F\right)}{\left(A + D_{\tilde{\eta}\psi}^{-1} \det\left(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi,k}\right)\right)\left(EK - F^2\right) + B(CF - BK) + C(BF - CE)} \quad (2.288)$$

$$\left(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi,k}\right)_{33} = \frac{\det\left(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi,k}\right)\left(\left(A + D_{\tilde{\eta}\psi}^{-1} \det\left(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi,k}\right)\right)E - B^2\right)}{\left(A + D_{\tilde{\eta}\psi}^{-1} \det\left(\mathbf{D}_{\hat{x}\psi,k}\right)\right)\left(EK - F^2\right) + B(CF - BK) + C(BF - CE)}. \quad (2.289)$$

## П.2.18 Коэффициенты следящих систем в установившемся режиме

В установившемся режиме справедливы тождества:

$$\begin{aligned} D_{\tau,k-1} &= D_{\tau,k}, \\ \mathbf{D}_{\hat{x}o,k-1} &= \mathbf{D}_{\hat{x}o,k}, \\ \mathbf{D}_{\hat{x}\psi m,k-1} &= \mathbf{D}_{\hat{x}\psi m,k-1}. \end{aligned} \quad (2.290)$$

На основании (2.290) определим коэффициенты следящих систем в установившемся режиме.

*Коэффициенты установившегося режима для дискретной ССЗ (системы первого порядка)*

$$\begin{aligned} D_{\hat{\tau},k-1} &= D_{\tilde{\eta}\tau} \frac{D_{\hat{\tau},k-1} + D_{\xi_\tau}}{D_{\tilde{\eta}\tau} + D_{\hat{\tau},k-1} + D_{\xi_\tau}} \rightarrow \\ D_{\hat{\tau},k-1} D_{\tilde{\eta}\tau} + D_{\hat{\tau},k-1}^2 + D_{\hat{\tau},k-1} D_{\xi_\tau} &= D_{\tilde{\eta}\tau} D_{\hat{\tau},k-1} + D_{\tilde{\eta}\tau} D_{\xi_\tau} \rightarrow \\ D_{\hat{\tau},k-1}^2 + D_{\hat{\tau},k-1} D_{\xi_\tau} - D_{\tilde{\eta}\tau} D_{\xi_\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (2.291)$$

Корни уравнения (2.291)

$$D_{\hat{\tau}} = \frac{-D_{\xi_\tau} + \sqrt{D_{\xi_\tau}^2 + 4D_{\tilde{\eta}\tau}D_{\xi_\tau}}}{2} = D_{\xi_\tau} \frac{\sqrt{1 + 4\frac{D_{\tilde{\eta}\tau}}{D_{\xi_\tau}} - 1}}{2}. \quad (2.292)$$

Шумовая полоса ССЗ получается из общего выражения при принятии второго и третьего коэффициента равными нулю:

$$\Delta f_1 = \frac{K_1}{2T(2 - K_1)} = \frac{K_1}{4T - 2K_1T}, \quad (2.293)$$

где

$$K_1 = \frac{\dot{K}_1}{D_{\tilde{\eta}\tau}} = \frac{D_{\hat{t}}}{D_{\tilde{\eta}\tau}} = \frac{D_{\xi_\tau}}{D_{\tilde{\eta}\tau}} \sqrt{\frac{1 + 4 \frac{D_{\tilde{\eta}\tau}}{D_{\xi_\tau}} - 1}{2}} \quad (2.294)$$

- оптимальный коэффициент следящей системы первого порядка с нормированным на крутизну дискриминатором.

*Коэффициенты установившегося режима для дискретной ССЧ (системы второго порядка)*

Элементы ковариационной матрицы ССЧ в установившемся режиме связаны тремя уравнениями:

$$(\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{11} = D_{\tilde{\eta}\omega} \frac{(\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{11} + 2(\mathbf{D}_{\hat{x}\omega, k-1})_{21} T + (\mathbf{D}_{\hat{x}\omega, k-1})_{22} T^2}{D_{\tilde{\eta}\omega} + (\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{11} + 2(\mathbf{D}_{\hat{x}\omega, k-1})_{21} T + (\mathbf{D}_{\hat{x}\omega, k-1})_{22} T^2} \rightarrow \quad (2.295)$$

$$\frac{(\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{11}^2}{D_{\tilde{\eta}\omega} T} + \frac{2(\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{11} (\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{21} T + (\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{11} (\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{22} T^2}{D_{\tilde{\eta}\omega} T} = 2(\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{21} + (\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{22} T,$$

$$(\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{21} = D_{\tilde{\eta}\omega} \frac{(\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{21} + (\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{22} T}{D_{\tilde{\eta}\omega} + (\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{11} + 2(\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{21} T + (\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{22} T^2} \rightarrow \quad (2.296)$$

$$(\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{22} = \frac{(\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{11} (\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{21}}{D_{\tilde{\eta}\omega} T} + \frac{2(\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{21}^2 T + (\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{21} (\mathbf{D}_{\hat{x}\omega})_{22} T^2}{D_{\tilde{\eta}\omega} T},$$

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3. АКТЫ О ВНЕДРЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ

Внедрение результатов исследования подтверждены актами, полученными в НИУ «МЭИ», ОАО «НИИ космического приборостроения».

## УТВЕРЖДАЮ

Заместитель генерального директора  
ОАО «Научно-исследовательский  
институт космического  
приборостроения»



О.Е. Лопатко

«20» февраля 2013 г.

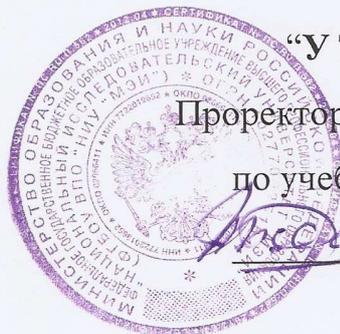
## А К Т

о внедрении результатов диссертации Корогодина И.В. на тему:  
«Разработка алгоритмов обработки сигналов в аппаратуре определения  
угловой ориентации объектов по сигналам СРНС»

Некогерентный алгоритм оценки задержки, доплеровской частоты и разности фаз сигналов промежуточной частоты, обеспечивающий повышение помехоустойчивости угломерной навигационной аппаратуры, внедрен в ОКР «Разработка навигационной аппаратуры потребителей, работающей по сигналам перспективных глобальных навигационных спутниковых систем» (шифр «Перспектива-С»), выполненную по заказу Управления заказов и поставок космических систем и средств ракетно-космической обороны Министерства обороны РФ, индекс изделия 14Ц830.

Начальник отдела

А.М. Букреев



“УТВЕРЖДАЮ”

Проректор ФГБОУ ВПО «НИУ «МЭИ»  
по учебной работе

 П.В. Росляков

19.02.2013

## А К Т

об использовании результатов диссертации  
Корогодина Ильи Владимировича на тему:  
«Разработка алгоритмов обработки сигналов в аппаратуре определения  
угловой ориентации объектов по сигналам СРНС»

Материалы диссертации по синтезу квазиоптимального некогерентного алгоритма оценки задержки, доплеровской частоты и разности фаз сигналов промежуточной частоты для аппаратуры определения угловой ориентации объектов по сигналам спутниковых радионавигационных систем и методам расчета характеристик таких алгоритмов использованы в курсах лекций «Методы оптимального приема сигнала в аппаратуре потребителей спутниковых радионавигационных систем» и «Аппаратура потребителей спутниковых радионавигационных систем на основе фазовых измерений», прочитанных студентам 4 и 5 курсов специальности «Радиоэлектронные системы» в 2011/2012 и 2012/2013 учебных годах. Данные материалы вошли в электронные учебно-методические комплексы по указанным дисциплинам, разработанные в 2012 г.

Зав. кафедрой  
радиотехнических систем  
д.т.н., профессор



А.И. Перов