

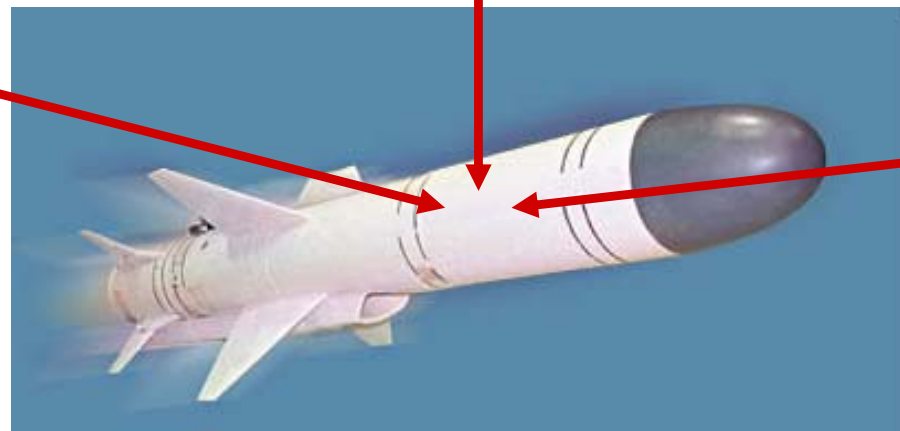
# Лекция 12. Оптимальная комплексная фильтрация

Идея: для повышения точности навигационных определений можно использовать несколько измерителей функционально связанных величин

Радиовысотомер/ДИСС



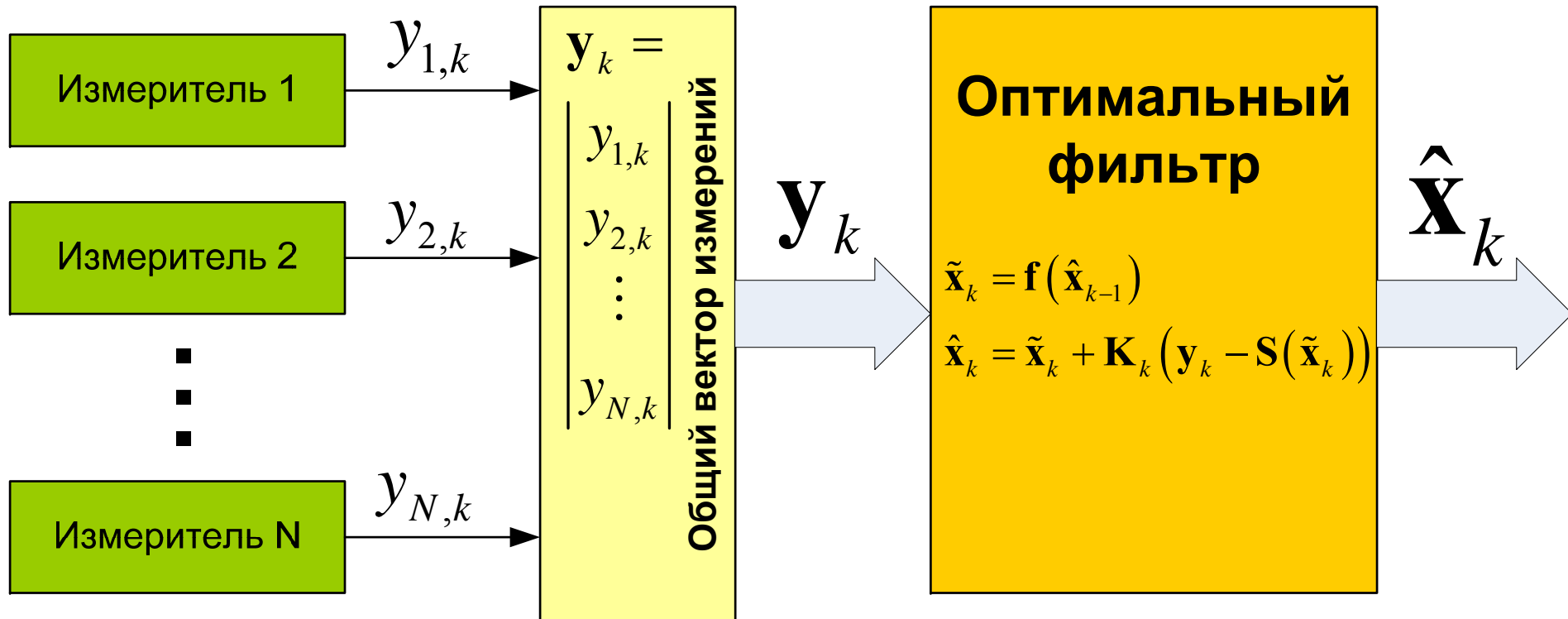
Инерциальная навигационная система (ИНС)



Навигационный приемник ГЛОНАСС/GPS



# Принцип комплексирования



Измерения от нескольких датчиков объединяются в общий вектор и далее обрабатываются в стандартном векторном алгоритме линейной или нелинейной фильтрации

# Модернизированный вариант комплексирования

Часто измерения нерадиотехнических датчиков не содержат шума, а имеют медленно меняющуюся погрешность:

$$y_{\text{НРИ},k} = \lambda_k + \varepsilon_k$$

$\lambda_k = \mathbf{c}\mathbf{x}_k$  - вектор информативных параметров, описываемый многомерным марковским процессом

$\varepsilon_k = \mathbf{b}\mathbf{z}_k$  - марковский процесс, а не белый шум!!!

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{f}(\mathbf{z}_{k-1}) + \mathbf{g}(\mathbf{z}_{k-1})\xi_k$$

$\xi_k$  - формирующий ДБГШ

Измерения от радиотехнического устройства:

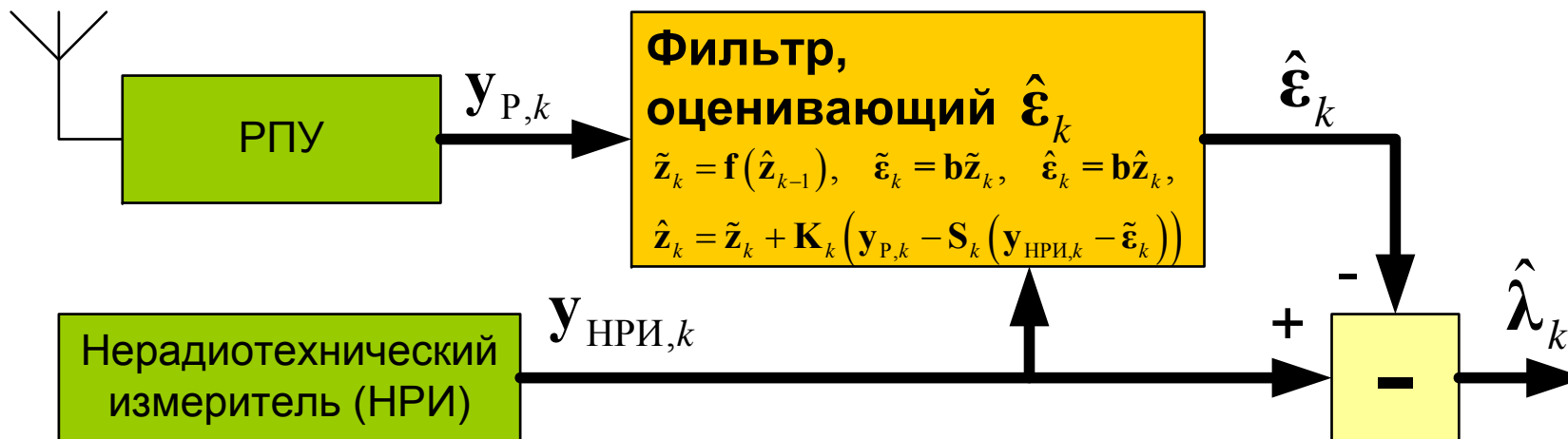
$$y_{\text{Р},k} = \mathbf{S}_k(\lambda_k) + \mathbf{n}_k, \quad \mathbf{n}_k - \text{ДБГШ}$$

# Модернизированный вариант комплексирования

Идея: Выразим формально:  $\lambda_k = y_{\text{НРИ},k} - \varepsilon_k$ , тогда

$$y_{\text{Р},k} = S_k (y_{\text{НРИ},k} - \varepsilon_k) + n_k$$

и будем искать оценку погрешности  $\hat{\varepsilon}_k$ , а не  $\hat{\lambda}_k$ ,  
а оценку  $\hat{\lambda}_k$  найдём через оценку погрешности  $\hat{\varepsilon}_k$ :

$$\hat{\lambda}_k = y_{\text{НРИ},k} - \hat{\varepsilon}_k$$


# Пример: комплексная фильтрация вектора скорости

Приемник спутниковой радионавигационной системы (СРНС)

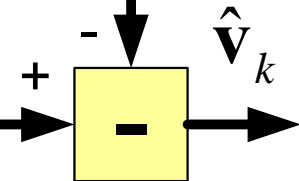


$$\mathbf{y}_{\text{СРНС},k} = \begin{pmatrix} v_{x,k} \\ v_{y,k} \\ v_{z,k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{x,k} \\ n_{y,k} \\ n_{z,k} \end{pmatrix} = \mathbf{v}_k + \mathbf{n}_k$$

**Фильтр, оценивающий  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$**   
 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1}$   
 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_{\text{СРНС},k} - (\mathbf{y}_{\text{ИНС},k} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k))$

$$\mathbf{y}_{\text{ИНС},k} = \begin{pmatrix} v_{x,k} \\ v_{y,k} \\ v_{z,k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{x,k} \\ \varepsilon_{y,k} \\ \varepsilon_{z,k} \end{pmatrix} = \mathbf{v}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k$$

Бесплатформенная инерциальная навигационная система (БИНС)



$\mathbf{n}_k$  - вектор ДБГШ с матрицей дисперсий  $\sigma_n^2 \cdot \mathbf{I}$

$\boldsymbol{\varepsilon}_k = \boldsymbol{\varepsilon}_{k-1} + \boldsymbol{\xi}_k$  - винеровский процесс с расходящейся дисперсией

$\boldsymbol{\xi}_k$  - формирующий ДБГШ с матрицей дисперсий  $\sigma_\xi^2 \cdot \mathbf{I}$

# Синтез фильтра

Воспользуемся общими уравнениями оптимальной нелинейной фильтрации и запишем их с учетом нашего частного случая:

Вектор состояния  $\mathbf{x} \equiv \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{x,k} & \varepsilon_{y,k} & \varepsilon_{z,k} \end{vmatrix}^T$

$$\mathbf{f}_{k-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{k-1}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{k-1} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{I}; \quad \mathbf{g}_{k-1}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1}) = 1; \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1};$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\varepsilon,k} = \mathbf{D}_{\varepsilon,k-1} + \mathbf{D}_{\xi}, \quad \mathbf{D}_{\xi} = \sigma_{\xi}^2 \cdot \mathbf{I}.$$

- дисперсия ошибки экстраполированной оценки  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$

$$\mathbf{S}_k(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k) = (\mathbf{y}_{\text{инс},k} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k) \Rightarrow \left( \frac{\partial \mathbf{S}_k(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) = -\mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{y}_k - (\mathbf{y}_{\text{инс},k} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k)) \text{ - невязка измерений}$$

$$\mathbf{K}_k = -\tilde{\mathbf{D}}_{\varepsilon,k} (\tilde{\mathbf{D}}_{\varepsilon,k} + \mathbf{D}_n)^{-1} \text{ - коэффициент фильтра, } \mathbf{D}_n = \sigma_n^2 \cdot \mathbf{I}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_{\text{срнс},k} - (\mathbf{y}_{\text{инс},k} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k)) \text{ - шаг оценивания}$$

$$\mathbf{D}_{\varepsilon,k} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_k) \tilde{\mathbf{D}}_{\varepsilon,k} \text{ - дисперсия ошибки оценки } \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$$

# Синтез фильтра

В начальный момент времени матрицу дисперсий ФК  $\mathbf{D}_{\varepsilon,0}$  полагаем диагональной (ошибки ИНС по осям  $x, y, z$  некоррелированы)

Матрицы  $\mathbf{D}_{\xi}, \mathbf{D}_n$  - диагональны, тогда  $\tilde{\mathbf{D}}_{\varepsilon,k}, \mathbf{D}_{\varepsilon,k}, \mathbf{K}_k$  - тоже всегда будут диагональны:

$$\mathbf{D}_{\varepsilon,k} = \begin{vmatrix} D_{x,k} & 0 & 0 \\ 0 & D_{y,k} & 0 \\ 0 & 0 & D_{z,k} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{K}_k = \begin{vmatrix} K_{x,k} & 0 & 0 \\ 0 & K_{y,k} & 0 \\ 0 & 0 & K_{z,k} \end{vmatrix}$$

Следовательно, векторный фильтр можно разбить на 3 независимых скалярных фильтра:

$$\hat{\varepsilon}_{x(y,z),k} = \hat{\varepsilon}_{x(y,z),k-1} + K_{x(y,z),k} \left( y_{\text{СРНС } x(y,z),k} - \left( y_{\text{ИНС},x(y,z),k} - \hat{\varepsilon}_{x(y,z),k-1} \right) \right)$$

$$K_{x(y,z),k} = -\frac{D_{x(y,z),k}}{\sigma_n^2}; \quad D_{x(y,z),k}^{-1} = \left( D_{x(y,z),k-1} + \sigma_{\xi}^2 \right)^{-1} + \frac{1}{\sigma_n^2};$$

Для установившегося режима ( $k \rightarrow \infty$ ):  $D_{x(y,z),k} = D_{x(y,z),k-1}$ , отсюда

$$D_{x(y,z)} = \frac{\sigma_{\xi}}{2} \left( \sqrt{\sigma_{\xi}^2 + 4\sigma_n^2} - \sigma_{\xi} \right), \quad K_{x(y,z)} = -\frac{\sigma_{\xi}}{2\sigma_n^2} \left( \sqrt{\sigma_{\xi}^2 + 4\sigma_n^2} - \sigma_{\xi} \right)$$

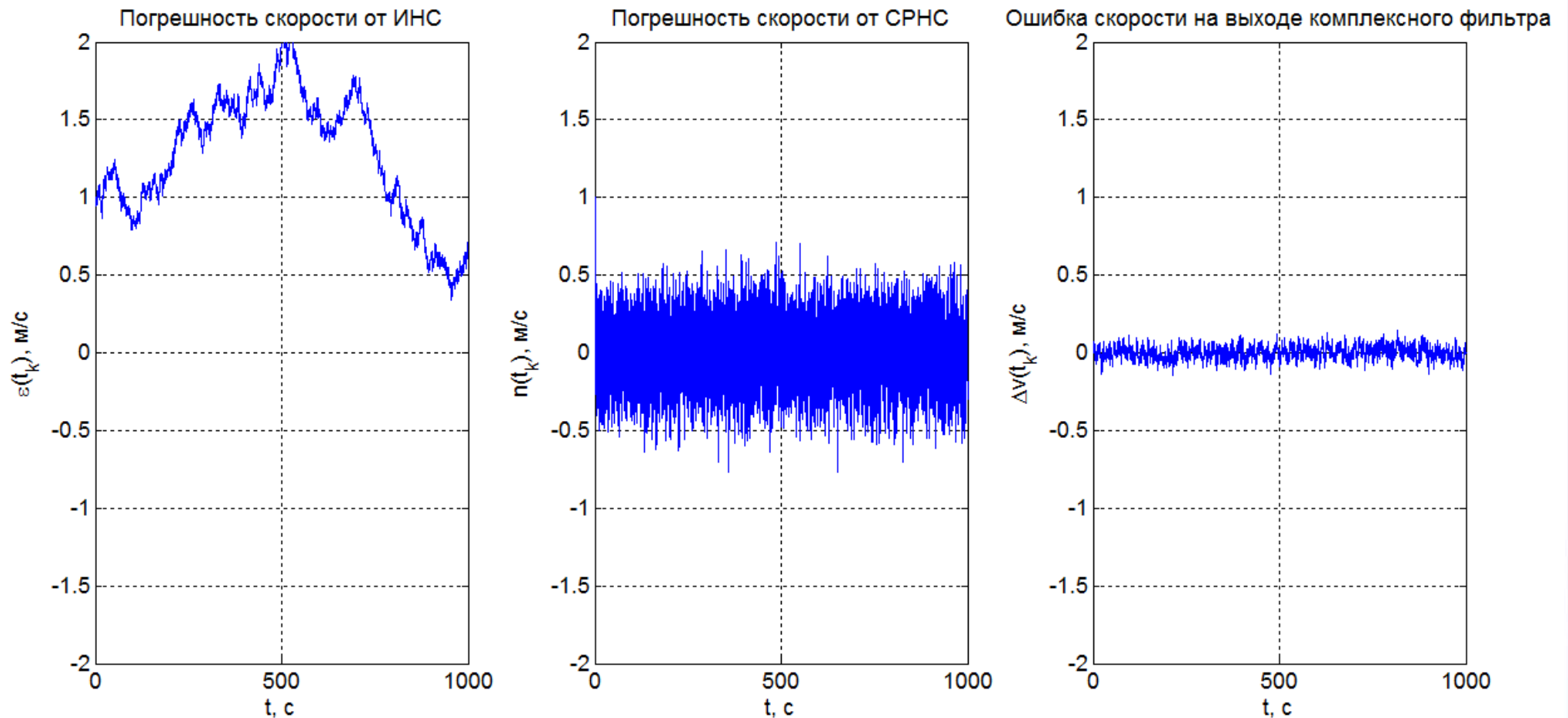
Окончательные уравнения фильтра:

$$\hat{\varepsilon}_{x(y,z),k} = \hat{\varepsilon}_{x(y,z),k-1} + \frac{\sigma_{\xi}}{2\sigma_n^2} \left( \sqrt{\sigma_{\xi}^2 + 4\sigma_n^2} - \sigma_{\xi} \right) \left( \left( y_{\text{ИНС},x(y,z),k} - y_{\text{СРНС } x(y,z),k} \right) - \hat{\varepsilon}_{x(y,z),k-1} \right)$$

# Параметры фильтра и результат комплексирования

Шаг дискретизации  $T = 0.1$  с; ср. кв. ошибка скорости от СРНС

$$\sigma_n = 0,2 \text{ м/с}; \quad \sigma_\xi = 0,01 \text{ м/с}$$





# Модернизированный вариант комплексирования 2

Если измеряемые НРИ параметры связаны с вектором состояния дифф. связью, то динамику вектора состояния можно выразить через них:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_x(\mathbf{x}_{k-1}, \boldsymbol{\gamma}_{k-1}) + \mathbf{g}_x(\mathbf{x}_{k-1})\boldsymbol{\xi}_{x,k}; \quad \mathbf{y}_{\text{НРИ},k} = \boldsymbol{\gamma}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k$$

$\boldsymbol{\gamma}_k$  - вектор параметров, которые входят в динамическое уравнение вектора состояния. Выразив  $\boldsymbol{\gamma}_k = \mathbf{y}_{\text{НРИ},k} - \boldsymbol{\varepsilon}_k$

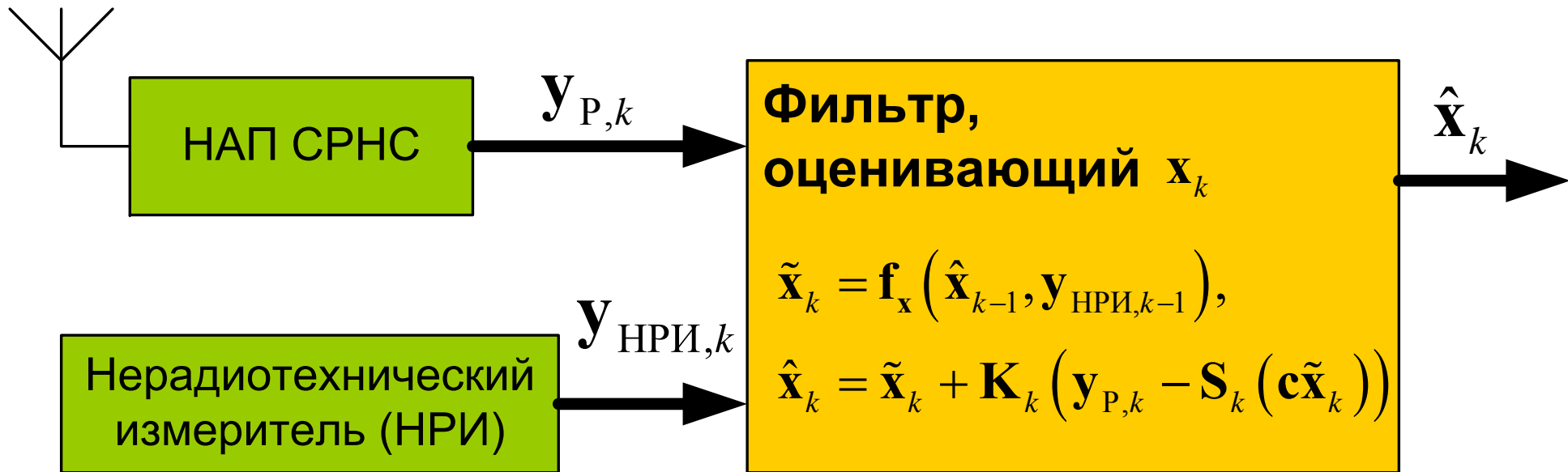
получим: 
$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_x(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{\text{НРИ},k-1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{k-1}) + \mathbf{g}_x(\mathbf{x}_{k-1})\boldsymbol{\xi}_{x,k}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_k$  можно включить в состав  $\mathbf{x}_k$  :  $\boldsymbol{\varepsilon}_k \in \mathbf{x}_k \Rightarrow$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_x(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{\text{НРИ},k-1}) + \mathbf{g}_x(\mathbf{x}_{k-1})\boldsymbol{\xi}_{x,k}$$

Здесь  $\mathbf{y}_{\text{НРИ},k-1}$  - просто известная функция времени

# Модернизированный вариант комплексирования 2

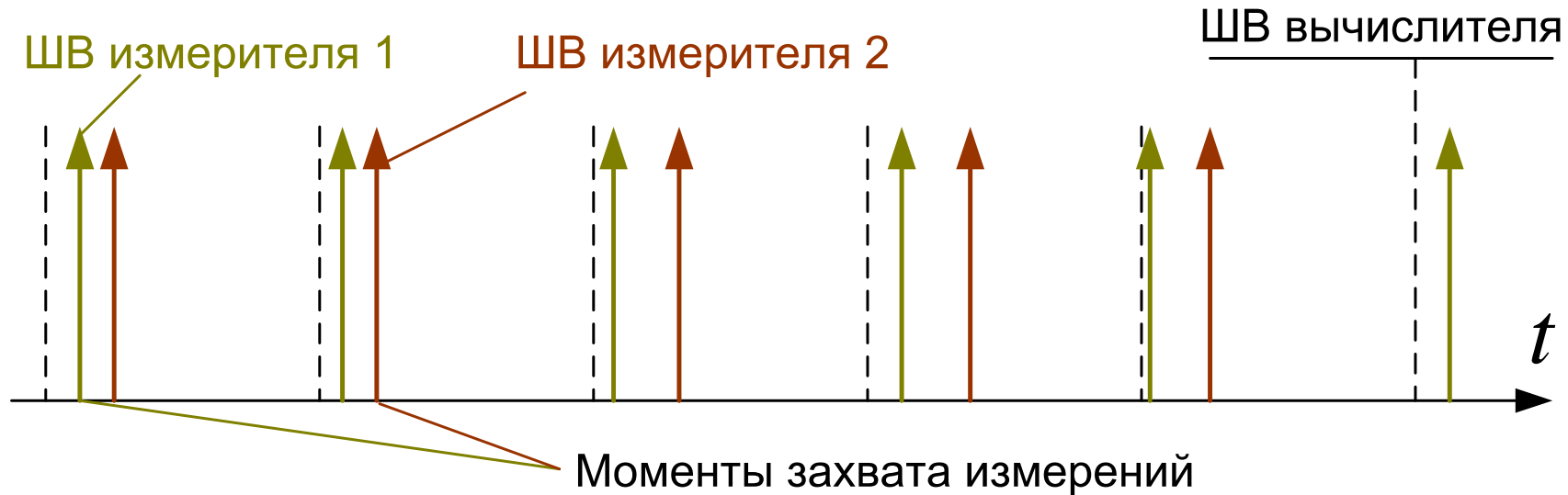


Выходной сигнал НРИ рассматривается как известная функция времени, которая используется при экстраполяции вектора состояния

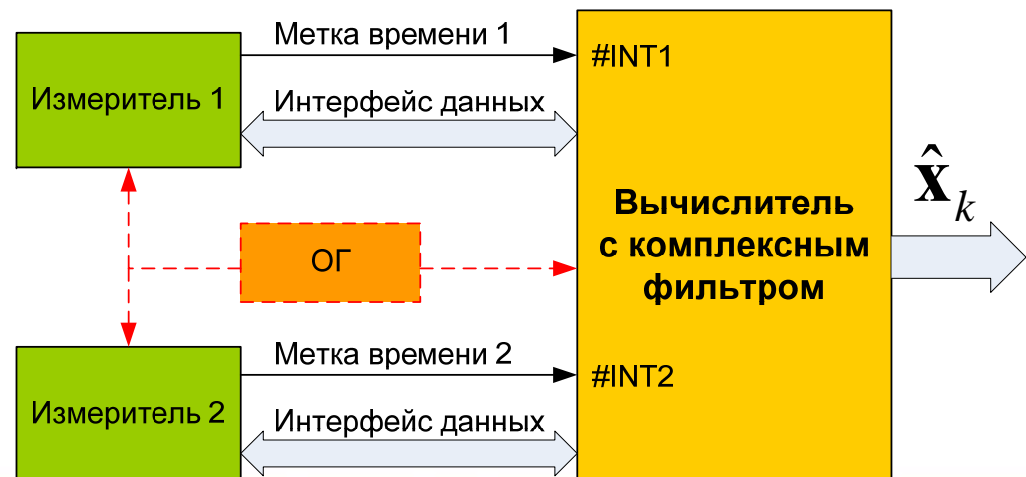
# Синхронизация

## шкал времени измерителей

Проблема: каждый измеритель работает в своей шкале времени и моменты захвата измерений не совпадают.



Для принятия мер, в вычислитель заводят сигнал внешнего прерывания «метка времени» (МВ), фронт которого синхронизирован с моментом захвата измерений.

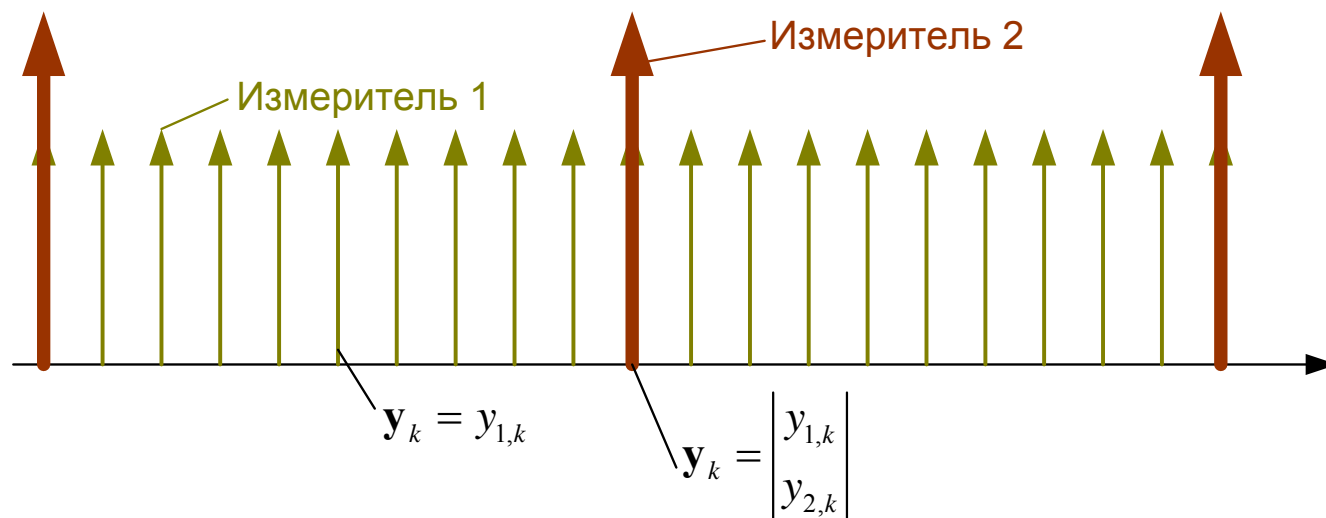


# Различие темпов работы измерителей

Разные измерители могут формировать измерения с разным темпом. Пример:

Навигационный приемник: 10 Гц

Инерциальная система: 400 Гц



Вводят вектор наблюдений и сигнальную функцию переменной размерности. Теория не требует, чтобы все размерности РФК были постоянными.

При проектировании системы темпы выбирают кратными, измерители тактируют от одного ОГ, а решение уравнений фильтрации привязывают к наиболее «частому» темпу.