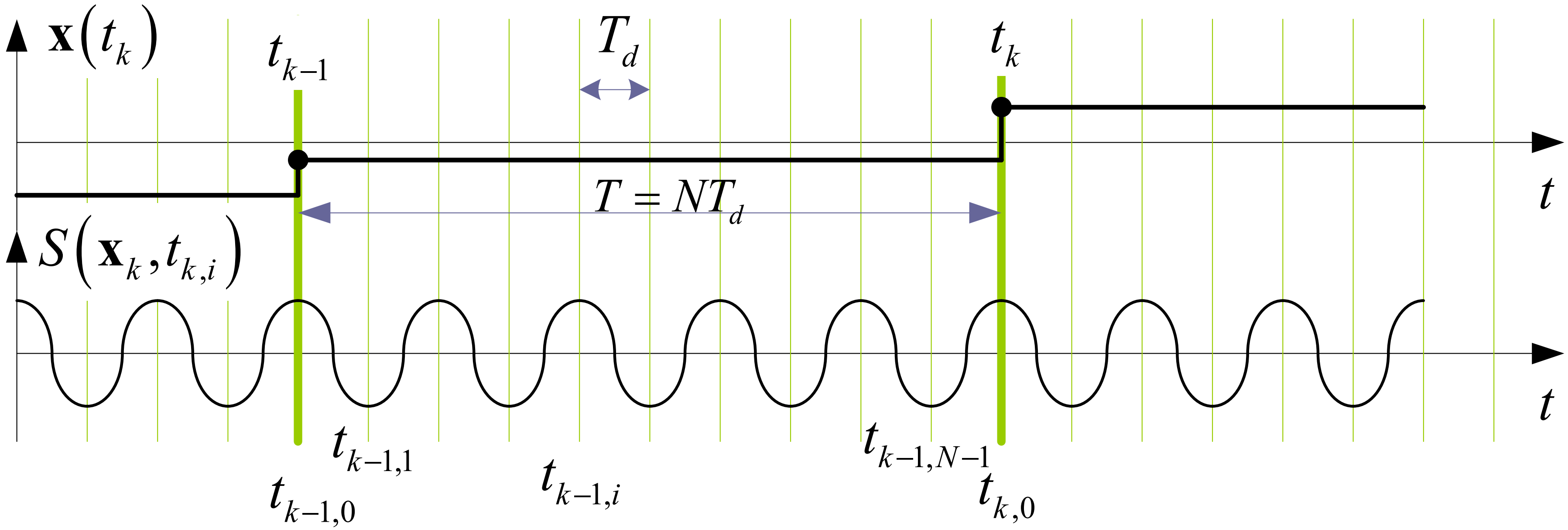
Лекция 11. Применение теории оптимальной нелинейной фильтрации на практике

Дискретная нелинейная фильтрация с накоплением при обработке радиосигналов СРНС

!!! Как правило, информативные параметры меняются существенно медленнее, чем сам сигнал



Как сэкономить на скорости обработки

Наблюдения поступают в «частой» шкале времени с шагом дискретизации АЦП - Td.

$$y_{k,i} = S_{k,i}\left(\mathbf{x}_k\right) + n_{k,i}, \quad t_{k,i} = kT + iT_d; \quad T / T_d = N.$$

$n_{k,i}$ – ДБГШ с дисперсией σ_n^2

$S_{k,i}\left(\mathbf{x}_k\right)$ – сигнальная функция (известная).

А **фильтруемый процесс** можно записать в «редкой» шкале времени с шагом дискретизации Т.

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}\left(\mathbf{x}_{k-1}\right) + \mathbf{g}_{k-1}\left(\mathbf{x}_{k-1}\right)\xi_{k-1}, \quad \mathbf{x}\left(t_0\right) = \mathbf{x}_0, \quad t_k = kT$$

ξ_{k-1} - векторный ДБГШ: $M\left[\xi_k \xi_m^{\mathrm{T}}\right] = \mathbf{D}_\xi \delta_{km}$

$\mathbf{f}_k\left(\mathbf{x}_k\right)$, $\mathbf{g}_k\left(\mathbf{x}_k\right)$ – известные векторные функции

Как сэкономить на скорости обработки

Идея: рассмотрим выборку наблюдений на интервале $t_k \ldots t_{k+1}$ как вектор наблюдений величины $\mathbf{x}_k$:

$$\boxed{\mathbf{y}_k = \left| y_{k,0} \ldots y_{k,i} \ldots y_{k,N-1} \right|^{\mathrm{T}} = \mathbf{S}_k\left(\mathbf{x}_k\right) + \mathbf{n}_k}$$

Один из видов записи РФК через дискриминатор:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_{\mathbf{x},k}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \mathbf{S}_k\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_n^{-1}\left(\mathbf{y}_k - \mathbf{S}_k\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)\right) = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_{\mathbf{x}k}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_{\text{д}k}; \quad \left(\boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{c}\mathbf{x}_k\right)$$

(1)

$$\mathbf{u}_{\text{д}k} = \left(\frac{\partial \mathbf{S}_k\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_n^{-1}\left(\mathbf{y}_k - \mathbf{S}_k\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)\right) = \left| \begin{array}{c} \dfrac{1}{\sigma_n^2}\sum\limits_{i=0}^{N-1}\dfrac{\partial S_{k,i}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial \lambda_1}\left(y_{k,i} - S_{k,i}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)\right) \\ \vdots \\ \dfrac{1}{\sigma_n^2}\sum\limits_{i=0}^{N-1}\dfrac{\partial S_{k,i}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial \lambda_m}\left(y_{k,i} - S_{k,i}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)\right) \end{array} \right|$$

Вот оно, накопление!

Расчет матрицы дисперсий

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k} = \frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{D}_{\mathbf{x},k-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right)}{\partial \mathbf{x}} \right)^{\mathrm{T}} + \mathbf{g}_{k-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right) \mathbf{D}_{\xi} \mathbf{g}_{k-1}^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right)$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x},k}^{-1} = \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}^{-1} + \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial \mathbf{S}_k\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_n^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_k\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \mathbf{c} = \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}^{-1} + \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \mathbf{W}_k \mathbf{c},$$

$$\mathbf{W}_k = \left(\frac{\partial \mathbf{S}_k\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_n^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_k\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial \boldsymbol{\lambda}}$$

- эквивалентная матрица весов наблюдений

$$\left(W_{p,q}\right)_k = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial S_{k,i}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial \lambda_p} \frac{\partial S_{k,i}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial \lambda_q}$$

$$\left(\mathbf{D}_n^{-1} = \frac{1}{\sigma_n^2} \mathbf{I}_{N \times N} \right)$$

Отсюда: $$\mathbf{D}_{\mathbf{x},k} = \left(\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}^{-1} + \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \mathbf{W}_k \mathbf{c} \right)^{-1}$$

Выводы

Расширенный фильтр Калмана можно разбить на дискриминатор и фильтр. При этом можно снизить темп обработки, применяя предварительное накопление сигнала в дискриминаторе. Дискриминатор осуществляет предварительную ЦОС с темпом поступления сигнала от АЦП (Td). А уравнения фильтрации решаются с более низким темпом, соответствующим темпу изменения информативных параметров (T).

*(В аппаратуре дискриминатор обычно реализуют на ПЛИС или ASIC, а фильтр – на микропроцессоре)

Пример синтеза системы фильтрации амплитуды и фазы сигнала

Опишем наблюдения в виде:

$$y_{k,i} = a_k \cos\left(\omega_{п} t_{k,i} + \varphi_k\right) + n_{k,i}, \quad t_{k,i} = kT + iT_d;$$

$n_{k,i}$ – ДБГШ с дисперсией σ_n^2, $\omega_{п}$ - пром. частота

Зададим уравнения динамики для информативных параметров:

$$a_k = a_{k-1} + \zeta_{k-1} T,$$

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \Omega_{k-1} T$$

$$\Omega_k = \Omega_{k-1} + \nu_{k-1} T,$$

$$\nu_k = \nu_{k-1} \cdot \left(1 - \alpha T\right) + \alpha T \cdot \xi_{k-1},$$

ζ_{k-1}, ξ_{k-1} - ДБГШ с дисперсиями σ_ζ^2 и σ_ξ^2 соответственно

Переход к векторно-матричному описанию

Представим уравнения динамики в виде многомерного марковского процесса

$$\mathbf{x}_k = \begin{vmatrix} a_k & \varphi_k & \Omega_k & \nu_k \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}\xi_{k-1},$$

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & (1-\alpha T) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{vmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \alpha T \end{vmatrix}, \quad \xi_{k-1} = \begin{vmatrix} \zeta_{k-1} \\ \xi_{k-1} \end{vmatrix}$$

Формирующие шумы амплитуды и фазы полагаем независимыми, следовательно:

$$\mathbf{D}_\xi = M\left[\xi_k \xi_k^{\mathrm{T}}\right] = \begin{vmatrix} \sigma_\zeta^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\xi^2 \end{vmatrix}$$

Синтез дискриминаторов

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \begin{vmatrix} a_k \\ \varphi_k \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{c}\mathbf{x}_k, \quad \text{следовательно} \quad \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Воспользуемся (1), слайд №3:

$$\mathbf{u}_{\text{д}k} = \begin{vmatrix} u_{\text{д}a,k} \\ u_{\text{д}\varphi,k} \end{vmatrix}; \quad u_{\text{д}a,k} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial S_{k,i}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial a} \left(y_{k,i} - S_{k,i}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)\right);$$

$$u_{\text{д}\varphi,k} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial S_{k,i}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial \varphi} \left(y_{k,i} - S_{k,i}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)\right);$$

$$\frac{\partial S_{k,i}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \tilde{a}_k \cos\left(\omega_\text{п} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k\right) = \cos\left(\omega_\text{п} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k\right);$$

$$\frac{\partial S_{k,i}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{a}_k \cos\left(\omega_\text{п} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k\right) = -\tilde{a}_k \sin\left(\omega_\text{п} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k\right);$$

Синтез дискриминаторов

$$u_{\text{да},k} = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i=0}^{N-1}\cos\left(\omega_{\text{п}}t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k\right)\left(y_{k,i} - \tilde{a}_k\cos\left(\omega_{\text{п}}t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i=0}^{N-1}y_{k,i}\cos\left(\omega_{\text{п}}t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k\right) - \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i=0}^{N-1}\tilde{a}_k\cos^2\left(\omega_{\text{п}}t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i=0}^{N-1}y_{k,i}\cos\left(\omega_{\text{п}}t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k\right) - \frac{\tilde{a}_k N}{2\sigma_n^2};$$

$$u_{\text{дφ},k} = \frac{-1}{\sigma_n^2}\sum_{i=0}^{N-1}\tilde{a}_k\sin\left(\omega_{\text{п}}t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k\right)\left(y_{k,i} - \tilde{a}_k\cos\left(\omega_{\text{п}}t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k\right)\right) \approx$$

$$\approx \frac{-\tilde{a}_k}{\sigma_n^2}\sum_{i=0}^{N-1}y_{k,i}\sin\left(\omega_{\text{п}}t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k\right)$$

Старый добрый коррелятор!

Расчет матрицы дисперсий

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x},k} = \left(\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}^{-1} + \mathbf{c}^{\mathrm{т}}\mathbf{W}_k\mathbf{c}\right)^{-1};$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{g}_{k-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right) = \mathbf{G} \quad \Rightarrow \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k} = \mathbf{F}\mathbf{D}_{\mathbf{x},k-1}\mathbf{F}^{\mathrm{т}} + \mathbf{G}\mathbf{D}_{\xi}\mathbf{G}^{\mathrm{т}}$$

$$\mathbf{W}_k = \begin{vmatrix} W_{aa,k} & W_{a\varphi,k} \\ W_{a\varphi,k} & W_{\varphi\varphi,k} \end{vmatrix}$$

- эквивалентная матрица весов наблюдений

(слайд №4)

$$W_{aa,k} = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{\partial S_{k,i}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial a}\right)^2 = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i=0}^{N-1}\cos^2\left(\omega_{\text{п}} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k\right) \approx \frac{N}{2\sigma_n^2}$$

$$W_{\varphi\varphi,k} = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{\partial S_{k,i}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{\tilde{a}_k^2}{\sigma_n^2}\sum_{i=0}^{N-1}\sin^2\left(\omega_{\text{п}} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k\right) \approx \frac{N\tilde{a}_k^2}{2\sigma_n^2}$$

$$W_{a\varphi,k} = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{\partial S_{k,i}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial a}\cdot\frac{\partial S_{k,i}\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\right)}{\partial \varphi}\right) = \frac{\tilde{a}_k}{\sigma_n^2}\sum_{i=0}^{N-1}\sin\left(\omega_{\text{п}} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k\right)\cos\left(\omega_{\text{п}} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k\right) \approx 0$$

Результат синтеза

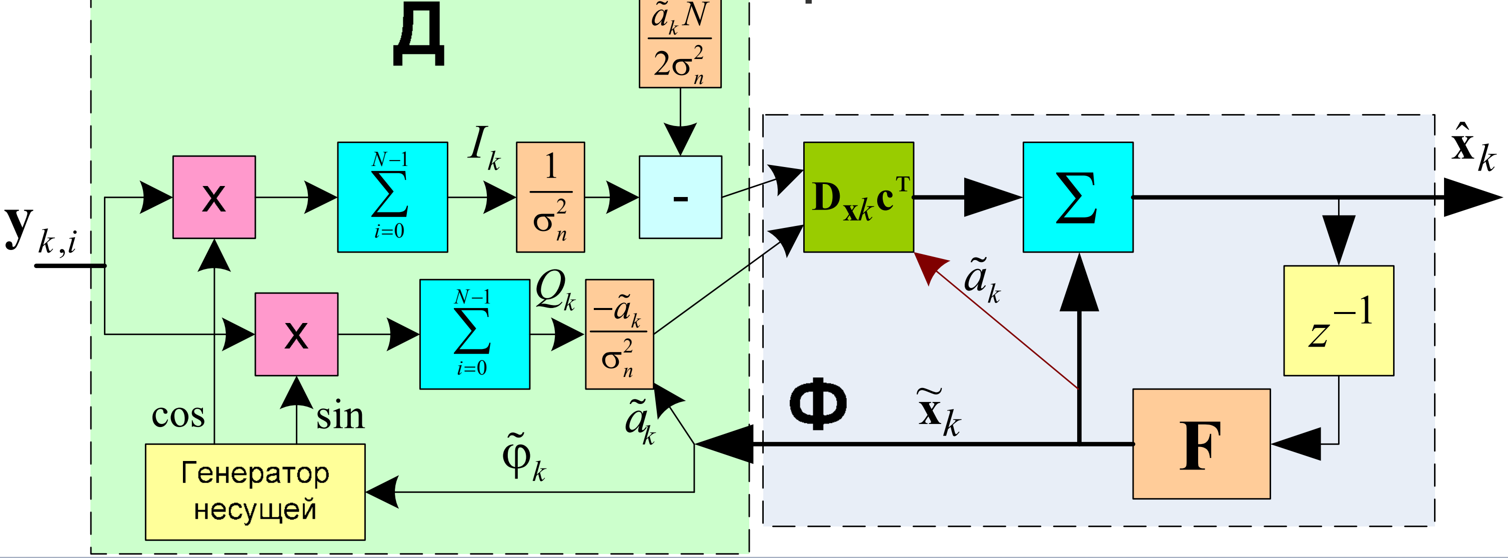
Всё найдено для решения основных уравнений фильтрации:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad \text{- экстраполяция}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_{\mathbf{x}k}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_{\text{д}k} \quad \text{- оценивание}$$

$$\mathbf{u}_{\text{д}k} = \left| \begin{array}{c} \dfrac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i=0}^{N-1} y_{k,i}\cos\left(\omega_{\text{п}} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k\right) - \dfrac{\tilde{a}_k N}{2\sigma_n^2} \\ \dfrac{-\tilde{a}_k}{\sigma_n^2}\sum_{i=0}^{N-1} y_{k,i}\sin\left(\omega_{\text{п}} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k\right) \end{array} \right|$$

Структурная схема системы фильтрации амплитуды и фазы сигнала



Домашнее задание

Моделирование системы нелинейной фильтрации фазы и амплитуды

Дано:

$\alpha = 1\ \text{с}^{-1}$ - ширина спектра флуктуаций ускорения;

$T = 10$ мс, (темп фильтрации) $T_d = 0.2$ мкс (темп работы АЦП)

$\omega_0 = 2\pi \cdot (1602\ \text{МГц})$ – несущая частота (для пересчетов);

$\omega_\text{п} = 2\pi \cdot (2\ \text{МГц})$ – промежуточная частота;

$$\sigma_a = 10\ \text{м/с}^2 \quad \Rightarrow \quad S_\xi = 2\sigma_a^2 \alpha \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2, \quad \sigma_\xi^2 = \frac{S_\xi}{2T}$$

$$a_0 = 1, \quad \sigma_\zeta = 0.5; \quad q_{c/n_0} = 10^{0,1 \cdot (30\ \text{дБГц})}; \quad \sigma_n = \frac{a_0}{2\sqrt{q_{c/n_0} T_d}} = 35.4.$$

Домашнее задание

1. Смоделировать входное воздействие и рассмотренную нелинейную систему фильтрации фазы и амплитуды в дискретном времени при следующих начальных условиях:

$$\mathbf{D}_0 = \begin{vmatrix} 0.3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (34\ \text{рад/с})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (340\ \text{рад/с}^2)^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0 \\ \varphi_0 \\ \Omega_0 \\ \nu_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ \pi/12 \\ 100 \\ 100 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{\varphi}_0 \\ \hat{\Omega}_0 \\ \hat{\nu}_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Амплитуду моделировать ступенькой:

$$a_k = \begin{cases} 1, & \text{при } t_k < 1\ \text{с}; \\ 0.5, & \text{при } t_k \geq 1\ \text{с}. \end{cases}$$

Домашнее задание

2. Построить на одном графике временнЫе зависимости

- мгновенной ошибки фильтрации фазы: $\varepsilon_\varphi(t_k) = \hat{\varphi}_k - \varphi_k$;

- предельные границы ошибок фильтрации фазы по уровню 3σ (по оценкам матрицы дисперсий фильтра $\mathbf{D}_{\mathbf{x},k}$):

$$+3\sqrt{D_{22}}(t_k), \quad -3\sqrt{D_{22}}(t_k), \quad t = 0...2 \text{ с}$$

(по оси ординат - градусы).

3. Построить на одном графике временнЫе зависимости

- мгновенной ошибки фильтрации амплитуды: $\varepsilon_a(t_k) = \hat{a}_k - a_k$;

- предельные границы ошибок фильтрации амплитуды по уровню 3σ (по оценкам матрицы дисперсий фильтра $\mathbf{D}_{\mathbf{x},k}$):

$$+3\sqrt{D_{11}}(t_k), \quad -3\sqrt{D_{11}}(t_k), \quad t = 0...2 \text{ с}$$

(по оси ординат - единицы)

Домашнее задание

4. Построить на одном графике временнЫе зависимости

- мгновенной ошибки фильтрации частоты: $\varepsilon_\Omega(t_k) = \hat{\Omega}_k - \Omega_k$,

- предельные границы ошибок фильтрации частоты по уровню 3σ (по оценкам матрицы дисперсий фильтра $\mathbf{D}_{\mathbf{x},k}$):

$$+3\sqrt{D_{33}}(t_k), \quad -3\sqrt{D_{33}}(t_k), \quad t = 0...2 \text{ с}$$

(по оси ординат - рад/с).

Сравнить ошибки частоты с д.з. №3 – сделать вывод о том, в какой системе ошибка оценивания частоты выше при прочих равных условиях.

5. Сделать общие выводы о том, что происходит в системе при падении амплитуды сигнала (уменьшении отношения с/ш)