

621.373-187.4

# Характеристики нестабильности фазы и частоты сигналов высокостабильных генераторов: Итоги развития за пятнадцать лет

Ж. РЮТМАН, член ИИЭР

## Characterization of Phase and Frequency Instabilities in Precision Frequency Sources: Fifteen Years of Progress

JACQUES RUTMAN, MEMBER, IEEE

Прецизионные источники сигналов частоты — кварцевые генераторы, лазеры, пассивные атомные стандарты частоты — подвержены нестабильностям фазы и частоты, содержащим как случайные, так и детерминированные компоненты. Для выяснения возможности и использования источников очень важно располагать исчерпывающим описанием подобных нестабильностей. Для этой цели предложено пользоваться целым рядом параметров, причем большая их часть предназначалась для описания случайных флюктуаций. Некоторые из них были рекомендованы подкомитетом ИИЭР по стабильности частоты и позднее Исследовательской комиссией 7 Международного консультативного комитета по радиосвязи (МККР), проводившей исследования по теме «Эталонные частоты и сигналы времени». Другие параметры используются не столь широко, тем не менее их применение открывает интересные возможности. В статье представлен широкий обзор параметров, предложенных для описания нестабильностей фазы и частоты сигналов, включая рассмотрение как широко используемых классических способов, так и сравнительно новых и менее распространенных примеров. Особая роль отводится передаточным функциям, связывающим параметры частотной и временной областей, так как они способствуют лучшему пониманию свойств конкретных параметров временной области и облегчают введение новых параметров. Предпринимается попытка дать ясное представление об относительных достоинствах новых приемов. С этой целью излагается ряд новых положений, не приведенных в цитируемой литературе. Говорится, например, о модифицированной трехвыборочной дисперсии  $\Sigma_y^2(\tau)$ , о выражениях для  $\langle \delta y_y^2 \rangle$ , об интерпретации структурных функций фазы и их связи с  $\Sigma_y^2(\tau)$  и с дисперсией Адамара. Отмечается также влияние, оказываемое на различные параметры нестабильности уходами фазы и частоты полиномиального типа и уходами, связанными со случайными процессами, которые моделируются степенными функциями спектральной плотности.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Вопросы описания нестабильностей фазы и частоты приобрели чрезвычайно важное значение для многих инженеров, работающих в самых различных отраслях, поскольку функционирование

Получена 15 апреля 1978 г., в исправленном виде — 25 мая 1978 г. Статья написана на основании предварительной заявки автора, одобренной редакцией, представляет собой расширенный вариант работы *Oscillator specifications: A review of classical and new ideas* (Описание характеристик генераторов: Обзор классических и новых принципов), опубликованной в сборнике [47]. Ориг., с. 1048—1075.

Manuscript received April 15, 1978; revised May 25, 1978. The submission of this paper was encouraged after submission of an advanced proposal. This paper is an expanded version of "Oscillator specifications: A review of classical and new ideas," which appeared in *Proceedings of the 31st Annual Frequency Control Symposium*, June 1-3, 1977 [47].

The author is with the Laboratoire Primaire du Temps et des Fréquences, Bureau National de Métrologie, Observatoire de Paris, Paris 75014, France.

все большего числа систем базируется на использовании высокостабильных источников сигналов времени и частоты — кварцевых генераторов, синтезаторов частот, атомных стандартов частоты, часов и др. Появление стабилизированных по частоте лазеров позволило создать стандарты частоты и для оптического диапазона.

О диапазоне применения этих источников дает представление приводимый ниже неполный перечень такого рода систем [1, 2].

1) Доплеровские РЛС с узкополосным приемником, который должен выделять сдвинутый по частоте отраженный сигнал, требуют использования высококачественных генераторов в передатчиках и гетеродинах приемников, так как всякая нестабильность ограничивает чувствительность и разрешение по дальности.

2) Ракеты и космические летательные аппараты, где генераторы используются для разнообразных целей, включая наведение, сопровождение и связь. Нестабильности частоты вредны во всех случаях, поскольку они ухудшают качественные показатели системы.

3) При измерении дальности методом сравнения фазы дальномерных сигналов с фазой опорного сигнала нестабильность любого из работающих в системе генераторов приводит к погрешности в определении дальности.

4) В связных системах повышение стабильности несущих частот приводит к снижению уровня помех и повышению качества работы. В цифровых системах связи особое значение придается синхронизирующей способности тактовых генераторов сети, причем один из подходящих для ее оценки показателей — максимальная ошибка временного интервала — связан с нестабильностями фазы и частоты тактовых генераторов. Согласно рекомендации Международного консультативного комитета по телеграфии и телефонии (МККТТ), при соединении нескольких синхронных сетей международного уровня относительное значение долговременных частотных флюктуаций должно быть не хуже  $10^{-11}$ .

5) Не следует, конечно, забывать о метрологии времени и частоты. Специалистами в этой области разработаны, построены и введены в эксплуатацию сложные лабораторные эталоны времени и частоты, например устройства с длинным цезиевым

пучком и на водороде. Большая часть широко используемых показателей стабильности, за несколькими исключениями, разработана именно специалистами из этой области.

Одна из практических трудностей связана с тем, что разным группам представителей разных специальностей приходится искать общий язык для описания характеристик генераторов.

Вопрос заключается в том, каким образом разработать приемлемое и исчерпывающее описание нестабильностей фазы и частоты, которое мог бы понять и использовать всякий специалист. В частности, специалист в любой конкретной области хотел бы знать, каким образом нестабильности влияют на качественные показатели системы и как воспользоваться возможными мерами нестабильности для оценки этих качественных показателей. Ясно, что однозначного ответа на этот вопрос дать нельзя, поэтому в течение последних пятнадцати лет велась и продолжает вестись большая работа, направленная на получение хотя бы отдельных приемлемых ответов.

Важность проблемы стабильности частоты была признана еще в начале 60-х годов; по-видимому, первая возможность обмена идеями по этому вопросу представилась благодаря проведению специального симпозиума ИИЭР — НАСА по кратковременной стабильности частоты, состоявшегося 23—24 ноября 1964 г. в Центре космических полетов им. Годдарда [1]. После симпозиума был создан подкомитет ИИЭР по стабильности частоты при Техническом комитете по частоте и времени, конечной задачей которого была выработка ряда рекомендаций по стандартам и определениям, касающимся как кратковременной, так и долговременной стабильности. С целью расширения обмена информацией в феврале 1966 г. был опубликован специальный выпуск *Proceedings of the IEEE*, подготовленный подкомитетом и посвященный стабильности частоты.

В начале 60-х годов было опубликовано несколько основополагающих работ, в которых прямо рассматривались вопросы описания стабильности частоты как в частотной, так и во временной области, включая переходы из одной области в другую [3—7]. Особый интерес представляет использование в качестве показателей, характеризующих временную область, выборочных дисперсий, рассмотренных в работе [7].

В мае 1971 г. подкомитет опубликовал статью<sup>1)</sup> [8], в которой были изложены технические предпосылки, которые должны лечь в основу пока еще не принятого стандарта ИИЭР на термин «стабильность частоты». Было дано два определения стабильности частоты и приведены связывающие их соотношения, имеющие важное значение для теории и практики. Оба они получили широкое распространение среди изготовителей и потребителей высокостабильных источников сигналов частоты.

В настоящей статье вслед за излагаемым в разд. II описанием математических моделей и основных определений исследуются предложенные в качестве мер стабильности частоты параметры в частотной области (фурье-преобразований (разд. III) и во временной области (разд. IV).

<sup>1)</sup> Опубликована также в форме технического документа НБС № 394 в октябре 1970 г.

В разд. V особо подчеркивается роль передаточных функций, которые позволяют вычислять параметры временной области (дисперсии) по известным параметрам частотной области (спектральным плотностям).

До сих пор мы упоминали только о широко распространенных в настоящее время основных понятиях, а именно о спектральных плотностях флюктуаций фазы и частоты и о двухвыборочной дисперсии усредненных (относительных) флюктуаций частоты. Однако исследователями были предложены и другие понятия, приводящие к новым мерам стабильности во временной области, которые, как предполагается, должны обладать определенными преимуществами по сравнению с двухвыборочной дисперсией. Эти подходы описываются в разд. VI—VIII, причем особый упор делается на соответствующих передаточных функциях, связывающих новые параметры со спектральными плотностями. Приследивается также их связь с более распространенными понятиями. Следует признать, что большинство новых параметров не получило широкого распространения. Возможно, это объясняется тем, что их свойства не получили достаточно четкого разъяснения. В наши цели входит не выработка рекомендаций по использованию каких-либо новых параметров, а попытка как можно яснее продемонстрировать их потенциально интересные особенности и достоинства. Читателям предлагается по возможности проверить их пригодность.

Касаясь экспериментальных исследований, укажем, что построено множество испытательных установок для измерения нестабильности частоты как в частотной, так и во временной областях. Их детальное техническое описание выходит за рамки данной статьи, тем не менее в разд. IX упоминаются некоторые типичные особенности таких систем.

Итак, цель настоящей статьи заключается в том, чтобы дать широкий обзор опубликованного материала по способам описания нестабильности фазы и частоты, включая как классические методы, так и сравнительно малораспространенные приемы. Поскольку многие идеи развиты в литературе весьма детально, здесь можно рассмотреть лишь основные моменты. Мы пытались придать изложению материала самостоятельный характер, чтобы в нем мог разобраться и неспециалист. Для более детального изучения предмета читателю следует обратиться к цитируемой литературе<sup>2)</sup>. При ее выборе ставилась цель не привести исчерпывающий перечень, а указать лишь важнейшие работы.

## II. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Прежде чем перейти к математическим моделям, примем довольно общее определение нестабильности частоты как любого нежелательного отклонения частоты от ее номинального значения  $\nu_0$ . Иными словами, стабильность частоты выражает степень постоянства частоты источника в течение заданного промежутка времени. На практике часто говорят о стабильности, хотя с точки зрения приложений ограничивающим

<sup>2)</sup> В целях достижения единообразия во всех частях статьи некоторые из употребляемых авторами обозначений иногда подвергались изменениям.

фактором служит нестабильность. Кроме того, данные измерений представляют собой величины, значительно меньшие единицы (например,  $10^{-11}$  и т. п.), которые в действительности выражают относительную (или нормированную) нестабильность частоты.

Таким образом, задача заключается в описании нежелательных отклонений частоты, которые в силу разных физических причин, рассматриваемых в данном разделе, зависят от времени.

Для квазисинусоидального выходного сигнала генератора необходима некоторая математическая модель, поскольку из самой концепции нестабильности частоты сразу же следует, что сигнал с самого начала не является чистой синусоидой. Прежде чем перейти к разработке этой модели, целесообразно подчеркнуть существующую дихотомию между детерминированными и случайными изменениями частоты сигнала на выходе генератора.

#### А. Детерминированные и случайные изменения частоты

Из-за действия разных физических механизмов частота сигнала на выходе любого реального источника (даже наилучшего качества) непрерывно изменяется во времени. Типичны следующие изменения.

1) Систематические изменения, называемые также уходами или дрейфами. Они могут быть вызваны старением материала резонатора (например, в случае кварцевых генераторов), однако их наблюдают и в атомных стандартах частоты (например, в некоторых промышленных образцах цезиевых стандартов уход частоты составляет величину порядка  $10^{-13}$  за год). Такие чрезвычайно медленные изменения часто называют «долговременной нестабильностью» и выражают в виде числа, умноженного на  $10^{-x}$  и характеризующего изменения частоты в час, сутки, месяц или год в зависимости от типа устройства или характера применения. Никаких статистических методов для оценки детерминированных процессов не требуется.

2) Детерминированные периодические отклонения вследствие паразитной частотной модуляции (ЧМ) периодическими сигналами, происходящей, например, с частотой источника питания или ее гармоник. В ряде случаев квазипериодические изменения частоты могут возникать за счет наводимой ЧМ, которая может быть связана с температурой, вибрациями, давлением и т. д. Эти обусловленные внешней средой факторы могут, конечно, вызывать и более нерегулярные флюктуации частоты.

3) Случайные флюктуации, вызываемые шумами, как, например, тепловым, дробовым или фликкер-шумом, источниками которых служат электронные компоненты. Соответствующие флюктуации частоты часто называют «кратковременной» нестабильностью, так как они становятся все более заметными по мере уменьшения рассматриваемых интервалов времени. Из-за их случайного характера для их описания необходимы статистические методы.

4) Допускается возможность внезапного резкого изменения частоты сигнала генератора, которая принимает новое постоянное среднее значение. Эти скачки частоты описаны в литературе недостаточно, и поэтому неясно, как их трактовать — то ли как до-

полнение других частей модели, то ли просто как неожиданный наблюдаемый аспект рассматриваемых данных [10, 12]. Поскольку пренебрежение этими скачками существенных ошибок не вызывает, приводимые ниже модели их не учитывают.

Стоит отметить, что выражения «долговременный» и «кратковременный» не имеют абсолютного смысла; нельзя указать объективные пределы, справедливые для любых генераторов или любых применений, поэтому предпочтительно точно указывать рассматриваемые длительности. Описываемые в последующих разделах статистические параметры служат мерой нестабильности, обусловленной случайными шумами. Однако в связи с приведенными выше соображениями необходимо рассмотреть некоторые их ограничения.

1) Любой генератор в определенной степени подвержен влиянию окружающей среды, и поскольку мы не можем дать рекомендаций, пригодных для любого возможного случая, предлагаемые определения нестабильности частоты не учитывают факторы окружающей среды. Для правильно спроектированного оборудования большинство подобных эффектов в лабораторных условиях носит второстепенный характер, однако для некоторых применений (например, в случае самолетной аппаратуры) они несомненно могут играть решающую роль. Ясно, что высококачественные генераторы конструируются таким образом, чтобы свести чувствительность к воздействиям окружающей среды к минимуму (например, в атомных эталонах частоты предусматривается магнитное экранирование). Короче говоря, не следует рассчитывать на хорошую стабильность частоты при работе в условиях окружающей среды, отличных от условий измерения [8].

2) Вследствие зависимости статистических параметров от числа выборок в условиях, когда систематические ухода (дрейфы) не отделены от случайных флюктуаций, в большинстве случаев сильно снижается ценность любого статистического показателя. Всегда, когда это возможно, систематические отклонения должны исключаться до статистической обработки. Линейные дрейфы частоты отделяются довольно легко, однако в общем случае устранение дрейфов зачастую представляет собой сложную задачу, и поэтому целесообразно исключать лишь наиболее явный общий уход [9]. В любом случае детерминированные элементы не отбрасываются. Как только устанавливается их наличие, производится вычисление их значений, которые вычитаются перед выполнением статистического анализа и вводятся вновь при окончательной формулировке технических данных генераторов [10].

3) В результате старения характеристики случайных флюктуаций частоты могут изменяться; например, флюктуации частоты цезиевых часов могут возрасти после нескольких лет непрерывной работы [9]. Таким образом, результаты «кратковременных» измерений справедливы лишь в течение ограниченного промежутка времени.

4) Как будет показано в разд. IV, на статистические показатели влияет также частотная модуляция периодическими сигналами.

Получив представление о возможных отклонениях частоты, мы можем теперь перейти к разработке модели квазисинусоидального выходного сигнала генератора.

**В. Модель выходного сигнала генератора:  
Основные определения**

Выходной сигнал идеального (без шумов и дрейфов) генератора можно моделировать чистой синусоидой:

$$V(t) = V_0 \sin 2\pi\nu_0 t, \quad (2.1)$$

где  $V_0$  и  $\nu_0$  — номинальные значения соответственно амплитуды и частоты ( $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ ). Для реальных генераторов модель должна учитывать существующие отклонения от  $V_0$  и  $\nu_0$ . Можно воспользоваться следующим общим выражением:

$$V(t) = [V_0 + \epsilon(t)] \sin [2\pi\nu_0 t + \Phi(t)], \quad (2.2)$$

в котором  $\epsilon(t)$  — случайный процесс<sup>3)</sup>, описывающий флюктуации амплитуды относительно  $V_0$  и называемый также амплитудным шумом (см. подразд. II.D). Прежде чем перейти к  $\Phi(t)$ , подчеркнем, что всякое отклонение частоты немедленно влечет за собой соответствующее отклонение фазы. Точнее, частота (ее мгновенное значение) равна скорости изменения фазы во времени, поделенной на  $2\pi$ . Следовательно,  $\Phi(t)$  означает фазовую модуляцию, которую можно связать с отклонениями частоты, описанными в подразд. II.A. В качестве конкретного примера рассмотрим выражение

$$\Phi(t) = D_1 t^2 + \Delta\Phi \sin 2\pi f_m t + \varphi(t), \quad (2.3)$$

где уход фазы моделируется многочленом второго порядка (соответствующим линейному уходу частоты), периодическая модуляция фазы описывается синусоидой, а  $\varphi(t)$  означает случайный процесс (см. сноску 3), моделирующий так называемый фазовый шум, связанный со случайными флюктуациями частоты.

В данной статье мы будем изучать главным образом случайные нестабильности. Однако в разд. V и VII рассматриваются и другие члены, поскольку они могут оказывать сильное влияние на статистические показатели.

Предполагая амплитудный шум пренебрежимо малым, для исследования случайных флюктуаций фазы и частоты можно воспользоваться следующей упрощенной моделью [8]:

$$V(t) = V_0 \sin [2\pi\nu_0 t + \varphi(t)]. \quad (2.4)$$

По определению, мгновенное значение частоты сигнала равно

$$\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (2\pi\nu_0 t + \varphi(t)) = \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (2.5)$$

<sup>3)</sup> Во многих книгах по статистике действительный случайный процесс обозначается в виде  $\{z_k(t)\}$ ,  $-\infty < t < +\infty$ . Он представляет собой ансамбль действительных функций, который можно охарактеризовать его вероятностной структурой. Любая конкретная функция  $z_k(t)$ , где  $k$  фиксированно, а  $t$  изменяется, называется выборочной функцией. Ее можно рассматривать как результат одного эксперимента. Для частного класса эргодических случайных процессов статистическую информацию о случайном процессе в целом можно получить при соответствующем анализе одной произвольной выборочной функции. Ради краткости символ  $\{ \}$  и индекс  $k$  мы будем здесь опускать. Для эргодического процесса индекс  $k$  не нужен, так как любая выборочная функция может служить типичным представителем всех других выборочных функций.

Это соотношение можно переписать в виде

$$\nu(t) = \nu_0 + \Delta\nu(t), \quad (2.6)$$

причем

$$\Delta\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (2.7)$$

описывает случайный процесс, моделирующий частотный шум. Для высококачественных генераторов, конечно,

$$|\Delta\nu(t)| \ll \nu_0 \quad (2.8)$$

на протяжении практически всего рассматриваемого промежутка времени  $t$ .

Полезным параметром служит мгновенное относительное (или нормированное) отклонение частоты  $y(t)$ , определяемое в виде

$$y(t) = \frac{\Delta\nu(t)}{\nu_0}. \quad (2.9)$$

Интерес к такой безразмерной величине связан с тем, что она остается неизменной при операциях умножения и деления частоты, выполняемых во многих практических системах (в предположении отсутствия шумов в умножителях и делителях). Кроме того, она облегчает сравнение источников с разными номинальными значениями частот. Иногда целесообразно ввести другой параметр [8, 68]

$$x(t) = \frac{\varphi(t)}{2\pi\nu_0}, \quad (2.10)$$

который описывает фазу, выраженную в единицах времени (и иногда называется «фазовым» временем). Величина  $x(t)$  выражает также мгновенное отклонение по времени сигнала часов, синхронизируемых генератором с частотой  $\nu(t)$ . Справедливо следующее выражение:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}. \quad (2.11)$$

**С. Математические трудности (недостатки модели)**

Только что мы ввели понятия фазового шума и частотного шума и промоделировали их соответственно случайными процессами  $\varphi(t)$  и  $\Delta\nu(t)$ . Теория случайных процессов разработана хорошо<sup>4)</sup> и должна применяться с максимально возможным уровнем математической строгости. Связанные с этим проблемы обсуждаются ниже, однако с самого начала следует подчеркнуть, что модели служат для отражения мира физических явлений, который настолько сложен, что многие детали моделями не учитываются, так как в противном случае последними было бы невозможно пользоваться. С другой стороны, для упрощения работы с моделью ей придают свойства, которые не

<sup>4)</sup> По этому вопросу написано много учебных пособий, к которым и следует обратиться для выяснения подробностей.

имеют прямых аналогий в реальном мире (общезвестным примером служит стационарность случайных процессов). Обсуждению этих проблем посвящены работы Слепяна [11] и Барнса [10, 12], в которых рассмотрены недостатки моделей применительно к изменению стабильности.

1) *Стационарность фазового шума.* Стационарность случайного процесса представляет собой свойство, имеющее точную математическую формулировку<sup>4)</sup> и заключающееся в том, что его статистические характеристики независимы от времени. Ограничения, связанные с продолжительностью физических экспериментов, ясно свидетельствуют, что стационарность может быть свойством лишь модели. Следовательно, вопрос заключается в том, можно ли и как следует пользоваться стационарными моделями. Поскольку нам требуются модели, которые достаточно хорошо описывают существенные измеримые свойства реальных систем [8] и поскольку стационарные модели легко использовать, свойство стационарности не следует исключать из рассмотрения.

При моделировании шумов генератора очень удобно допущение о стационарности  $\varphi(t)$ , поскольку многие теоретические результаты, и особенно те из них, которые относятся к корреляционным функциям и спектральным плотностям, справедливы лишь в этом случае [5].

Не следует, однако, злоупотреблять этим допущением при анализе флюктуаций фазы и частоты, связанных соотношением (2.7), которое можно переписать в виде [13]

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t 2\pi\Delta\nu(\theta) d\theta. \quad (2.12)$$

В предположении, что частотный шум моделируется стационарным процессом  $\Delta\nu(t)$  (при условии подтверждения этого свойства физическими соображениями), из (2.12) следует, что случайный процесс  $\varphi(t)$  в общем случае нестационарен, а при таком условии нельзя пользоваться даже корреляционной функцией  $R_\varphi(\tau)$  фазового шума, которая широко применяется в работах по стабильности частоты. В качестве конкретного примера укажем, что белый шум, действующий внутри замкнутой петли генератора, дает так называемый фазовый диффузионный процесс, являющийся аналогом математически идеального броуновского движения [12, 13] (по крайней мере, если не учитывать эффекты ограниченности полосы частот, возникающие в реальных генераторах).

Итак, допущение о стационарности  $\varphi(t)$  удобно, однако необходимо удостовериться в том, что оно не противоречит ни другим характеристикам модели (например, свойствам  $\Delta\nu(t)$ ), ни каким-либо физическим соображениям.

2) *Существование мгновенного значения частоты.* Стационарный случайный процесс вполне может и не иметь производной (он дифференцируем в смысле среднего квадрата, если его корреляционная функция имеет производные не ниже второго порядка). Если такое утверждение будет верно в отношении фазового шума, то это будет означать, что с математической точки зрения мгновенное значение частоты не определено. Такая ситуация может возникнуть в тех случаях, когда модель учитывает дискретные скачки

фазы [13], а также в случаях фазового диффузионного процесса типа идеального броуновского движения [14], при этом нельзя пользоваться даже понятием мгновенного значения частоты, определяемым выражением (2.5).

Однако следует иметь в виду, что это недостаток модели, а не устройства [12]. Вследствие ограниченности полосы частот, характерной для реальных цепей, флюктуации можно моделировать процессами, имеющими производные любого порядка.

Таким образом, оперировать с мгновенным значением частоты, представляющим собой ключевое понятие для описания стабильности частоты, допустимо, лишь когда оно правильно определено математически.

3) *Нестационарные модели.* Отмеченные ограничения, связанные с допущением о стационарности, наводят на мысль о том, что для некоторых задач требуются нестационарные модели. Правда, подобные модели редко оказываются пригодными для описания нестационарности частоты генераторов, за исключением, быть может, моделей на основе процессов со стационарными приращениями, относящихся к особому классу нестационарных процессов [15, 16]. Тем не менее для получения пригодной для работы модели какую-то нестационарность задавать приходится.

Очень часто фликкер-шумы и другие низкочастотные расходящиеся шумы (определяемые в подразд. III.E) связывают со свойствами нестационарности, однако и в данном случае не следует смешивать экспериментальные данные с математической моделью. Зачастую конкретный набор данных можно отобразить как стационарной, так и нестационарной моделью [12]. С точки зрения эксперимента ни одна модель по точности не лучше и не хуже любой другой; стационарные модели, как правило, предпочтительны ввиду их простоты (например, разработана стационарная модель для частотного фликкер-шума [17]).

На сегодняшний день нестационарные случайные процессы представляют собой недостаточно изученную отрасль статистики, хотя в этой области уже сделано многое (см., например, работу [18]). Следует иметь представление об этих достижениях, так как они могут оказаться полезными для описания свойств генераторов.

#### Д. Амплитудный шум

В большинстве исследований стабильности частоты амплитудным шумом  $\epsilon(t)$ , фигурирующим в соотношении (2.2), пренебрегают, поскольку:

- 1) он не дает прямого вклада в нестабильность частоты, хотя в нелинейных устройствах может иметь место преобразование АМ — ФМ;
- 2) в большинстве высококачественных генераторов предусматривается определенная методика стабилизации амплитуды, и поэтому ухудшение спектральной чистоты (определяемой в подразд. III.F) за счет  $\epsilon(t)$  здесь обычно меньше, чем за счет  $\varphi(t)$ . Однако расчеты показывают, что, когда доминирует внешний аддитивный шумовой процесс, эти компоненты вносят равные вклады [9, 19];
- 3) во многих устройствах в качестве связующего звена с стандартом частоты используются огра-

нительные ступени, в результате чего наибольшая часть АМ-шума исключается. Таким образом, АМ-шум представляет собой проблему в тех случаях, когда сигнал обрабатывается нелинейными устройствами или же когда основная задача заключается в обеспечении спектральной чистоты сигнала, поскольку АМ-шум прямо ухудшает эту характеристику (см. (3.13)).

**III. ОПИСАНИЕ СТАБИЛЬНОСТИ ЧАСТОТЫ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ ФУРЬЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

В этом разделе рассматриваются случайные флуктуации фазы, частоты, а также относительные флуктуации частоты, определяемые соответственно соотношениями (2.4), (2.7) и (2.9). Так как это случайные величины, то для их описания необходимы статистические параметры. Некоторые из них, как, например, корреляционные функции и спектральные плотности, широко применяются в теории стационарных случайных процессов.

Анализ в частотной области фурье-преобразований играет очень важную роль как в теоретическом плане (с точки зрения содержащейся информации), так и для прикладных целей (с точки зрения распределения мощности в частотной области, являющегося важнейшей характеристикой для многих инженеров), поэтому понятие спектральной плотности широко используется для описания стабильности генераторов [3, 5, 8].

В дальнейшем слово «частота» будет использоваться в двух различных значениях, которые не следует путать: как зависящая от времени частота реального сигнала на выходе генератора  $\nu(t)$  и как независимая от времени частота фурье-преобразований, обозначаемая через  $f$ , которая будет фигурировать в выражениях для спектральных плотностей.

**А. Спектральная плотность частотного шума**

В предположении, что частотный шум моделируется стационарным процессом  $\Delta\nu(t)$ , спектральная плотность  $S_{\Delta\nu}(f)$  будет определяться как преобразование Фурье корреляционной функции [5]

$$R_{\Delta\nu}(\tau) = \langle \Delta\nu(t) \Delta\nu(t - \tau) \rangle, \quad (3.1)$$

где через  $\langle \rangle$  обозначено среднее значение величины в скобках. Точнее, этот метод дает двустороннюю (TS) спектральную плотность, определяемую в области  $-\infty < f < +\infty$ . Это действительная неотрицательная четная функция от  $f$  (рис. 1):

$$S_{\Delta\nu}^{(TS)}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\Delta\nu}(\tau) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau. \quad (3.2)$$

При теоретических исследованиях двусторонние спектральные плотности часто упрощают расчеты. Для экспериментальных целей используют одностороннюю спектральную плотность  $S_{\Delta\nu}(f)$ , определяемую следующим образом:

$$S_{\Delta\nu}(f) = 2S_{\Delta\nu}^{(TS)}(f), \quad \text{при } 0 \leq f < \infty, \text{ нуль при других } f \quad (3.3)$$

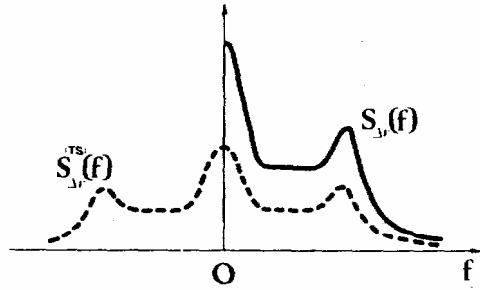


Рис. 1. Двусторонняя и односторонняя спектральные плотности частотных флуктуаций.

На практике эту величину можно получить, например, с помощью операций фильтрации, возведения в квадрат и усреднения, выполняемых над образцами записи  $\Delta\nu(t)$ , или посредством цифровых методов, использующих быстрое преобразование Фурье (БПФ). Конечно, как и для всякого статистического параметра, экспериментальным путем можно получить только оценку [20].

Средний квадрат  $\Delta\nu(t)$  связан с площадью под  $S_{\Delta\nu}(f)$  следующим соотношением:

$$\langle \Delta\nu^2(t) \rangle = \int_0^{\infty} S_{\Delta\nu}(f) df. \quad (3.4)$$

Размерность  $S_{\Delta\nu}(f)$  выражается как Гц<sup>2</sup>/Гц, т. е. в герцах.

Аналогичным образом вводится спектральная плотность  $y(t)$ , обозначаемая через  $S_y(f)$ ; ее размерность выражается как Гц<sup>-1</sup>.

Подкомитет ИИЭР предложил пользоваться величиной  $S_y(f)$  в качестве показателя стабильности частоты в частотной области фурье-преобразований. Эта характеристика дает возможность наглядного сравнения генераторов с различными номинальными частотами, для чего на одном графике строятся соответствующие кривые  $S_y(f)$ .

Следует иметь в виду, что корреляционные функции и спектральные плотности несут одну и ту же информацию о случайном процессе, однако для инженерных целей очень часто более желательно пользоваться спектральной плотностью.

**В. Спектральная плотность фазового шума**

Несмотря на трудности, которые могут возникнуть в связи с предположением о стационарности фазового шума, очень удобно считать  $\varphi(t)$  стационарным процессом. В этом случае, зная  $R_\varphi(\tau)$ , можно определить его одностороннюю спектральную плотность  $S_\varphi(f)$ , размерность которой выражается как рад<sup>2</sup>/Гц.

Величина  $S_\varphi(f)$  находит широкое применение по нескольким причинам:

- 1) она измеряется хорошо известным методом фазового детектора, реализованным во многих лабораториях (см. разд. IX);
- 2) очень проста ее связь с  $S_y(f)$ ; измерение рекомендуется производить на основе соотношения (3.7);
- 3) при определенных допущениях эта величина позволяет получить оценку спектральной чи-

стоты сигнала, прямое измерение которой в случае высококачественных источников зачасую оказывается затруднительным (см. подразд. III.F).

### С. Связь между показателями нестабильности в частотной области

Из соотношения (2.9) имеем

$$S_y(f) = \frac{1}{\nu_0^2} S_{\Delta\nu}(f). \quad (3.5)$$

Из выражения (2.7) видно, что величина  $2\pi\Delta\nu(t)$  представляет собой производную по времени от  $\varphi(t)$ ; следовательно, для частотной области справедливо соотношение

$$S_{\Delta\nu}(f) = f^2 S_\varphi(f). \quad (3.6)$$

Объединяя (3.5) и (3.6), получаем

$$S_y(f) = \left(\frac{f}{\nu_0}\right)^2 S_\varphi(f). \quad (3.7)$$

Таким образом, эти три спектральные плотности несут по существу одну и ту же информацию, но каждая из них имеет свой оптимальный класс применений.

Можно ввести также спектральную плотность  $S_x(f)$  ошибки по времени  $x(t)$ , определяемой формулой (2.10), причем

$$S_y(f) = 4\pi^2 f^2 S_x(f). \quad (3.8)$$

Наконец, можно отметить, что вообще модулирующие процессы  $\varphi(t)$  и  $\Delta\nu(t)$  изменяются медленно по сравнению с несущей  $\sin 2\pi\nu_0 t$  и поэтому их спектральные плотности принимают существенные значения только при частотах  $f$ , значительно меньших  $\nu_0$ .

### Д. Оценка спектральных плотностей

Спектральные плотности — это теоретические понятия, соответствующие процессам бесконечной длительности, бесконечной полосе частот и истинным средним значениям. На практике располагают процессами лишь конечной длительности, а анализаторы спектра характеризуются частотными окнами ненулевой ширины, ограниченным динамическим диапазоном, определенными частотами качания (в моделях с качанием частоты), нижней и верхней граничными частотами фурье-преобразований и т. д.

В результате точность экспериментальных данных о спектральных плотностях ограничивается несколькими факторами.

1) Диапазон частот фурье-преобразований ограничен. Имеется ряд образцов низкочастотных аналоговых анализаторов спектров с нижней граничной частотой  $f$  около 1 Гц, а с применением цифровых методов на основе БПФ можно получить примерно  $10^{-3}$  Гц. Верхняя граничная частота типичных образцов низкочастотных анализаторов составляет десятки килогерц.

2) Из-за конечности набора данных наблюдения возникают статистические ошибки [20], поэтому вся-

кому экспериментальному результату следует поставить в соответствие определенные границы погрешности. Имеются и другие ошибки, связанные с методами сбора и обработки данных, причем возможны систематические ошибки, превышающие 10 дБ, типичные же их значения составляют, по-видимому, несколько децибел. Точность 0,2 дБ можно получить лишь при особо тщательном выполнении операций, включая учет влияния формы характеристик фильтров анализатора [21].

3) Некоторые анализаторы дают спектральные плотности лишь для дискретных значений  $f$  и поэтому могут не зафиксировать узкие линии, соответствующие периодической модуляции.

Тем не менее при описании стабильности понятие спектральной плотности играет важную роль, поскольку она, как это показано в следующем подразделе, обеспечивает однозначную идентификацию шумовых процессов в реальных генераторах.

### Е. Модель спектральной плотности в виде степенной функции

Данные измерений, проведенных во многих лабораториях с различными источниками, включая кварцевые генераторы, лазеры, пассивные атомные стандарты и другие СВЧ-генераторы, свидетельствуют, что экспериментальные результаты, по-видимому, вполне удовлетворительно описываются степенными функциями. Установлено [8], что  $S_y(f)$  целесообразно представить следующей моделью:

$$S_y(f) = h_\alpha f^\alpha. \quad (3.9)$$

В типичном случае показатель степени  $\alpha$  принимает целочисленные значения  $-2, -1, 0, +1, +2$  и характеризует вид шума. Постоянная  $h_\alpha$  служит мерой уровня шума. Можно рассматривать также и нецелочисленные значения  $\alpha$ .

Для конкретного генератора  $S_y(f)$  состоит из суммы двух или трех таких членов, остальными же компонентами можно пренебречь.

1) *Классификация степенных функций.* При целочисленных показателях степени можно пользоваться классической терминологией и считать шум с постоянной спектральной плотностью (независимой от  $f$ ) «белым шумом», шум со спектральной плотностью, изменяющейся по закону  $f^{-1}$ , — «фликкер-шумом», а по закону  $f^{-2}$  — «шумом случайных блужданий». Эти спектральные плотности сведены в табл. 1.

Заметим, что следует точно указывать, какая из величин (частотный или фазовый шум) представляет интерес, так как и та, и другая могут существовать одновременно. Экспериментальные данные обычно отображают на графике в двойном логарифмическом масштабе, что дает в случае степенных функций прямые линии и позволяет легко определить наклон (если точность измерений не слишком плоха), а по нему установить виды шумов генератора.

2) *Физические источники.* В электронных компонентах всегда имеются источники электрических шумов, генерирующие белый и фликкер-шум. В зависимости от местоположения в схемах генераторов их действие при суммировании с сигналом дает либо фазовую модуляцию (в случае внешних источников шу-



Таблица 1  
Степенная модель спектральных плотностей

$S_y(f)$	$S_v(f)$	Название
$h_2 f^{-2}$	$v_0^2 h_2 f^{-4}$	Частотный шум случайных блужданий
$h_1 f^{-1}$	$v_0^2 h_1 f^{-3}$	Частотный фликкер-шум
$h_0$	$v_0^2 h_0 f^{-2}$	Белый частотный шум
$h_1 f$	$v_0^2 h_1 f^{-1}$	Фазовый фликкер-шум
$h_2 f^2$	$v_0^2 h_2$	Белый фазовый шум

ма), либо частотную модуляцию (внутренние источники) исходными шумовыми процессами [3—5]. Помимо того, так называемые «мультипликативные» шумы в зависимости от характера рассматриваемых физических механизмов непосредственно модулируют фазу или частоту.

Сказанное можно сформулировать более конкретно [22].

а) Частотный шум случайных блужданий обычно связан с воздействием на генератор окружающей среды (температура, вибрации, ударные воздействия и т. д.).

б) Происхождение частотного фликкер-шума пока еще недостаточно ясно, но предполагается, что в кварцевых генераторах их источником служит резонатор, а в атомных стандартах частоты — электронные узлы и окружающая среда [23].

в) Белый частотный шум вызывается источниками аддитивного белого шума, действующими внутри контура обратной связи генератора, например теплового шума [3]. Он присутствует также и в пассивных атомных стандартах, в которых источники белого шума непосредственно модулируют частоту на выходе синхронизированного генератора путем воздействия на управляющий элемент [24].

д) Фазовый фликкер-шум обычно вносится шумящими электронными узлами, например выходными усилителями или умножителями частоты, и может быть уменьшен посредством отрицательной обратной связи по высокой частоте (ВЧ) или за счет подбора компонентов [25].

е) Белый фазовый шум обычно вызывается источниками аддитивного белого шума, внешними по отношению к цепи обратной связи генератора [3]. В этом случае полезна полосовая фильтрация выходного сигнала генератора.

3) Недостатки моделей, основанных на степенных функциях [12]. Степенные функции служат полезными моделями для данных, полученных на ограниченном частотном интервале фурье-преобразований. При экстраполяции на всю частотную область от  $f=0$  до  $f=\infty$ , т. е. за пределы применимости, определяемые результатами наблюдений, возникают математические трудности, как, например, бесконечная мощность и расходимость некоторых показателей стабильности во

временной области. Причина этого заключается в использовании нереалистичной модели, пренебрегающей реальными ограничениями, такими как конечность ширины полосы и конечность длительности, при учете которых расходимости не наблюдаются ни на ВЧ, ни на НЧ. Кроме того, мгновенное значение частоты сигнала, генерируемого любым реальным источником, ограничено, и поэтому модели  $S_y(f)$  с бесконечной площадью физически нереальны.

На практике часто используется модель, основанная на степенных функциях следующего вида [8]:

$$S_y(f) = \begin{cases} \sum_{\alpha=-2}^{+2} h_{\alpha} f^{\alpha}, & 0 \leq f \leq f_h \\ 0, & f > f_h, \end{cases} \quad (3.10)$$

где введена верхняя граничная частота  $f_h$  резкого спада. Иногда важно знать истинную форму кривой в граничной области [6], которая в этом случае должна задаваться. Как будет показано в следующем разделе, показатели нестабильности во временной области иногда зависят от  $f_h$ , поэтому вместе с любым численным результатом следует указывать ее величину, хотя никаких рекомендаций по ее выбору не существует (типичны значения от 1 до 10 кГц).

Нижняя граничная частота в рассматриваемой модели обычно не вводится, так как пригодные для использования показатели во временной области определены таким образом, что для  $S_y(f)$ , задаваемой (3.10), сходимость обеспечивается. К тому же экспериментальные результаты не дают ясного ответа, какую величину следует брать: данные измерений лишь показали, что спектральные плотности типа фликкер-шума простираются вплоть до весьма низких частот фурье-преобразований, например ниже одного периода за месяц, что наблюдалось для кварцевых генераторов [26]. Никакого уплощения пока не отмечалось.

### Г. Спектральная чистота выходного сигнала генератора

Когда речь идет об описании характеристик генераторов в частотной области, целесообразно пользоваться понятием спектральной чистоты, т. е. частотной оценкой качества квазисинусоидального выходного сигнала генератора  $V(t)$ .

Для этой цели используется спектральная плотность  $S_v(f)$  полного сигнала  $V(t)$ , которую часто называют РЧ-спектром<sup>5)</sup>, так как она принимает существенные значения только вблизи  $\nu_0$ . Знание этой величины исключительно важно для ряда применений, как, например, в радиолокации, спектроскопии, при синтезе частот и в технике связи.

Тем не менее  $S_v(f)$  не считают удачным первичным показателем стабильности частоты, так как вклад в  $S_v(f)$  вносят также и амплитудные флюктуации  $\epsilon(t)$  [8]. Кроме того, в самых общих случаях установить связь этой величины с другими показателями стабильности частоты непросто.

Лишь когда АМ-шум пренебрежимо мал, а среднеквадратическое значение (СКЗ)  $\varphi(t)$  много меньше

<sup>5)</sup> Строго говоря,  $\nu_0$  не ограничена областью радиочастот и в зависимости от исследуемого источника может лежать в диапазонах СВЧ, ИК и даже видимого света.



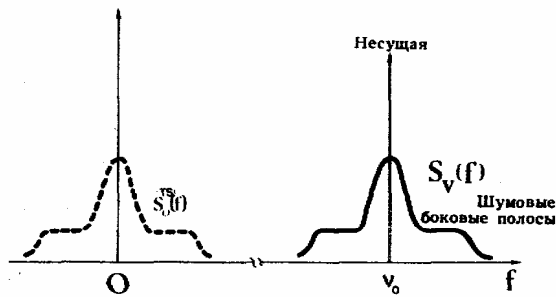


Рис. 2. Спектральная чистота сигнала (РЧ-спектр).

1 рад, можно вывести простое приближенное соотношение [3, 5]

$$S_\nu(f) \approx \frac{V_0^2}{2} \{ \delta(f - \nu_0) + S_\varphi^{(TS)}(f - \nu_0) \}. \quad (3.11)$$

Как видно из рис. 2, непрерывные боковые полосы шума, расположенные вокруг дискретной несущей  $\nu_0$ , имеют при этом форму спектральной плотности фазового шума. Этим так называемым приближением низкого индекса модуляции можно пользоваться в случае высококачественных стандартов частоты, для которых указанные выше допущения выполняются достаточно хорошо. Иногда требуется полная формула, например для расчета спектральной чистоты сигнала после умножения частоты с высоким коэффициентом [27], осуществляемого при измерениях в частотном диапазоне лазеров.

Если пренебрегать АМ-шумом, полное соотношение между спектральной плотностью фазового шума и РЧ-спектром<sup>\*)</sup> запишется в виде [28]

$$S_\nu(f) = \frac{V_0^2}{2} e^{-(\varphi^2)} \left\{ \delta(f - \nu_0) + S_\varphi^{(TS)}(f - \nu_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} [S_\varphi^{(TS)}(f)]^{n-1} S_\varphi^{(TS)}(f) \right\}. \quad (3.12)$$

Здесь через  $\langle \varphi^2 \rangle$  обозначен средний квадрат функции  $\varphi(t)$ , которая, согласно допущению, представляет собой стационарный гауссовский случайный процесс, а через  $[S_\varphi^{(TS)}(f)]^{n-1} S_\varphi^{(TS)}(f)$  обозначено  $n-1$  сверток  $S_\varphi^{(TS)}(f)$  с самой собой с последующим сдвигом относительно несущей частоты  $\nu_0$ . Из-за бесконечности суммы шумовые боковые полосы отличаются по форме от  $S_\varphi(f)$ .

Точнее, в результате увеличения  $\langle \varphi^2 \rangle$  происходит:

- 1) уменьшение мощности несущей (из-за наличия экспоненциального члена);
- 2) изменение формы шумовых боковых полос (благодаря увеличивающемуся вкладу сверток);
- 3) уменьшение отношения несущая/шум по мощности, так как полная площадь под  $S_\nu(f)$  остается постоянной ( $V_0^2/2$ ).

<sup>\*)</sup> РЧ-спектры сигналов со случайной модуляцией по амплитуде, фазе и частоте исследовались рядом авторов, но не в связи с описанием стандартов частоты, а для других целей. См., например, работу Миддлтона [29].

При необходимости можно учесть вклад АМ-шума, используя соотношение

$$S_\nu(f) \approx \frac{V_0^2}{2} \{ \delta(f - \nu_0) + S_\varphi^{(TS)}(f - \nu_0) + S_A^{(TS)}(f - \nu_0) \}, \quad (3.13)$$

где  $S_A^{(TS)}(f)$  — двусторонняя спектральная плотность относительных амплитудных флуктуаций  $A(t) = \epsilon(t)/V_0$ .

Непосредственные измерения спектральной чистоты высококачественных генераторов очень трудно выполнить из-за слишком низких уровней боковых полос, с которыми приходится иметь дело, и ограниченных возможностей даже самых лучших анализаторов ВЧ-спектра. Часто для оценки  $S_\nu(f)$  с помощью формулы (3.11) измеряют  $S_\varphi(f)$ .

#### IV. ОПИСАНИЕ СТАБИЛЬНОСТИ ЧАСТОТЫ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Поскольку нестабильности генераторов представляют собой изменения во времени рассматриваемых величин (фазы и частоты), нестабильность можно охарактеризовать определенной мерой этих изменений на заданном интервале времени  $\tau$ . На этом и базируется так называемое описание во временной области (а точнее, на временном интервале, или в области временных средних). Поскольку речь идет о случайных явлениях, пригодные для рассматриваемых целей показатели и в данном случае выражаются через статистические параметры. Эти величины обычно представляются в виде зависимости от интервала усреднения  $\tau$ , который может изменяться в пределах, скажем, от миллисекунд до нескольких суток, месяцев, лет.

Некоторые важные применения стандартов частоты, например точное измерение времени, основаны на свойствах выходного сигнала во временной области [30]. В этом случае необходим показатель нестабильности именно во временной области, а не в частотной. Описываемые ниже методы применимы не только к шумам со спектральной плотностью в виде степенных функций, но и к шумам других типов.

Главная трудность связана с тем фактом, что в качестве показателей во временной области на самом деле можно рассматривать многие параметры. Ниже сравниваются их свойства и устанавливается связь между ними.

##### А. Основные измерения

Мгновенная частота генератора  $\nu(t)$ , определяемая выражением (2.5), не доступна для наблюдения, так как любой метод измерения частоты обязательно связан с конечным интервалом времени, на протяжении которого производится измерение. Так, например, цифровой измеритель частоты отсчитывает число периодов  $n_k$  входного сигнала, начиная от  $t_k$  на протяжении интервала времени  $\tau$ , который задается его хронометрирующим устройством, работающим от опорного генератора.

Поэтому более полезной величиной, непосредственно связанной с экспериментальным результатом, служит среднее значение  $\nu(t)$  на временном интер-

вале  $\tau$ , начинающемся в момент  $t_k$ , т. е.

$$\langle \nu(t) \rangle_{t_k, \tau} = \nu_0 + \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k + \tau} \Delta \nu(\theta) d\theta = \frac{n_k}{\tau} \quad (4.1)$$

Широко используется нормированная величина  $\bar{y}_k$ , определяемая следующим образом [8]:

$$\bar{y}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k + \tau} y(\theta) d\theta, \quad (4.2)$$

с помощью которой находится

$$\langle \nu(t) \rangle_{t_k, \tau} = \nu_0 (1 + \bar{y}_k) = \frac{n_k}{\tau} \quad (4.3)$$

Используя уравнения (2.7) и (2.9), можно показать, что

$$\bar{y}_k = \frac{\varphi(t_k + \tau) - \varphi(t_k)}{2\pi\nu_0\tau} \quad (4.4)$$

Числитель представляет собой набег по фазе, накопленный за время от  $t_k$  до  $t_k + \tau$  и называемый также первым приращением фазы или разностью фазы первого порядка [30, 31].

Поскольку  $\bar{y}_k$  легко связать с экспериментальными результатами, получаемыми с помощью счетных методов, в дальнейшем эта величина будет использоваться для определения параметров нестабильности во временной области. Точнее, каждое отдельное измерение длительностью  $\tau$  дает одну выборку  $\bar{y}_k$ ; для того чтобы статистическая обработка могла дать имеющий смысл показатель нестабильности на интервале  $\tau$ , необходимы многократные измерения  $\bar{y}_k$ .

### В. Истинная дисперсия [3—6]

Из-за случайных флюктуаций  $y(t)$  в реальных генераторах повторные измерения  $\bar{y}_k$  дают численные значения со случайным разбросом, т. е. получаются выборки некоторой случайной величины. Статистическая характеристика рассеяния  $\bar{y}_k$ , соответствующая каждому значению  $\tau$ , дает некоторый показатель нестабильности во временной области на интервале  $\tau$ .

Для этой цели в статистике широко используется дисперсия  $\sigma^2$  (или стандартное отклонение  $\sigma$ ). В предположении, что  $y(t)$ , а следовательно и  $\bar{y}_k$ , имеет нулевое среднее значение, дисперсия будет равна среднему квадрату  $\bar{y}_k$ :

$$\sigma^2[\bar{y}_k] = \langle \bar{y}_k^2 \rangle. \quad (4.5)$$

Скобки  $\langle \rangle$  означают либо статистическое среднее, вычисляемое по бесконечному числу выборок в заданный момент  $t_k$ , либо среднее по бесконечному временному интервалу, вычисляемое по одной выборке  $y(t)$  (делается допущение об эргодичности  $y(t)$ ). Так как это определение предусматривает бесконечное число выборок или бесконечную длительность, такая дисперсия представляет собой идеализацию и часто называется истинной дисперсией. Она будет обозначаться  $I^2(\tau)$ , чтобы подчеркнуть, что это показатель нестабильности на временном интервале  $\tau$ .

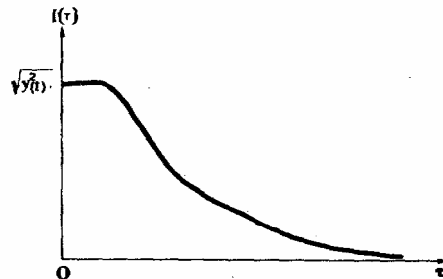


Рис. 3. Нестабильность во временной области. Корень квадратный из истинной дисперсии стационарного частотного шума.

Для стационарных частотных флюктуаций справедливы следующие предельные соотношения, которые можно установить по графику на рис. 3, иллюстрирующему общий вид кривой  $I(\tau)$ :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} I(\tau) = \sqrt{\langle y^2(t) \rangle}, \quad (4.6)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} I(\tau) = 0. \quad (4.7)$$

Первый предел соответствует идеальным измерениям мгновенной частоты ( $\tau=0$ ) и, следовательно, равен среднеквадратическому значению (т. е. стандартному отклонению)  $y(t)$ . Верхнее предельное значение показывает, что при  $\tau=\infty$  стационарные флюктуации полностью усредняются до нуля и разброс результатов должен равняться нулю. Ясно, что ни один из этих пределов не доступен для наблюдения. Убывание  $I(\tau)$  по мере увеличения  $\tau$  свидетельствует о лучшем усреднении стационарных случайных флюктуаций.

Свойства  $I(\tau)$ , а также ограничения, накладываемые на ее применение<sup>\*)</sup>, исследуются в разд. V, для чего устанавливается связь этой величины с  $S_y(f)$ .

### С. Выборочная дисперсия [7, 8]

Истинная дисперсия  $I^2(\tau)$  представляет собой теоретическую идеализацию, так как она относится к бесконечному количеству данных. Практические же оценки этой величины должны исходить из конечного числа выборок  $\bar{y}_k$ . Так называемая выборочная дисперсия определяется по некоторому ансамблю из  $N$  выборок  $\bar{y}_k$ , причем  $k=1, 2, 3, \dots, N$ , а  $t_{k+1}=t_k+T$ . Соответствующий цикл измерений показан на рис. 4, где  $T$  — интервал повторения отдельных измерений длительностью  $\tau$  ( $T=\tau + \text{свободный промежуток времени между измерениями}$ ), а  $t_k$  выбрано произвольно.

Можно дать несколько связанных между собой определений выборочной дисперсии [32].

1) *Первое определение.* Следуя общему определению дисперсии случайной величины  $x$ , а именно  $\sigma^2(x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ , логично сформулировать следующее определение выборочной дисперсии:

$$\sigma_{(1)}^2(N, T, \tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \bar{y}_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{y}_j \right)^2. \quad (4.8)$$

<sup>\*)</sup> В частности, для некоторых видов шума, например для частотного фликкер-шума,  $I^2(\tau)$  не сходится.

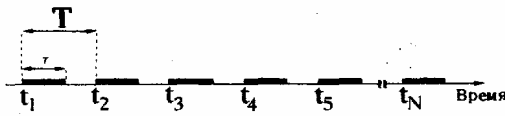


Рис. 4. Цикл измерений во временной области.

Эта величина сама является случайной ( $N$  представляет собой объем выборки). «Доброкачественность» оценки можно охарактеризовать рядом факторов [20], одним из которых служит смещение. Оценка считается несмещенной, если ее среднее значение равно истинному параметру, а именно, если

$$\langle \sigma_{(1)}^2(N, T, \tau) \rangle = I^2(\tau). \quad (4.9)$$

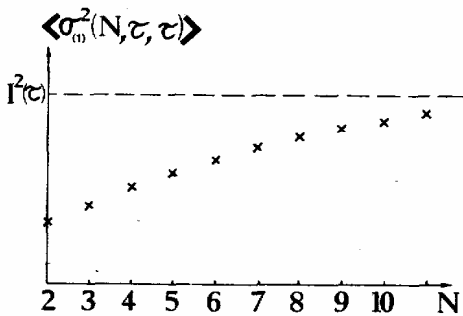
Это равенство должно соблюдаться при любых значениях  $N$ ,  $T$  и  $\tau$  и для любого вида шума. Таким образом, следует тщательно исследовать связь между  $\langle \sigma_{(1)}^2(N, T, \tau) \rangle$  и  $I^2(\tau)$ . Рассмотрим чрезвычайно важный частный случай смежных выборок ( $T = \tau$ ). При этом справедливо следующее соотношение [7, 32]:

$$\langle \sigma_{(1)}^2(N, \tau, \tau) \rangle = I^2(\tau) - I^2(N\tau). \quad (4.10)$$

Для стационарного частотного шума (рис. 5)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \sigma_{(1)}^2(N, \tau, \tau) \rangle = I^2(\tau). \quad (4.11)$$

Следовательно, при конечном  $N$  приведенная выше оценка оказывается смещенной для стационарного частотного шума любого рода, причем величину смещения можно вычислить, зная теоретическое значение  $I^2(N\tau)$ . Приводимые ниже другие определения выборочной дисперсии таковы, что в рамках конкретного определения смещение действительно равно нулю для соответствующего вида шума.

Рис. 5. Зависимость выборочной дисперсии от  $N$  для стационарного частотного шума (первое определение).

2) Второе определение и белый частотный шум. Для белого частотного шума (см. табл. 1) уравнение (5.6) дает  $I^2(\tau) = h_a^2/2\tau$ , следовательно,

$$\langle \sigma_{(1)}^2(N, \tau, \tau) \rangle = \left(1 - \frac{1}{N}\right) I^2(\tau). \quad (4.12)$$

В этом случае несмещенная оценка дается следующим определением:

$$\sigma_{(2)}^2(N, T, \tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left( \bar{y}_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{y}_j \right)^2. \quad (4.13)$$

При  $T = \tau$  и для белого частотного шума

$$\langle \sigma_{(2)}^2(N, \tau, \tau) \rangle = I^2(\tau). \quad (4.14)$$

Множитель  $1 - 1/N$ , фигурирующий в соотношении (4.12), входит в формулы и для других видов стационарного шума, когда  $T$  значительно больше времени корреляции  $y(t)$ , т. е. когда выборки  $y_h$  независимы. Это классический результат статистики [20].

3) Третье определение и белый фазовый шум [32]. Для белого фазового шума с учетом влияния граничной частоты  $f_h$  уравнение (5.6) дает  $I^2(\tau) = h_a^2 f_h / 2\pi^2 \tau^2$  при  $2\pi f_h \tau \gg 1$ . Отсюда

$$\langle \sigma_{(1)}^2(N, \tau, \tau) \rangle = \left(1 - \frac{1}{N^2}\right) I^2(\tau). \quad (4.15)$$

В этом случае для любых  $N \geq 2$  и  $T = \tau$  несмещенной будет оценка следующего вида:

$$\sigma_{(3)}^2(N, T, \tau) = \frac{N}{N^2 - 1} \sum_{i=1}^N \left( \bar{y}_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{y}_j \right)^2. \quad (4.16)$$

Итак, мы сталкиваемся с ситуацией, когда имеется несколько определений выборочной дисперсии, множество величин  $N \geq 2$  и широкий диапазон возможных величин  $T \geq \tau$ . К тому же часто первостепенную роль играет величина  $f_h$  (например, в случае белого фазового шума и фазового фликкер-шума).

Для нашей цели, а именно для выработки рекомендации единственного показателя во временной области, необходимо сделать выбор из ряда возможных вариантов:

#### Д. Двухвыборочная дисперсия при нулевом свободном промежутке

Для наглядного сравнения результатов измерений во временной области необходимо взять какую-то одну выборочную дисперсию при заданных величинах  $N$ ,  $T$  и  $f_h$  ( $\tau$  считается независимой переменной).

Основываясь на работе Аллена [7], подкомитет ИИЭР по стабильности частоты предложил следующий показатель нестабильности во временной области [8]:

- 1) используется среднее значение  $\sigma_{(2)}^2(N, T, \tau)$ , определяемое выражением (4.13), а именно  $\langle \sigma_{(2)}^2(N, T, \tau) \rangle$ , которое часто обозначают как  $\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle$ ;
- 2) размер выборки принимается равным  $N = 2$ ;
- 3) предполагается смежность выборок (нулевой свободный промежуток), т. е.  $T = \tau$ .

Получающийся в результате показатель записывается как

$$\langle \sigma_y^2(2, \tau, \tau) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^2 \left( \bar{y}_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \bar{y}_j \right)^2 \right\rangle. \quad (4.17)$$

Для этой величины широко используется сокращенное обозначение  $\sigma_y^2(\tau)$ :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 \rangle. \quad (4.18)$$

Она известна также как дисперсия Аллена или парная дисперсия.

Целесообразно сделать ряд замечаний.

1) Поскольку операция усреднения, обозначаемая через  $\langle \cdot \rangle$ , предполагает бесконечную продолжительность,  $\sigma_y^2(\tau)$  представляет собой теоретический показатель в том же смысле, что и  $I^2(\tau)$ , однако, как показано в разд. V, он имеет более высокую практическую ценность, так как существует для всех пяти видов степенной функции, встречающихся в реальных генераторах (см. табл. 1). Кроме того, можно разработать простые экспериментальные способы оценивания  $\sigma_y^2(\tau)$  (см. подразд. IV.E).

2) Из обсуждения различных видов выборочных дисперсий следует вывод, что  $\sigma_y^2(\tau)$  представляет собой смещенный показатель во всех случаях, кроме белого частотного шума, однако следует иметь в виду, что в генераторах наблюдаются и другие виды шумов. Из выражений (4.10) и (4.17) можно получить

$$\sigma_y^2(\tau) = 2[I^2(\tau) - I^2(2\tau)]. \quad (4.19)$$

Следующие формулы справедливы соответственно для белого частотного шума и белого фазового шума:

$$\sigma_y^2(\tau) = I^2(\tau) \quad (\text{без смещения}), \quad (4.20)$$

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{3}{2} I^2(\tau) \quad 2\pi f_h \tau \gg 1 \quad (\text{со смещением}). \quad (4.21)$$

3) Выбор  $N=2$  в принятом определении приводит к простой методике измерений, так как требуется иметь дело лишь с парами выборок. В использовании такой величины  $N$  фактически заключается важная особенность определения  $\sigma_y^2(\tau)$ .

4) Хотя никаких рекомендаций относительно величины  $f_h$  не дано, ее следует задавать при получении любых экспериментальных результатов.

#### Е. Оценки двухвыборочной дисперсии

По конечному числу выборок  $y_h$  можно получать лишь оценки  $\sigma_y^2(\tau)$ , и поэтому неизбежно имеет место статистическая неопределенность. В случае  $m$  значений  $y_h$  одна из возможных оценок определяется выражением [8]

$$\hat{\sigma}_y^2(\tau, m) = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} (\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i)^2. \quad (4.22)$$

Эта величина сама является случайной, и ее дисперсией (т. е. дисперсией дисперсии) можно воспользоваться для вычисления границ ошибки на графике зависимости  $\sigma_y(\tau)$  от  $\tau$ . Лесаг и Одуэн [33] показали, что в случае гауссовских шумов границы ошибки (доверительные интервалы) для степенных спектральных плотностей определяются по формуле

$$E_\alpha \approx \sigma_y(\tau) K_\alpha m^{-1/2}, \quad m > 10, \quad (4.23)$$

причем  $K_2 = K_1 = 0,99$ ;  $K_6 = 0,87$ ;  $K_{-1} = 0,77$ ;  $K_{-2} = 0,75$ .

Возможны также и другие способы оценивания  $\sigma_y^2(\tau)$ , которые рассмотрены в работе [34].

В отношении долговременной стабильности (при  $\tau$  порядка месяцев или даже года) следует отметить на-

личие жестких ограничений на величину  $m$ . Во всяком случае, вместе с любыми результатами необходимо указывать и  $m$ .

#### Ф. Связь различных показателей неустойчивости во временной области

Для перехода от  $\langle \sigma_y^2(N_1, T_1, \tau_1) \rangle$  к  $\langle \sigma_y^2(N_2, T_2, \tau_2) \rangle$  (используется второе определение, соответствующее (4.13)) Барнсом [35] были предложены две «смещающие функции», которые относятся к пяти приведенным в табл. 1 степенным законам с целочисленными показателями, а также к случаям промежуточных значений  $\alpha$ . Они записываются в виде

$$B_1 = \frac{\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle}{\langle \sigma_y^2(2, T, \tau) \rangle}, \quad (4.24)$$

$$B_2 = \frac{\langle \sigma_y^2(2, T, \tau) \rangle}{\langle \sigma_y^2(2, \tau, \tau) \rangle}. \quad (4.25)$$

Значения этих величин вычислены и приведены в работе [35].

Заметим, что с помощью  $B_2$  можно вычислить рекомендованный показатель  $\sigma_y^2(\tau)$  по двухвыборочной дисперсии, измеренной со свободным промежутком, при известной крутизне спада спектральной плотности:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{\langle \sigma_y^2(2, T, \tau) \rangle}{B_2}. \quad (4.26)$$

Это выражение имеет практическое значение, так как при использовании счетных методов свободный промежуток между последовательными отсчетами обычно отличен от нуля.

#### В. СВЯЗ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ВО ВРЕМЕННОЙ И ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТЯХ: МЕТОД ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

В целях наиболее полного удовлетворения запросов всех специалистов, использующих генераторы, мы рассмотрели две области — частотную область фурье-преобразований и временную область (область усреднения по времени). Кроме того, для каждого случая мы ввели несколько параметров. Переход от одних показателей в частотной области к другим и связь между показателями во временной области рассмотрены соответственно в подразд. III.C и IV.F.

Перейдем теперь к исследованию уравнений, с помощью которых осуществляется переход от одной области к другой. Большая важность этого вопроса объясняется рядом причин:

- 1) соответствующие соотношения позволяют унифицировать способы описания стабильности частоты;
- 2) с помощью этих соотношений можно перейти от степенных законов, установленных для частотной области, к определенным законам для  $I(\tau)$  или  $\sigma_y(\tau)$ ;
- 3) в силу ограничений, связанных с используемой аппаратурой, измерения стабильности зачастую

выполняются лишь в одной области; зная взаимосвязь между параметрами, можно оценить показатели в другой области.

Как будет показано дальше, в общих соотношениях, связывающих параметры в частотной и временной областях, фигурирует так называемая передаточная функция.

Это представление ниже будет использоваться не только для исследования свойств классических показателей неустойчивости во временной области, но и для введения новых показателей во временной области открывающих новые возможности в методике измерений (разд. VI).

#### А. Зависимость истинной дисперсии от спектральной плотности

Выразим, во-первых, истинную дисперсию  $I^2(\tau)$  через  $S_y(f)$ :

$$I^2(\tau) = \int_0^{\infty} S_y(f) |H_I(f)|^2 df, \quad (5.1)$$

где  $H_I(f)$  — некоторая передаточная функция.

1) Доказательство. Уравнение (4.5) можно переписать в виде

$$I^2(\tau) = \left\langle \left( \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} y(\theta) d\theta \right)^2 \right\rangle \quad (5.2)$$

или же в форме

$$I^2(\tau) = \left\langle \left( \int_{-\infty}^{\infty} y(t) h_I(t_k - t) dt \right)^2 \right\rangle, \quad (5.3)$$

причем

$$h_I(t) = \begin{cases} 0, & t < -\tau \\ \frac{1}{\tau}, & -\tau \leq t \leq 0 \\ 0, & t > 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

В выражение (5.3) входит интеграл, в котором  $y(t)$  свертывается с функцией  $h_I(t)$ , отображающей последовательность элементарных измерений одной выборки  $y_k$  (рис. 6, а). Этот интеграл может описывать выходной сигнал гипотетического фильтра с импульсной характеристикой  $h_I(t)$ , на который поступает сигнал  $y(t)$ . Как известно, спектральная плотность выходного сигнала при этом равна произведению  $S_y(f) |H_I(f)|^2$ , где передаточная функция фильтра  $H_I(f)$  представляет собой преобразование Фурье от  $h_I(t)$  и, следовательно, (рис. 6, б)

$$|H_I(f)|^2 = \left( \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right)^2. \quad (5.5)$$

Таким образом, истинная дисперсия равна среднему квадрату этого псевдывходного сигнала (5.3) и равна площади под его спектральной плотностью, т. е.

$$I^2(\tau) = \int_0^{\infty} S_y(f) \left( \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right)^2 df. \quad (5.6)$$

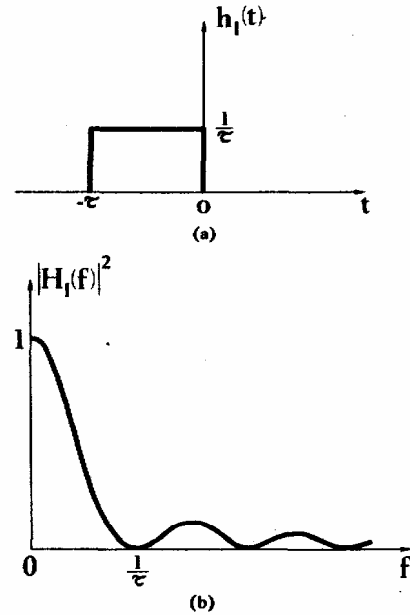


Рис. 6. Последовательность измерений (а) и передаточная функция (б) для истинной дисперсии.

Итак, зная  $S_y(f)$ , истинную дисперсию можно вычислить с помощью интеграла, содержащего передаточную функцию  $(\sin \pi \tau f / \pi \tau f)^2$  [3, 5, 6], причем это условие не ограничивается степенными спектральными плотностями.

В общем случае вышеприведенное соотношение не поддается обращению в замкнутой форме, т. е.  $S_y(f)$  не может быть выражено через  $I^2(\tau)$ . Это служит примером той важной роли, которую спектральная плотность играет при описании случайных процессов.

2) Применения. Некоторые ограничения применимости  $I^2(\tau)$  связаны с тем фактом, что при  $\pi \tau f \ll 1$  передаточная функция оказывается равной единице. В результате истинная дисперсия оказывается очень чувствительной к низкочастотным компонентам  $S_y(f)$ , т. е. к очень медленным флюктуациям частоты на выходе генератора  $v(t)$ .

Конкретнее, здесь возникает большая трудность в отношении частотного фликкер-шума, поскольку модель  $S_v(f) = h_{-1} f^{-1}$  дает  $I^2(\tau) = \infty$ . Таким образом, истинная дисперсия не годится для исследования реальных генераторов, так как в большинстве из них наблюдаются возмущения этим шумом [23]. Это, конечно, недостаток модели, однако практическая полезность  $I^2(\tau)$  также оказывается резко ограниченной, так как результаты реальных измерений  $I^2(\tau)$  зависят от полного числа выборок и при наличии частотного фликкер-шума неограниченно увеличиваются с их ростом [5, 7].

По этой причине истинная дисперсия не нашла широкого распространения в качестве практической меры стабильности, хотя она может быть полезной при теоретических исследованиях на моделях спектральной плотности с «хорошими» свойствами. Так, например, когда  $\varphi(t)$  и  $y(t)$  — гауссовские процессы, а  $y(t)$  стационарно, из  $I^2(\tau)$  можно получить радиочастотный

спектр  $S_y(f)$  [28]:

$$S_y^{(TS)}(f) = \frac{V_0^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2} \tau^2 I^2(\tau)\right) \times \times \cos \omega_0 \tau \exp(-i2\pi f \tau) d\tau. \quad (5.7)$$

Зависимости для белого частотного шума и белого фазового шума получаются соответственно в виде

$$I^2(\tau) = \frac{h_0}{2\tau}, \quad (5.8)$$

$$I^2(\tau) = \frac{h_2 f_h}{2\pi^2 \tau^2} \left[ 1 - \frac{\sin 2\pi f_h \tau}{2\pi f_h \tau} \right]. \quad (5.9)$$

В последнем случае  $f_h$  требуется для выполнения условия сходимости, и при  $2\pi f_h \tau \gg 1$  имеем  $I(\tau) \sim \tau^{-1}$ .

В случае фазового фликкер-шума для сходимости также требуется ввести верхнюю граничную частоту, тогда при  $2\pi f_h \tau \gg 1$  получаем  $I(\tau) \sim \tau^{-1}$  [6]. Таким образом, наклон кривой  $I(\tau)$  оказывается одним и тем же как для белого фазового шума, так и для фазового фликкер-шума, и поэтому различить их по такому графику нельзя.

**В. Зависимость выборочных дисперсий от спектральной плотности**

Рассмотрим второе определение выборочной дисперсии, которое дается уравнением (4.13), поскольку оно было рекомендовано в качестве основы для разработки показателей нестабильности во временной области. Связь между ее средним значением и  $S_y(f)$  для смежных выборок<sup>8)</sup> установить очень просто [37]. Используя определения (4.8) и (4.13) в сочетании с формулой (4.10), получаем

$$\langle \sigma_{(2)}^2(N, \tau, \tau) \rangle = \frac{N}{N-1} [I^2(\tau) - I^2(N\tau)]. \quad (5.10)$$

Подстановка (5.6) в это выражение дает

$$\langle \sigma_{(2)}^2(N, \tau, \tau) \rangle = \frac{N}{N-1} \times \times \int_0^{\infty} S_y(f) \left( \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\sin N \pi \tau f}{N \sin \pi \tau f} \right)^2 \right] df. \quad (5.11)$$

Основной момент связан здесь с передаточной функцией, которая при  $N\pi\tau f \ll 1$  теперь изменяется по закону  $[N(N+1)/3](\pi\tau f)^2$ .

Таким образом, сходимость интеграла при нижнем пределе гарантируется даже для частотного фликкер-шума и частотного шума случайных блужданий, так что выборочная дисперсия оказывается полезным средством описания нестабильности во временной области.

<sup>8)</sup> Полный вывод был дан Катлером [8] для несмежных выборок:

$$\langle \sigma_{(2)}^2(N, T, \tau) \rangle = \frac{N}{N-1} \int_0^{\infty} S_y(f) \left( \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\sin N \pi T f}{N \sin \pi T f} \right)^2 \right] df$$

Увеличение  $N$  повышает чувствительность выборочной дисперсии к компонентам низкочастотной части области фурье-преобразований, причем при  $N \rightarrow \infty$  эта величина приближается к истинной дисперсии.

**С. Зависимость двухвыборочной дисперсии от спектральной плотности**

Поскольку  $\sigma_y^2(\tau)$ , несомненно, наиболее широко используется в качестве показателя стабильности во временной области, рассмотрим связь этой величины с  $S_y(f)$  и применим полученное соотношение к типичным видам частотных отклонений, встречающихся в реальных генераторах.

Подставляя  $N=2$  в соотношение (5.11), получаем:

$$\sigma_y^2(\tau) = \int_0^{\infty} S_y(f) \frac{2 \sin^4 \pi \tau f}{(\pi \tau f)^2} df. \quad (5.12)$$

Передаточная функция такова, что интеграл сходится при нижнем пределе для всех пяти степенных зависимостей, указанных в табл. 1. Как и ранее, обращение этого соотношения в наиболее общих случаях невыполнимо.

Из рис. 7 видно, что передаточная функция  $|H_A(f)|^2$  в выражении (5.12) есть [фурье-преобразование]<sup>2</sup> скачкообразной функции времени  $h_A(t)$ , отображающей последовательность результатов измерений величины  $(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)/\sqrt{2}$ , которая входит в уравнение (4.18), определяющее  $\sigma_y^2(\tau)$ .

Это общее свойство будет использовано в дальнейшем для вывода новых параметров нестабильности во временной области.

1) Применение к модели на основе степенных функций. При подстановке в уравнение (5.12) степенных функций, широко используемых для моделирова-

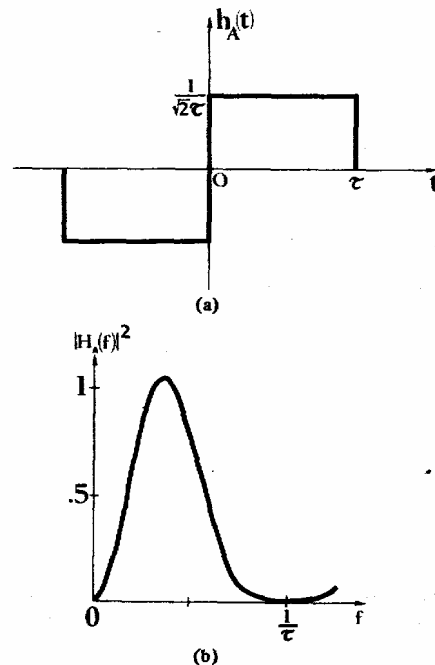


Рис. 7. Последовательность измерений (а) и передаточная функция (б) для двухвыборочной дисперсии.

Таблица 2  
Двухвыборочная дисперсия  $\sigma_y^2(\tau)$  для степенной модели  
спектральной плотности (см. [8, 38])

$S_y(f)$	$\sigma_y^2(\tau)$	Наклон $\sigma_y^2(\tau)$ как функция $\tau$ в двойном логарифмическом масштабе
$h_2 f^2$	$\frac{3 h_2 f_h}{4 \pi^2 \tau^2}$	-2
$h_1 f$	$\frac{h_1}{4 \pi^2 \tau^2} \left\{ 1,038 + 3 \ln 2 \pi f_h \tau \right\}$	$\approx -2$
$h_0$	$\frac{h_0}{2\tau}$	-1
$h_{-1} f^{-1}$	$2 \ln 2 h_{-1}$	0
$h_{-2} f^{-2}$	$\frac{2 \pi^2 h_{-2} \tau}{3}$	+1

ния спектральной плотности, получаются выражения, приведенные в табл. 2.

Из этих результатов следует, что:

1) в случае белого фазового шума и фазового фликкер-шума необходимо ввести верхнюю граничную частоту  $f_h$ , так как при изменении  $S_y(f)$  по закону  $f^2$  или  $f$  существенная часть шумовой «мощности» приходится на высокочастотную область фурье-преобразований. Эта частота должна быть задана, причем приведенные выражения справедливы, только когда  $2\pi f_h \tau \gg 1$ ;

2) дисперсия  $\sigma_y^2(\tau)$  описывается степенными функциями с незначительным отклонением в случае фазового фликкер-шума, вызванным операцией логарифмирования. Таким образом, график  $\sigma_y^2(\tau)$  в двойном логарифмическом масштабе состоит из отрезков прямых, наклон которых легко определить;

3) приведенными результатами можно воспользоваться для перехода из временной области в частотную применительно к модели, использующей степенные функции (3.9), хотя общее выражение (5.12) и наоборот. Так как белому фазовому шуму и фазовому фликкер-шуму соответствует почти одинаковый наклон, то в тех случаях, когда данные измерений во временной области дают зависимость вида  $\sigma_y^2(\tau) \sim \tau^{-1}$ , в установлении вида шумов появляется некоторая неоднозначность (различимость белого фазового шума и фазового фликкер-шума можно повысить, специально изменяя  $f_h$  [6]);

4) для частотного фликкер-шума  $\sigma_y(\tau)$  не зависит от  $\tau$ ; соответствующий плоский участок на графике часто называют «фликкер-уплощением» [23].

Для конкретного генератора  $\sigma_y^2(\tau)$  представляет собой сумму двух или трех членов; так, атомные стандарты на цезиевом пучке часто удовлетворительно моделируются с использованием выражения

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{h_0}{2\tau} + 2 \ln 2 h_{-1}, \quad (5.13)$$

причем величины  $h_0$  и  $h_{-1}$  можно определить по данным измерений  $\sigma_y(\tau)$ , если  $\tau$  изменяется в достаточно широких пределах;

5) дисперсия  $\sigma_y^2(\tau)$  может служить полезным показателем, даже когда модель (3.9) оказывается непроверенной.

2) *Применение к случаю синусоидальной ЧМ.* Даже в наилучших источниках имеет место частотная модуляция паразитными синусоидальными сигналами. Хотя рассмотренные выше показатели стабильности разработаны в расчете на случайные процессы, синусоидальные нестабильности оказывают влияние и на них.

а) *Частотная область фурье-преобразований.* Если предположить, что

$$y(t) = \frac{\Delta \nu_0}{\nu_0} \sin 2\pi f_m t, \quad (5.14)$$

то в спектральной плотности  $S_y(f)$  на модулирующей частоте  $f_m$  будет присутствовать дискретная линия:

$$S_y(f) = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta \nu_0}{\nu_0} \right)^2 \delta(f - f_m). \quad (5.15)$$

Удобным показателем наличия периодических составляющих служит обнаружение в спектральной плотности дискретных линий. Их присутствие обычно не мешает определению наклонов, связанных со случайным шумом.

б) *Временная область.* После подстановки (5.15) в (5.12) получим<sup>9)</sup>

$$\sigma_y^2(\tau) = \left( \frac{\Delta \nu_0}{\nu_0} \right)^2 \frac{\sin^4 \pi f_m \tau}{(\pi f_m \tau)^2}. \quad (5.16)$$

Таким образом, если  $\tau$  равно периоду модулирующего сигнала  $T_m \approx f_m^{-1}$  или одной из его гармоник, то влияние синусоидальной ЧМ отсутствует, поскольку эффект модуляции полностью компенсируется за счет усреднения.

Наихудший случай получается, когда  $\tau$  близко к  $T_m/2$  или к периоду одной из соответствующих гармоник [19, 38].

На практике это означает, что, если не учитывать связь между экспериментальными значениями  $\tau$  и ожидаемой величиной  $T_m$ , то может иметь место некоторый разброс данных из-за осциллирующего характера выражения (5.16) (ясно, что этот разброс создает вклад в зависимости, соответствующие имеющимся случайным шумам).

3) *Применение к случаю линейного ухода частоты.* При линейном уходе частоты (т. е. при  $y(t) = d_1(t)$ ) выражение (5.12) для вычисления  $\sigma_y^2(\tau)$  не годится, так как подходящей модели  $S_y(f)$  для этого случая, насколько известно, не существует.

Прямой расчет для временной области по формуле (4.18) дает

$$\sigma_y(\tau) = \frac{d_1}{\sqrt{2}} \tau. \quad (5.17)$$

Таким образом, линейный уход частоты приводит к зависимости вида  $\tau^{+1}$  для корня квадратного из двухвыборочной дисперсии. Такая зависимость наблюда-

<sup>9)</sup> Тот же результат дают прямые вычисления по формулам (4.18) и (5.14).



ется при больших значениях  $\tau$ , когда перед статистической обработкой не исключен линейный уход частоты. (Заметим, что ни одна из степенных спектральных плотностей такой зависимости не дает. Согласно данным табл. 2, должна наблюдаться спектральная плотность  $S_y(f) = h_{-3} f^{-3}$ , однако в таком случае  $\sigma_y^2(\tau)$  будет расходиться из-за влияния соответствующей передаточной функции.)

Уходы, соответствующие многочленам более высокого порядка, рассматриваются в разд. VIII в связи со структурными функциями.

**VI. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ КАК СРЕДСТВО ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОВЫХ ПАРАМЕТРОВ**

До сих пор речь шла лишь об основах методики описания стабильности частоты.

1) Нами рассмотрены две области и независимо для каждой из них определены соответствующие параметры нестабильности.

2) Установлены соотношения между этими параметрами, включая соответствующую каждому параметру во временной области конкретную передаточную функцию, которая представляет собой преобразование Фурье от последовательности измерений. Подчеркнем, что вид передаточных функций не выбирался заранее, а следовал из определения параметров во временной области.

3) С экспериментальной точки зрения анализаторы спектра, как правило, ассоциируются с измерениями в частотной области, а цифровые электронные счетчики — с измерениями во временной области.

В данном разделе метод передаточной функции будет использоваться как средство определения новых параметров, применение которых открывает новые возможности для оценки характеристик существующих измерительных устройств.

**А. Дисперсия Адамара**

В работе [39] дисперсия Адамара рассмотрена применительно к спектральному анализу высокого разрешения величины  $y(t)$  по данным измерений  $\bar{y}_k$ , т. е. для оценки параметра в частотной области  $S_y(f)$  по данным во временной области, получаемым при помощи цифровых счетчиков.

Для начала очень важно понять ограничения применимости двухвыборочной дисперсии  $\sigma_y^2(\tau)$  в такого рода спектральном анализе.

1) *Ограничения применимости  $\sigma_y^2(\tau)$  в спектральном анализе.* Формула (5.12) показывает, что  $\sigma_y^2(\tau)$  не очень подходит для спектрального анализа  $y(t)$  с высоким разрешением, так как слишком широк главный лепесток передаточной функции (рис. 7, б). Поэтому при заданном значении времени усреднения  $\tau_c$  получаемая в результате измерений оценка  $\hat{\sigma}_y^2(\tau_c)$  не позволит найти точную оценку  $S_y(f_c)$ , где  $f_c \approx 0,37 \tau_c^{-1}$  представляет собой центральную частоту главного лепестка, соответствующую  $\tau = \tau_c$ .

Следствием этой недостаточной селективности служит тот факт, что в случае степенных спектральных плотностей как белому фазовому шуму, так и фазовому фликкер-шуму соответствует примерно один и тот же наклон, т. е.  $\sigma_y^2(\tau) \sim (\tau^{-1})$ .

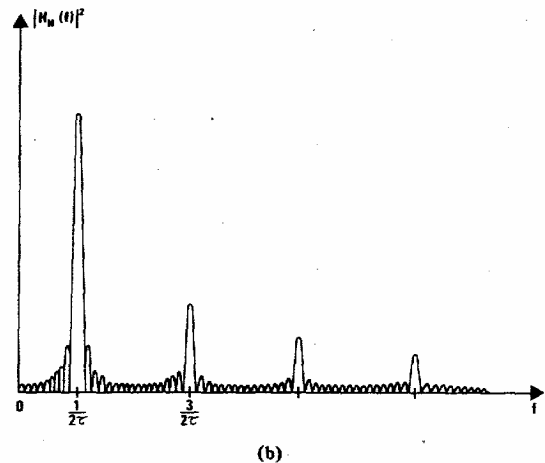
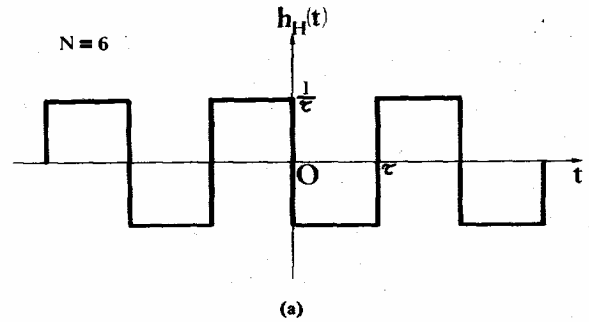


Рис. 8. Последовательность измерений (а) и передаточная функция (б) для дисперсии Адамара.

Вспомним, однако, что величина  $\sigma_y^2(\tau)$  введена и рекомендована лишь в качестве наглядного практического показателя стабильности во временной области и не может служить достаточно мощным средством спектрального анализа.

2) *Определение дисперсии Адамара.* С учетом связи между последовательностями измерений и передаточными функциями дисперсия Адамара будет определяться как такая последовательность измерений, которой соответствует передаточная функция с узким лепестком, отвечающая требованиям спектрального анализа [39]:

$$\langle \sigma_H^2(N, T, \tau) \rangle = \langle (\bar{y}_1 - \bar{y}_2 + \bar{y}_3 - \dots - \bar{y}_N)^2 \rangle. \quad (6.1)$$

Таким образом, дисперсия Адамара<sup>10)</sup> вычисляется по группам из  $N$  выборок  $\bar{y}_k$  ( $k$  принимает значения от 1 до  $N$ ) и связана с  $S_y(f)$  выражением

$$\langle \sigma_H^2(N, T, \tau) \rangle = \int_0^\infty S_y(f) |H_H(f)|^2 df, \quad (6.2)$$

где передаточная функция  $H_H(f)$  представляет собой преобразование Фурье последовательности измерений  $h_H(t)$  (показанной на рис. 8, а для  $N=6$  и  $T=\tau$ ).

В работе [40] показано, что

$$|H_H(f)|^2 = \left( \frac{\sin \pi T f}{\pi f} \right)^2 \left( \frac{\sin N \pi T f}{\cos \pi T f} \right)^2. \quad (6.3)$$

<sup>10)</sup> Величины  $T$  и  $\tau$  имеют тот же смысл, что и для выборочной дисперсии. При  $N=2$  величина  $\sigma_y^2(\tau)$  равна половине  $\langle \sigma_H^2(N, \tau, \tau) \rangle$ .

Передаточная функция характеризуется узким главным лепестком с центром на частоте фурье-преобразований  $f_1 = (2T)^{-1}$ . Как показывает расчет эквивалентной ширины полосы [40], ширина этого лепестка с ростом  $N$  уменьшается.

Прежде чем обсуждать практическую полезность дисперсии ( $\sigma_{H}^2(N, T, \tau)$ ), следует получить представление о свойствах этой величины ограничениях и принять их во внимание.

3) *Ограничения дисперсии Адамара.* И в данном случае ограничения связаны с формой передаточной функции. Хотя она имеет узкий главный лепесток, другие ее особенности оказываются нежелательными.

а) В случае смежных выборок ( $T = \tau$ ) появляются паразитные лепестки на нечетных гармониках центральной частоты главного лепестка  $f_1$ . При измерениях ( $\sigma_{H}^2(N, \tau, \tau)$ ) все они вносят вклад в измеряемую величину, что может привести к серьезным погрешностям в оценке  $S_y(f)$ . В случае белого фазового шума, когда  $S_y(f) = h_2 f^2$ , каждый лепесток на гармонике создает тот же вклад в измеренную дисперсию Адамара, что и главный лепесток (который в идеале должен быть единственным).

б) Как видно из рис. 8,  $b_1$  передаточная функция содержит также большие боковые лепестки, окружающие главный лепесток с центром на частоте  $f_1$ .

4) *Улучшение свойств дисперсии Адамара.* Ограничение а) можно частично исключить, введя свободные промежутки между последовательными выборками  $y_k$ , т. е. выбирая  $T > \tau$ . Оптимальный свободный промежуток  $\tau_D = \tau/2$  обеспечивает исключение откликов на 3-, 9-, 15-й и т. д. гармониках; в этом случае  $T = 3\tau/2$ .

Для уменьшения числа гармоник были предложены и более сложные последовательности измерений, предусматривающие псевдосинусоидальное взвешивание выборок  $y_k$ , в результате которого происходит подавление 3-, 5-, 7- и 9-й гармоник [31, 40]. Кроме того, были предложены методы аналоговой фильтрации, дающие возможность исключить паразитные отклики на гармониках [41].

Ограничение б) можно частично или даже полностью исключить путем умножения каждого  $y_k$  в группе из  $N$  выборок на соответствующий весовой множитель. Паразитные боковые лепестки полностью подавляются посредством весовой обработки выборок биномиальными коэффициентами (БК) [39]. Имеем

$$\langle \sigma_{H_{BC}}^2(N, T, \tau) \rangle = \left\langle \left( \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \binom{N-1}{k-1} \bar{y}_k \right)^2 \right\rangle. \quad (6.4)$$

В результате соответствующая передаточная функция примет вид [31, 40]

$$|H_{H_{BC}}(f)|^2 = 2^{2(N-1)} \left( \frac{\sin \pi f T}{\pi f} \right)^2 \sin^{2(N-1)} \pi f T. \quad (6.5)$$

5) *Практическое использование дисперсии Адамара.* Если принять определенные меры по исключению ограничений, дисперсия Адамара окажется полезным средством в экспериментальной практике, так как на ее основе можно расширить частотную область измерений, распространив ее вплоть до весьма низких частот порядка  $10^{-3}$  Гц за счет увеличения  $T$  и  $\tau$  во вре-

менной области. В силу трудностей, связанных с аппаратными средствами, диапазон аналоговых анализаторов спектра обычно ограничен частотами порядка 1—10 Гц.

Для оптимального свободного промежутка  $\tau_D = \tau/2$  рабочее приближение формулы (6.2), которое позволяет получить оценку  $S_y(f)$ , имеет вид

$$\hat{S}_y(f_1) \approx \frac{\tau}{N} \left\langle \sigma_{H}^2 \left( N, \frac{3\tau}{2}, \tau \right) \right\rangle, \quad (6.6)$$

где  $T = 3\tau/2$ , а  $f_1 = 1/2T = 1/3\tau$ . При помощи этой формулы получают оценки спектральной плотности по результатам измерений во временной области с помощью цифровых счетчиков. Сама дисперсия Адамара, конечно, оценивается на основании конечного числа групп из  $N$  выборок  $y_k$ .

## В. Метод передаточной функции

Во всех предыдущих методах, относящихся к временной области, любой параметр, скажем  $\sigma^2(\tau)$ , определялся соответствующей последовательностью измерений  $h(t)$  (скачкообразной функцией, связывающей такие величины, как  $N, T, \tau$ , и, быть может, весовые множители), после чего он связывался с  $S_y(f)$  уравнением

$$\sigma^2(\tau) = \int_0^{\infty} S_y(f) |H(f)|^2 df, \quad (6.7)$$

где  $H(f)$  — преобразование Фурье от  $h(t)$ . Измерение этого параметра производилось посредством счетчика, запрограммированного на выбранную последовательность измерений.

В так называемом методе передаточной функции, разработанном Рютманом [42], принята противоположная точка зрения: параметр  $\sigma^2(\tau)$ , фигурирующий в выражении (6.7), определяется соответствующей передаточной функцией  $H(f)$ , вид которой выбирается заранее даже в том случае, если отвечающей ей последовательности измерений во временной области не существует (т. е. даже если обратное преобразование Фурье от  $H(f)$  не является скачкообразной функцией). Таким образом, можно рассматривать более широкий класс передаточных функций, поскольку требования о том, чтобы они были преобразованиями Фурье от скачкообразных функций, не ставится. Однако для измерения определяемого таким образом параметра счетные методы уже не годятся, так как при этом методе  $y_k$  в явном виде не появляются. Пригодный способ измерений будет описан ниже.

Чтобы проиллюстрировать полезность данного метода, исследуем два вида дисперсии, определяемые своими передаточными функциями: «верхнечастотную дисперсию» (high-pass variance) и «полосовую дисперсию» (bandpass variance).

1) *Верхнечастотная дисперсия.* Прежде всего, удобно переписать (6.7) в виде

$$\sigma^2(\tau) = \frac{8}{\omega_0^2 \tau^2} \int_0^{\infty} S_\varphi(f) |H_\varphi(f)|^2 df, \quad (6.8)$$

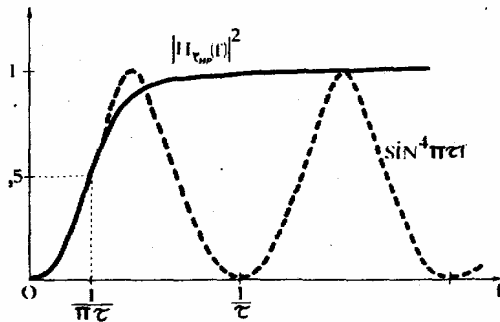


Рис. 9. Передаточная функция для верхнечастотной дисперсии.

Поскольку само выражение (5.12) можно переписать следующим образом:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{8}{\omega_0^2 \tau^2} \int_0^\infty S_\varphi(f) \sin^4 \pi f \tau df. \quad (6.9)$$

Индекс  $\varphi$  в выражении  $|H_\varphi(f)|^2$  указывает, что  $|H_\varphi(f)|^2$  перемножается со спектральной плотностью фазового шума. Новые виды дисперсии будут называться в соответствии с формой соответствующих функций  $|H_\varphi(f)|^2$ .

Верхнечастотная дисперсия  $\sigma_{НР}^2(\tau)$  определяется подстановкой передаточной функции фильтра верхних частот Баттерворта второго порядка в (6.8):

$$|H_{ФНР}(f)|^2 = \frac{f^4}{f_c^4 + f^4} \quad (6.10)$$

где граничная частота  $f_c$  такова, что  $|H_{ФНР}(f_c)|^2 = 0,5$ . Связь между  $f_c$  и величиной  $\tau$  в выражении  $\sigma_{НР}^2(\tau)$  выбрана так, что по определению  $f_c = (\pi\tau)^{-1}$ <sup>11)</sup>. Форма функций  $|H_{ФНР}(f)|^2$  и  $\sin^4 \pi f \tau$  из соотношения (6.9) показана на рис. 9; при  $\pi f \tau \ll 1$  они почти совпадают, однако  $|H_{ФНР}(f)|^2$  не является периодической функцией.

В табл. 3 приведены выражения для  $\sigma_{НР}^2(\tau)$ , соответствующие степенной модели спектральной плотности. Из таблицы видно, что общие свойства  $\sigma_y^2(\tau)$  и  $\sigma_{НР}^2(\tau)$  совпадают: одинакова их связь с  $\tau$ , они в одинаковой степени зависимы или независимы от  $f_h$ , одинакова область сходимости для степенной зависимости (благодаря выбору для формирования  $\sigma_{НР}^2(\tau)$  функции фильтра второго порядка) и одинаков порядок их значений, что показывает отношение  $\sigma_{НР} / \sigma_y(\tau)$ , которое можно интерпретировать как коэффициент смещения, когда  $\sigma_{НР}(\tau)$  используется в качестве оценки  $\sigma_y(\tau)$ .

Такое сходство позволяет лучше понять, почему  $\sigma_y^2(\tau)$  не очень подходит для спектрального анализа с высоким разрешением: несмотря на то что каждый лепесток имеет форму характеристики полосового фильтра, передаточная функция  $\sin^4 \pi f \tau$  в целом ведет себя фактически как функция фильтра верхних частот, отличающегося плохой избирательностью (в частности, такой фильтр не обеспечивает полного разрешения составляющих белого фазового шума и фазового фликкер-шума).

<sup>11)</sup> Заметим, что при  $f_c = (\pi\tau)^{-1}$  получается  $\sin^4 \pi f_c \tau = 0,5$ .

Таблица 3  
Верхнечастотная дисперсия для степенной модели спектральной плотности [42]

$S_\varphi(f)$	$\sigma_{ФНР}^2(\tau)$	Наклон по $\tau$	$\frac{\sigma_{НР}(\tau)}{\sigma_y(\tau)}$
$h_2 f^2$	$\frac{2 h_2 f_h}{\pi^2 \tau^2}$	-2	1,63
$h_1 f$	$\frac{h_1}{2\pi^2 \tau^2} \left[ \ln(1 + (\pi\tau f_h)^4) \right]$	$\approx -2$	$\frac{1,36 \dots 1,63}{(\pi\tau f_h = 10 \dots \infty)}$
$h_0$	$\frac{h_0}{\sqrt{2} \tau}$	-1	1,19
$h_{-1} f^{-1}$	$\frac{\pi h_{-1}}{2}$	0	1,06
$h_{-2} f^{-2}$	$\frac{\pi^2 h_{-2} \tau}{\sqrt{2}}$	+1	1,03

\* Для больших отрицательных значений наклона сходимость можно обеспечить применением верхнечастотного фильтра Баттерворта более высокого порядка. Второй порядок выбран здесь для обеспечения большего сходства с функцией  $\sin^4 \pi f \tau$  при  $\pi f \tau \ll 1$ .

Кроме того, верхнечастотная дисперсия ясно показывает, что нестабильность (из-за случайного шума) на временном интервале  $\tau$  в равной степени обусловлена всеми частотными компонентами  $S_\varphi(f)$  в диапазоне выше  $f_c = (\pi\tau)^{-1}$ , например выше 318 Гц при  $\tau = 1$  мс (и ниже  $f_h$ ). Этот результат был использован для оценки  $\sigma_y(\tau)$  по записям радиочастотного спектра в предположении, что справедливо соотношение (3.11) для малого индекса модуляции [28]. Для белого фазового шума получается следующая рабочая формула:

$$\sigma_y^2(\tau) \approx \frac{3 f_h 10^{-16} / 10}{2\pi^2 \nu_0^2 \tau^2}, \quad (6.11)$$

где через  $\beta_0$  обозначен уровень радиочастотного спектра относительно несущей, выраженный в дБ/Гц. В работе [28] приводятся формулы для других видов шумов степенного типа.

2) Полосовая дисперсия. Убедившись в недостаточной избирательности  $\sigma_y(\tau)$  и  $\sigma_{НР}(\tau)$ , можно воспользоваться методом передаточной функции для получения с помощью соотношения (6.8) более селективной полосовой дисперсии. Полосовая дисперсия  $\sigma_{ВР}^2(\tau)$  определяется соответствующей передаточной функцией полосового фильтра Баттерворта второго порядка с центральной частотой  $f_0 = (2\tau)^{-1}$  и постоянной добротностью  $Q$  (по аналогии с первым лепестком функции  $\sin^4 \pi f \tau$ , центр которого находится на частоте  $f = (2\tau)^{-1}$ , а  $Q \approx 1,37$ ). Новая передаточная функция показана на рис. 10.

В табл. 4 приводятся выражения для  $\sigma_{ВР}^2(\tau)$ , соответствующие степенной модели. Из таблицы видно, что они существенно отличаются от выражений для  $\sigma_y^2(\tau)$  и  $\sigma_{НР}^2(\tau)$ .

Повышенная избирательность  $|H_{ФВР}(f)|^2$  дает следующий эффект.

а) Для сходимости в случае белого фазового шума и фазового фликкер-шума уже нет необходимости в задании верхней граничной частоты  $f_h$ , и поэтому эта величина не фигурирует в соответствующих выражениях для  $\sigma_{ВР}^2(\tau)$ .

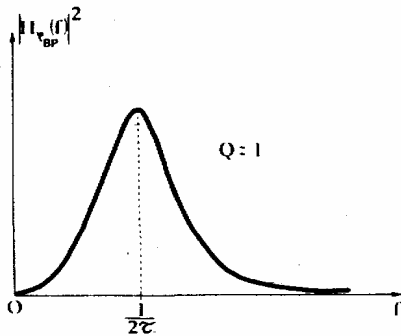


Рис. 10. Передаточная функция для полосовой дисперсии.

б) Наклон кривой  $\sigma_{вР}^2(\tau)$  различен для каждого вида шумов, включая белый фазовый шум и фазовый фликкер-шум, для которых он равен соответственно  $-3$  и  $-2$  (вместо  $-2$  и  $\approx -2$  для  $\sigma_y^2(\tau)$ ). Стоит отметить, что в случае белого фазового шума  $\sigma_{вР}(\tau)$  не дает оценки  $\sigma_y(\tau)$  даже с постоянным смещением, так как эти величины характеризуются различным наклоном.

Тем не менее для трех последних видов шума  $\sigma_{вР}(\tau)$  дает оценку величины  $\sigma_y(\tau)$  с учетом коэффициентов смещения, близких к единице (они приведены в последнем столбце таблицы).

Итак,  $\sigma_{вР}(\tau)$  следует рассматривать не как оценку  $\sigma_y(\tau)$ , а как полезное средство для описания статистических свойств генераторов, поскольку с помощью этой величины на графике для временной области выявляется наличие белого фазового шума и фазового фликкер-шума [43].

В этих свойствах  $\sigma_{вР}(\tau)$  нет ничего удивительного, если учесть, что полосовая дисперсия в действительности отражает не что иное, как спектральный анализ при постоянной относительной ширине полосы (постоянном  $Q$ ) фазового шума, результат которого отображается во временной области с помощью формулы (6.8).

Полосовую дисперсию можно также рассматривать как идеальную дисперсию Адамара, поскольку цель любых улучшений последней заключается в получении

Таблица 4  
Полосовая дисперсия для степенной модели  
спектральной области [42] ( $Q=1$ )

$S_y(f)$	$\sigma_{вР}^2(\tau)$	Наклон по $\tau$	$\frac{\sigma_{вР}(\tau)}{\sigma_y(\tau)}$
$h_2 f^2$	$\frac{h_2}{2\sqrt{2}\pi\tau^3}$	-3	$\frac{1,22}{\sqrt{\tau h_2}}$
$h_1 f$	$\frac{h_1}{\pi\sqrt{2}\tau^2}$	-2	$\frac{3}{\sqrt{1,038 + 3 \ln 2 \pi h_1 \tau}}$
$h_0$	$\frac{\sqrt{2} h_0}{\pi\tau}$	-1	0,96
$h_{-1} f^{-1}$	$\frac{5 h_{-1}}{\pi\sqrt{2}}$	0	0,90
$h_{-2} f^{-2}$	$\frac{8\sqrt{2} h_{-2} \tau}{\pi}$	+1	0,74

передаточной функции с одним узким лепестком, не дающей паразитных откликов. Таким образом, имеет место принципиальная связь между рассмотренными двумя методами, в основе которой лежит идея передаточной функции (методика измерений, как показано ниже, конечно, различна).

3) *Практические аспекты метода передаточной функции.* Этот метод полезен как в теоретическом плане, так и на практике, так как открывает дополнительные возможности для общеизвестного способа измерений с помощью фазового детектора (см. разд. IX).

Из уравнения (6.8) видно, что параметр  $\sigma(\tau)$  можно рассматривать как среднее квадратическое значение фазовых флюктуаций  $\varphi(t)$ , отфильтрованных посредством подходящей передаточной функции  $H_\varphi(f)$  и умноженных на константу  $\sqrt{8}(\omega_0\tau)^{-1}$ . Таким образом, данный подход приводит к методу получения данных, основанному на соответствующей фильтрации демодулированного фазового шума, поэтому можно воспользоваться методом фазового детектора, так как он дает аналоговое выходное напряжение, пропорциональное фазовым флюктуациям генератора [22, 44, 45].

Для решения этой задачи разработана экспериментальная измерительная установка [43], содержащая следующие узлы:

а) обычный фазовый детектор с жесткой системой фазовой автоподстройки. При постоянной времени в петле около 1 с его выходное напряжение пропорционально фазовому шуму генератора на частотах фурье-преобразований, превышающих примерно 1 Гц. Такое устройство часто используется для измерений в частотной области;

б) фильтр с регулируемой передаточной функцией  $H_\varphi(f)$ , которая, в частности, может соответствовать характеристике фильтра верхних частот и полосового фильтра;

в) вольтметр истинного среднеквадратического значения, используемый для получения окончательного результата измерений.

В зависимости от вида выбранной характеристики фильтра устройство может измерять следующие величины:

а)  $S_\varphi(f)$  с помощью узкополосного полосового фильтра; это по существу классический для данной установки вид измерений;

б)  $\sigma_{НР}(\tau)$  с помощью фильтра верхних частот с граничной частотой  $f_c = (\pi\tau)^{-1}$ ; верхняя граничная частота  $f_H$  обычно задается другим фильтром нижних частот;

в)  $\sigma_{вР}(\tau)$  с помощью полосового фильтра с постоянным  $Q$  и центральной частотой  $f_0 = (2\tau)^{-1}$ .

В последних двух случаях  $\sigma(\tau)$  просто определяется по формуле

$$\sigma(\tau) = \frac{\sqrt{8}}{k\omega_0\tau} v_{rms}, \quad (6.12)$$

где  $k$  — калибровочная константа, а  $v_{rms}$  — измеренное среднеквадратическое значение профильтрованного напряжения, служащего аналогом  $\varphi(t)$ .

Таким образом, эта оригинальная измерительная установка обеспечивает получение показателей стабильности как в частотной, так и во временной областях без цифрового счетчика и связанной с его приме-

нением статистической обработки данных, необходимой в последнем случае. Исходя из того же основного принципа, определялась также оценка  $\sigma_y(\tau)$ , для чего полосовой фильтрации подвергалась величина  $y(t)$ , получающаяся на выходе частотного дискриминатора [46].

**ВИ. ДРУГИЕ ВОЗМОЖНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ**

В этом разделе мы опишем еще два подхода к оценке неустойчивости во временной области, основанных на определенных способах статистической обработки  $y_k$ , получаемых обычно методами счета. В обоих случаях предполагается, что новый параметр должен быть в некотором отношении (о чем говорится ниже) «эффективнее», чем  $\sigma_y(\tau)$ . Как и ранее, удобным средством интерпретации их относительных качеств представляется передаточная функция.

Когда это потребуется, будут указаны связи параметров с дисперсией Адамара и с выборочной дисперсией.

Здесь приводятся выражения для новых параметров применительно к степенной модели спектральной плотности, что позволит облегчить их сопоставление с рекомендованным показателем во временной области  $\sigma_y(\tau)$ .

**А. Контроль частот на конечном временном интервале**

Этот метод, предложенный в работе [13], базируется на комбинации  $y_k$ , которую можно интерпретировать как модифицированную выборочную дисперсию<sup>12)</sup>. Для иллюстрации этого подхода в работе [47] рассмотрена конкретная модифицированная выборочная дисперсия  $\Sigma_y^2(\tau)$ , выражения для которой приведены ниже в табл. 5 для степенной модели спектральной плотности.

1) *Модифицированная выборочная дисперсия.* Определением модифицированной выборочной дисперсии, получаемой по  $N$  дискретным значениям  $y_k$ , служит следующее соотношение:

$$\Sigma_y^2(N, T, \tau) = \left( \bar{y}_{(N+1)/2} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{y}_i \right)^2, \quad (7.1)$$

где  $N$  — нечетное число, а через  $\bar{y}_{(N+1)/2}$  обозначена центральная выборка в группе из  $N$  выборок.

Величины  $T$  и  $\tau$  имеют тот же смысл, что и на рис. 4. Ясно, что  $\Sigma_y^2(N, T, \tau)$  — случайная величина и ее среднее значение, вычисленное на бесконечном временном интервале, связано с  $S_y(f)$  следующим интегралом [13]:

$$\Sigma_y^2(N, T, \tau) / = \int_0^\infty S_y(f) \left( \frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \right)^2 \left( 1 - \frac{\sin N \pi T f}{N \sin \pi T f} \right)^2 df. \quad (7.2)$$

<sup>12)</sup> В работе [13] выведены также соотношения для непрерывных величин. Их обзор дан в работе [47]. Здесь рассмотрена лишь дискретная реализация, исходящая из дискретных значений  $y_k$ .

Таблица 5  
Модифицированная трехвыборочная дисперсия при смежных выборках  $\Sigma_y^2(\tau)$  для степенной модели спектральной плотности ( $\pi T f_h \gg 1$ )

$S_y(f)$	$\Sigma_y^2(\tau)$	Наклон по $\tau$	$\frac{\Sigma_y(\tau)}{\sigma_y(\tau)}$
$h_2 \tau^2$	$\frac{5 h_2 h_0}{9 \pi^2 \tau^2}$	-2	0,86
$h_1 f$	$\frac{5 h_1}{9 \pi^2 \tau^2} [0,964 + \ln \pi T f_h]$	$\approx -2$	0,85...0,86 ( $\pi T f_h = 10 \dots \infty$ )
$h_0$	$\frac{h_0}{3\tau}$	-1	0,82
$h_1 \tau^{-1}$	$\frac{8 \ln 2 - 3 \ln 3}{3} h_1$	0	0,74
$h_2 \tau^{-2}$	$\frac{2}{9} \pi^2 h_2 \tau$	+1	0,58
$h_3 \tau^{-3}$	$\frac{27 \ln 3 - 32 \ln 2}{9} \pi^2 h_3 \tau^2$	+2	-
$h_4 \tau^{-4}$	$\frac{44}{90} \pi^4 h_4 \tau^3$	+3	-

Новая передаточная функция при  $N \pi T f \ll 1$ , т. е. на самых низких частотах фурье-преобразований, теперь ведет себя как  $(N^2 - 1)^2 (\pi T f)^4 / 36$ . Благодаря такому свойству этот параметр во временной области сходится для степенной модели  $S_y(f) = h_\alpha f^\alpha$  даже при  $\alpha = -3$  и  $\alpha = -4$  (тогда как для классической выборочной дисперсии предельная величина  $\alpha = -2$ ). Интерес-

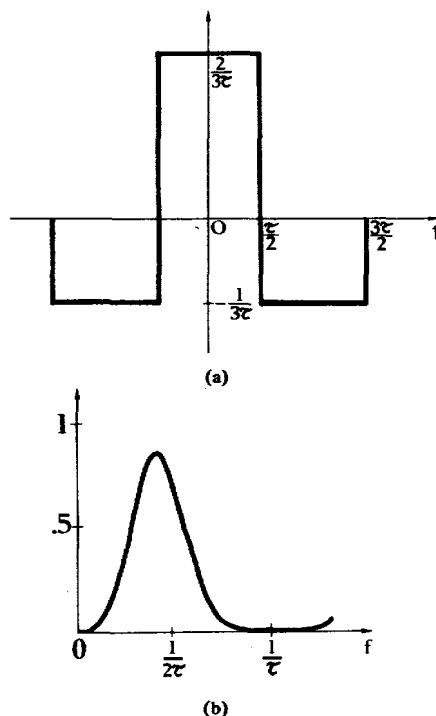


Рис. 11. Последовательность измерений (а) и передаточная функция (б) для модифицированной трехвыборочной дисперсии.

но отметить, что зависимость  $S_y(f) = h_{-3} f^{-3}$  была названа в качестве возможной модели высококачественного кварцевого генератора в области частот фурье-преобразований около 1 Гц [21].

Таким образом, по сравнению с классическим методом выборочной дисперсии метод контроля частоты на конечном временном интервале позволяет рассматривать спектральные плотности с более крутым отрицательным наклоном (что иногда интерпретируется как «более сильная нестационарность»).

2) *Модифицированная выборочная дисперсия по трем смежным выборкам.* По тем же причинам, по которым представлялось целесообразным рекомендовать одну конкретную выборочную дисперсию  $\sigma_y^2(\tau)$ , сопоставимость данных улучшится, если задать определенные величины  $N$  и  $T$  для  $(\Sigma_y^2(N, T, \tau))$  ( $\tau$  продолжает оставаться независимой переменной) [47].

Рассмотрим модифицированную выборочную дисперсию при  $T=\tau$  (смежные выборки, как и в случае  $\sigma_y^2(\tau)$ ) и  $N=3$  (наименьшем для данной последовательности измерений значении  $N$ , которое должно быть нечетным)<sup>13)</sup>. Тогда выражения (7.1) и (7.2) примут вид

$$\Sigma_y^2(3, \tau, \tau) = \frac{1}{9} (2\bar{y}_2 - \bar{y}_1 - \bar{y}_3)^2, \quad (7.3)$$

$$\Sigma_y^2(\tau) \equiv \langle \Sigma_y^2(3, \tau, \tau) \rangle = \int_0^\infty S_y(f) \frac{16}{9} \frac{\sin^6 \pi f \tau}{(\pi f \tau)^2} df. \quad (7.4)$$

Передаточная функция представляет собой преобразование Фурье от последовательности измерений во временной области (рис. 11).

В табл. 5 даны формулы, позволяющие определять  $\Sigma_y^2(\tau)$  для степенной модели, включая случаи  $\alpha=-3$  и  $\alpha=-4$ , при которых  $\sigma_y(\tau)=\infty$ . Для других пяти встречающихся зависимостей  $\Sigma_y(\tau)$  служит оценкой  $\sigma_y(\tau)$  с учетом коэффициентов постоянного смещения, указанных в правом столбце. Обе величины одинаковым образом зависят от  $\tau$  и  $f_h$  и имеют одинаковый порядок. В частности,  $\Sigma_y(\tau)$  не лучше, чем  $\sigma_y(\tau)$ , подходит для различения белого фазового шума и фазового фликкер-шума, которым соответствуют кривые с почти одинаковым наклоном.

3) *Связь с ранее рассмотренными методами.* Прежде всего, следует учесть, что  $\Sigma_y^2(3, \tau, \tau)$  резко отличается от  $\sigma_y^2(3, \tau, \tau)$ , которое получается из формулы (4.13) при  $N=3$  и  $T=\tau$  и равно

$$\sigma_y^2(3, \tau, \tau) = \frac{1}{3} (\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2 + \bar{y}_3^2 - \bar{y}_1 \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \bar{y}_3 - \bar{y}_2 \bar{y}_3). \quad (7.5)$$

Но дисперсия Адамара, обработанная биномиальными весовыми коэффициентами (соотношение (6.4)), при  $N=3$  и  $T=\tau$  имеет вид

$$\langle \sigma_{HBC}^2(3, \tau, \tau) \rangle = \langle (\bar{y}_1 - 2\bar{y}_2 + \bar{y}_3)^2 \rangle \quad (7.6)$$

<sup>13)</sup> Крамером [60, 61] предложена так называемая дисперсия по кривизне, равная  $1,5 \Sigma_y^2(\tau)$ , Барнс [30, 69] обсуждал также возможность использования разности второго порядка от  $y_k$  или третьего порядка от  $\varphi_k$ .

и, следовательно,

$$\Sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{9} \langle \sigma_{HBC}^2(3, \tau, \tau) \rangle. \quad (7.7)$$

Легко удостовериться, что, полагая в формуле (6.5)  $N=3$  и  $T=\tau$  и деля полученное выражение на 9, получаем передаточную функцию, фигурирующую в приведенном выше интеграле (7.4).

Эта связь со взвешенной дисперсией Адамара интерпретируется в следующем разделе при обсуждении стреттурных функций фазы.

По поводу метода передаточной функции заметим, что уравнение (7.4) можно записать через спектральную плотность фазового шума:

$$\Sigma_y^2(\tau) = \frac{64}{9\omega_0^2 \tau^2} \int_0^\infty S_\varphi(f) \sin^6 \pi f \tau df. \quad (7.8)$$

Таким образом, оценку  $\Sigma_y^2(\tau)$  можно получить, обрабатывая демодулированный фазовый шум фильтром верхних частот, однако для достижения тех же свойств сходимости, которые обеспечивает передаточная функция  $\sin^6 \pi f \tau$ , необходим фильтр Баттерворта третьего порядка.

Итак, поведение нового параметра  $\Sigma_y(\tau)$ , экспериментальная оценка которого счетными методами не представляет особой сложности, в случае степенных спектральных плотностей такое же, как и у  $\sigma_y(\tau)$ , за тем исключением, что он сходится еще при двух значениях отрицательного наклона (одно из них упоминается в работе [21]); следовательно, можно рекомендовать пользоваться им в тех случаях, когда из каких-либо теоретических или экспериментальных соображений предполагается зависимость вида  $S_y(f) = h_{-3} f^{-3}$  (или  $h_{-4} f^{-4}$ ). При этом для более длительных  $\tau$  могут наблюдаться изменения по закону  $\Sigma_y(\tau) \sim \tau$  (или  $\tau^{1/2}$ ). Заметим, что для  $\sigma_y(\tau)$  подобные зависимости наблюдаться не могут, так как наибольший положительный наклон в случае степенных моделей равен  $+1/2$ . Этот вопрос более подробно обсуждается в разд. VIII в связи с эффектами полиномиальных уходов.

## В. Нестабильность частоты на временном интервале $T$

Во всех рассмотренных выше методах для временной области строилась зависимость представляющего интерес параметра ( $I(\tau)$ ,  $\sigma_y(\tau)$ ,  $\sigma_{HR}(\tau)$ ,  $\sigma_{VR}(\tau)$  или  $\Sigma_y(\tau)$ ) от временного интервала усреднения  $\tau$ , изменяющегося в пределах, скажем, от  $10^{-3}$  с до тысяч секунд или даже суток или месяцев. При этом убывающие части кривых отражают усреднение стационарных шумов, а возрастающие части, помимо фликкер-уплощения, обусловлены нестационарными эффектами (как случайными, так и детерминированными).

Другая точка зрения была предложена Де Пренсом и Корнелисаном [48], которые исследовали частотные флюктуации на временном интервале  $T$  при фиксированном значении временного интервала усреднения  $\tau$ . Таким образом, строилась зависимость рассматриваемого параметра от  $T$  (эта величина в данном случае имеет тот же смысл, что и на рис. 4).

Рассмотрим сперва ради простоты случай  $\tau=0$ , а затем физически реальный случай  $\tau \neq 0$ .

1) *Нулевое время усреднения* ( $\tau=0$ ). Идеальная дискретизация  $y(t)$  в моменты  $t_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ), такие что  $t_{k+1} - t_k = T$ , дает мгновенные значения  $y(t_k)$ , обозначаемые как  $y_k$ . Этот идеализированный процесс измерений соответствует измерениям мгновенных значений частоты ( $\tau=0$ ).

Мерой мгновенной относительной нестабильности частоты на временном интервале  $T$  в пределах от  $t_1$  до  $t_2$  служит разность  $\delta y_T = y_2 - y_1$ . Это, конечно, случайная величина, средний квадрат которой можно использовать в качестве статистически значимой меры нестабильности частоты на протяжении интервала  $T$ :

$$\langle \delta y_T^2 \rangle = \langle (y_2 - y_1)^2 \rangle. \quad (7.9)$$

Поскольку экспериментатор может обычно располагать только одним образцом  $y(t)$ , был рекомендован соответствующий процесс измерения [49], позволяющий исключить ложные результаты, возникающие вследствие корреляции между данными.

Рассматриваемый параметр связан с  $R_y(\tau)$  и  $S_y(f)$  простой зависимостью вида

$$\langle \delta y_T^2 \rangle = 2[R_y(0) - R_y(T)], \quad (7.10)$$

$$\langle \delta y_T^2 \rangle = \int_0^\infty S_y(f) 4 \sin^2 \pi T f df. \quad (7.11)$$

В предположении, что  $y(t)$  представляет собой стационарный процесс с нулевым средним и конечной дисперсией  $\langle y^2(t) \rangle = R_y(0)$ , справедливо следующее предельное уравнение (см. (7.10)):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle \delta y_T^2 \rangle = 2 \langle y^2(t) \rangle. \quad (7.12)$$

Предполагая, что  $S_y(f)$  имеет верхнюю граничную частоту  $f_h$ , и исходя из выражения (7.11), легко показать, что

$$\langle \delta y_T^2 \rangle \approx 4\pi^2 \beta_y T^2, \quad \text{при } \pi T f_h \ll 1, \quad (7.13)$$

где  $\beta_y$  — константа, равная <sup>14)</sup>

$$\beta_y = \int_0^{f_h} f^2 S_y(f) df. \quad (7.14)$$

Таким образом, ход зависимости  $\langle \delta y_T^2 \rangle$  от  $T$  совершенно отличен от хода зависимости любого другого показателя во временной области от временного интервала усреднения  $\tau$ , что прослеживается по форме периодической передаточной функции, фигурирующей в соотношении (7.11). Характер этой зависимости можно назвать «кумулятивным» в том смысле, что по мере увеличения  $T$  все возможные значения  $y(t)$  отслеживаются и дают вклад в  $\langle \delta y_T^2 \rangle$  (а не компенсируются с ростом  $\tau$  за счет усреднения).

2) *Ненулевое время усреднения* ( $\tau \neq 0$ ). Так как экспериментальные установки выдают усредненные выборки  $y_k$  (см. формулу (4.2)), то практический интерес представляет следующее обобщение определе-

<sup>14)</sup> Для степенной зависимости  $S_y(f) = h_\alpha f^\alpha$  эта константа равна  $\beta_y = h_\alpha f_h^{\alpha+3} / (\alpha+3)$ .

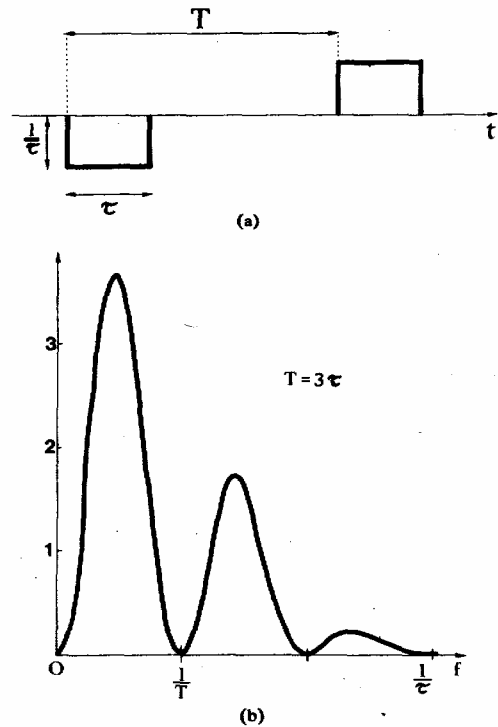


Рис. 12. Последовательность измерений (а) и передаточная функция (б) для  $\langle \delta y_T^2 \rangle$  при  $T=3\tau$ .

ния  $\langle \delta y_T^2 \rangle$ :

$$\langle \delta \bar{y}_T^2 \rangle = \langle (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 \rangle. \quad (7.15)$$

На рис. 12 приведены последовательность измерений и передаточная функция. Связь с  $S_y(f)$  в этом случае описывается соотношением

$$\langle \delta \bar{y}_T^2 \rangle = \int_0^\infty S_y(f) 4 \left( \frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \right)^2 \sin^2 \pi T f df. \quad (7.16)$$

Как показано ниже, этот параметр простым образом связан с одной конкретной выборочной дисперсией.

3) *Связь  $\langle \delta \bar{y}_T^2 \rangle$  с выборочной дисперсией*. Исходя из определения выборочной дисперсии в виде

$$\sigma_y^2(N, T, \tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left( \bar{y}_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{y}_j \right)^2, \quad (7.17)$$

легко убедиться, что

$$\langle \delta \bar{y}_T^2 \rangle = 2 \langle \sigma_y^2(2, T, \tau) \rangle. \quad (7.18)$$

Иными словами,  $\langle \delta \bar{y}_T^2 \rangle$  представляет собой лишь удвоенную величину двухвыборочной дисперсии для несмежных выборок ( $T > \tau$ ). Ниже мы исследуем ее зависимость от  $T$  при фиксированном  $\tau$ . Таким образом, (7.16) является частным случаем общей формулы, полученной Катлером (уравнение (23) из работы [8] при  $N=2$ ; см. также сноску 8).

За исключением случая белого фазового шума, для которого здесь дается более полная формула, вы-



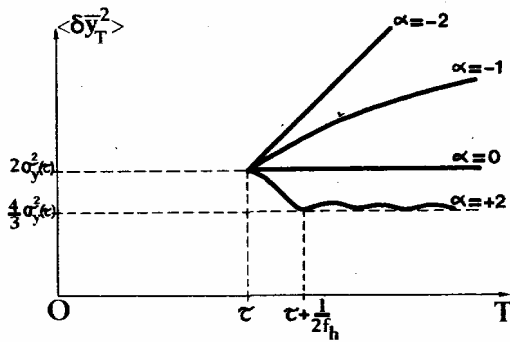


Рис. 13. Зависимость параметра во временной области  $\langle \delta \bar{y}_T^2 \rangle$  от  $T$  для степенной модели.

ражения для  $\langle \delta \bar{y}_T^2 \rangle$ , указанные в табл. 6, выводятся, таким образом, из формулы для  $\langle \sigma_y^2(2, T, \tau) \rangle$ , приведенной в работе [8] (приложение II).

При  $T = \tau$  эти выражения, кроме выражения для фазового фликкер-шума, справедливого лишь для  $T \gg \tau$ , дают, как можно было ожидать по аналогии с соотношением (7.18), величину  $2\sigma_y^2(\tau)$ . На рис. 13 показан характер зависимости  $\langle \delta \bar{y}_T^2 \rangle$  при увеличивающихся значениях  $T$ . Она линейна для частотного шума случайных блужданий, подчиняется логарифмическому закону для частотного фликкер-шума, выражается константой для белого частотного шума и стремится к предельной величине  $(4/3)\sigma_y^2(\tau)$  для белого фазового шума и фазового фликкер-шума (данная зависимость показана также на рис. 2 в работе [35], где дан график функции смещения  $V_s$  (4.25) для  $0 < T \leq 2\tau$ ).

С помощью этих выражений Корнелиссен [49] рассчитал долговременные характеристики стандартов частоты.

Для реальных генераторов, в которых всегда присутствует частотный фликкер-шум, при больших  $T$  можно ожидать логарифмической зависимости  $\langle \delta \bar{y}_T^2 \rangle$  от  $T$  (если не наблюдается маскирования случайными блужданиями частоты или детерминированными уходами). В частности, линейный уход частоты, модели-

руемый функцией  $y(t) = d_1 t$ , дает

$$\langle \delta \bar{y}_T^2 \rangle = d_1^2 T^2. \tag{7.19}$$

Итак, несмотря на простую математическую связь с двухвыборочной дисперсией при несмежных выборках, параметр  $\langle \delta \bar{y}_T^2 \rangle$  введен на совершенно другой принципиальной основе, с акцентом на ходе изменения исследуемых флюктуаций во времени. Поэтому для некоторых задач прогнозирования [49] он, возможно, будет полезнее, чем  $\sigma_y(\tau)$ . Кроме того, данный параметр характеризуется новыми зависимостями, которые даны в табл. 6.

### VIII. МЕТОД СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ

В предыдущих разделах на основе дискретных выборок  $\bar{y}_k$ , получаемых с помощью соответствующей методики измерений, были даны определения следующих величин, предназначенных для целого ряда целей:

- 1) истинной дисперсии [уравнения (4.5)] как теоретического показателя нестабильности частоты во временной области;
- 2) выборочных дисперсий [уравнения (4.8) и (4.13) или (4.16)] как практических показателей нестабильности во временной области; конкретным примером служит  $\sigma_y^2(\tau)$ , определяемое формулой (4.18);
- 3) дисперсии Адамара [уравнения (6.1) или (6.4)] как показателя во временной области, позволяющего получить оценки спектральной плотности;
- 4) модифицированной выборочной дисперсии [уравнение (7.1)] как показателя во временной области, который сходится даже для  $S_y(f) \sim f^{-3}$  и  $f^{-4}$ ; частным примером служит величина  $\sum_y^2(\tau)$ , определяемая формулой (7.4);
- 5) величины  $\langle \delta \bar{y}_T^2 \rangle$ , определяемой формулой (7.11), как еще одной меры нестабильности во временной области.

В оригинальных работах эти параметры были предложены в качестве средства для достижения одной из

Таблица 6

Параметр  $\langle \delta \bar{y}_T^2 \rangle$  во временной области для степенной модели спектральной плотности

$S_y(f)$	$\langle \delta \bar{y}_T^2 \rangle$ при $T > \tau$	
$h_2 f^2$	$\frac{h_2 f_h}{\pi^2 \tau^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2\pi(T-\tau)f_h}{2\pi(T-\tau)f_h} \right)$	при $\pi \tau f_h \gg 1$
$h_1 f$	$\frac{h_1}{\pi^2 \tau^2} \left( 0.577 + \ln 2\pi f_h \tau + \frac{1}{2} \ln \frac{(T/\tau)^2}{(T/\tau)^2 - 1} \right)$	при $\pi \tau f_h \gg 1$ и $T \gg \tau$
$h_0$	$\frac{h_0}{\tau}$	
$h_{-1} f^{-1}$	$h_{-1} \left[ -2 \left( \frac{T}{\tau} \right) \ln \frac{T}{\tau} + \left( \frac{T}{\tau} + 1 \right)^2 \ln \left( \frac{T}{\tau} + 1 \right) + \left( \frac{T}{\tau} - 1 \right)^2 \ln \left( \frac{T}{\tau} - 1 \right) \right]$	$\approx 2 h_{-1} \ln \frac{T}{\tau}$ при $T \gg \tau$
$h_{-2} f^{-2}$	$2\pi^2 h_{-2} \left( T - \frac{\tau}{3} \right)$	

упомянутых целей, но в них не ставилась задача их систематизации с единой точки зрения.

Метод структурных функций, разработанный Линдси и Цзе Чжа-мином [50, 51], и играет такую объединяющую роль в том смысле, что наиболее важные параметры во временной области выступают в нем как частные случаи, вытекающие из одного общего понятия — так называемой структурной функции.

Данная теория излагается ниже с особым упором на ее связях с предшествующими методами и ее приложении к исследованию детерминированных уходов полиномиального типа.

**А. Определение структурных функций**

$M$ -е приращение случайного процесса  $g(t)$  для  $M \geq 1$  определяется выражением

$$\Delta^{(M)}g(t; \tau) = \sum_{k=0}^M (-1)^k \binom{M}{k} g(t + (M - k)\tau). \quad (8.1)$$

Процесс  $g(t)$  имеет стационарное  $M$ -е приращение [15, 16], если для любых действительных  $T$  и  $\tau$  существуют и не зависят от момента времени  $t$  следующие средние значения:

$$\langle \Delta^{(M)}g(t; \tau) \rangle = \alpha(\tau), \quad (8.2)$$

$$\langle \Delta^{(M)}g(t; \tau) \cdot \Delta^{(M)}g(t + T; \tau) \rangle = D_g^{(M)}(T; \tau). \quad (8.3)$$

Иными словами,  $M$ -е приращение имеет независимое от времени среднее значение, а его автокорреляционная функция зависит лишь от разности моментов времени (стационарность в широком смысле).

По определению,  $D_g^{(M)}(T; \tau)$  является структурной функцией  $M$ -го приращения. В дальнейшем  $M$ -я структурная функция случайного процесса  $g(t)$  будет определяться как  $D_g^{(M)}(T=0; \tau)$  и обозначаться как  $D_g^{(M)}(\tau)$

$$D_g^{(M)}(\tau) = \langle (\Delta^{(M)}g(t; \tau))^2 \rangle. \quad (8.4)$$

**В. Применение структурных функций для описания нестабильностей генератора. Связь между нестабильностью фазы и нестабильностью частоты**

Рассматривая нестабильности квазисинусоидальных генераторов и применяя метод структурных функций к исследованию фазовых флюктуаций  $\varphi(t)$  и флюктуаций (относительной) частоты  $y(t)$ , можно получить два набора параметров [50]. Таким образом, фазовой и частотной нестабильностям можно дать различные определения, в литературе же два эти понятия часто путают. Чтобы проиллюстрировать этот момент, рассмотрим первые ( $M=1$ ) структурные функции от  $\varphi(t)$  и  $y(t)$ .

1) *Нестабильность фазы.* Нестабильность фазы на временном интервале  $\tau$  можно определить как отношение среднеквадратического значения фазового шума, накопленного в течение  $\tau$  секунд, к фазе, накопленной нешумящим генератором ( $\omega_0\tau$ ). Эта величина имеет простую связь с первой структурной функцией фазового шума:

$$\frac{\sqrt{\langle [\varphi(t + \tau) - \varphi(t)]^2 \rangle}}{\omega_0\tau} = \frac{1}{\omega_0\tau} \sqrt{D_\varphi^{(1)}(\tau)}. \quad (8.5)$$

Но из выражений (4.4) и (4.5) видно, что указанная выше величина в действительности есть не что иное, как истинное стандартное отклонение  $I(\tau)$ , интерпретируемое обычно как теоретический показатель нестабильности частоты (связанные с ним ограничения уже рассматривались).

2) *Нестабильность частоты.* Нестабильность частоты на временном интервале  $T$  можно определить как среднеквадратическое значение относительных частотных флюктуаций  $y(t)$ , накопленных в течение  $T$  секунд; это и есть первая структурная функция от  $y(t)$  [52]:

$$\sqrt{\langle [y(t + T) - y(t)]^2 \rangle} = \sqrt{D_y^{(1)}(T)}. \quad (8.6)$$

Кроме того, она равна величине  $\sqrt{\langle \delta y_T^2 \rangle}$ , определяемой выражением (7.9); именно поэтому в формуле (8.6) мы пользовались символом  $T$  вместо  $\tau$ .

Параметр  $\langle \delta y_T^2 \rangle$ , определяемый формулой (7.11), связан со структурной функцией фазы следующим образом [47]:

$$\langle \delta y_T^2 \rangle = \frac{2}{\omega_0^2 T^2} [D_\varphi^{(1)}(\tau) - D_\varphi^{(1)}(T; \tau)]. \quad (8.7)$$

Структурные функции фазы появляются при исследовании  $y_k$  из-за связи между  $y_k$  и первым приращением  $\varphi(t)$ , описываемым выражением (4.4). Таким образом, структурные функции фазы весьма важны для описания нестабильности генераторов.

**С. Структурные функции фазы**

Прежде всего необходимо вспомнить, что метод  $M$ -х приращений фазы был предложен Барнсом [30] в качестве мощного средства классификации флюктуаций статистического характера в генераторах. Структурные функции фазы представляют собой всего лишь другой способ записи этих величин.

1) *Зависимость  $M$ -го приращения фазы от  $y_k$ .* Поскольку  $y_k$  представляет собой данные, связанные с экспериментальными результатами, будет интересно переформулировать  $\Delta^{(M)}\varphi(t; \tau)$  в терминах соответствующих  $M$  величин  $y_k$ . Согласно определению,  $\Delta^{(M)}\varphi(t; \tau)$  вычисляется по мгновенным значениям  $y(t)$  в моменты времени  $t, t + \tau, t + 2\tau, \dots, t + M\tau$ . На  $i$ -ю величину  $\varphi(t + (i-1)\tau)$ , где  $i$  изменяется в пределах от 1 до  $M+1$ , воздействует весовой множитель  $(-1)^i \binom{M}{i-1}$  при нечетном  $M$  и  $(-1)^{i+1} \binom{M}{i-1}$  при четном  $M$ . По определению  $\Delta^{(M)}\varphi(t; \tau)$ , член  $\varphi(t + M\tau)$  имеет всегда положительный знак.

Пользуясь соотношением (4.4) далее можно выразить  $\Delta^{(M)}\varphi(t; \tau)$  через  $M$  значений  $y_k$  ( $k=1, \dots, M$ ), фигурирующих в его определении [47]:

$$\Delta^{(M)}\varphi(t; \tau) = \omega_0\tau \sum_{k=1}^M (-1)^{k+1} \binom{M-1}{k-1} \bar{y}_k, \quad M \text{ нечетное} \quad (8.8)$$

$$\Delta^{(M)}\varphi(t; \tau) = \omega_0\tau \sum_{k=1}^M (-1)^k \binom{M-1}{k-1} \bar{y}_k, \quad M \text{ четное} \quad (8.9)$$

Таблица 7

Структурные функции фазы. Связь с другими параметрами во временной области

M	$\Delta \varphi^{(M)}(t; \tau)$	$D_{\varphi}^{(M)}(\tau)$	Связь с другими показателями
1	$\omega_0 \tau \bar{y}_1$	$\omega_0^2 \tau^2 < \bar{y}_1^2 >$	$I(\tau) = \frac{1}{\omega_0 \tau} \sqrt{D_{\varphi}^{(1)}(\tau)}$
2	$\omega_0 \tau (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)$	$\omega_0^2 \tau^2 < (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 >$	$\sigma_y(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2} \omega_0 \tau} \sqrt{D_{\varphi}^{(2)}(\tau)}$
3	$\omega_0 \tau (\bar{y}_1 - 2\bar{y}_2 + \bar{y}_3)$	$\omega_0^2 \tau^2 < (\bar{y}_1 - 2\bar{y}_2 + \bar{y}_3)^2 >$	$\Sigma_y(\tau) = \frac{1}{3 \omega_0 \tau} \sqrt{D_{\varphi}^{(3)}(\tau)}$
M	$\omega_0 \tau \sum_{i=1}^M (-1)^i \binom{M-1}{i-1} \bar{y}_i$	$\omega_0^2 \tau^2 < \left( \sum_{i=1}^M (-1)^i \binom{M-1}{i-1} \bar{y}_i \right)^2 >$	$< \sigma_{\text{нвс}}^2(M, \tau, \tau) >^{1/2} = \frac{1}{\omega_0 \tau} \sqrt{D_{\varphi}^{(M)}(\tau)}$

Эти выражения используются в дальнейшем для установления связи между  $D_{\varphi}^{(M)}(\tau)$  и некоторыми показателями нестабильности во временной области.

2) *Интерпретация  $D_{\varphi}^{(M)}(\tau)$  в терминах показателей нестабильности во временной области.* В табл. 7 даны выражения для  $D_{\varphi}^{(M)}(\tau)$ , рассчитанные для  $M=1, 2, 3, \dots$ , из соотношений (8.8) и (8.9). Эти выражения показывают, что некоторые из приведенных ранее показателей нестабильности во временной области можно переформулировать в терминах структурных функций фазы.

При  $M=1$  и  $M=2$  структурная функция связана соответственно с истинной дисперсией  $I^2(\tau)$  и  $\sigma_y^2(\tau)$ , на что было указано Линдси и Цзе Чжа-мином [50].

При  $M=3$  и при четных  $M (\geq 4)$  она связана соответственно с  $\Sigma_y^2(\tau)$  и с дисперсией Адамара при смежных выборках, взвешенных биномиальными коэффициентами, на что указано в работе [47].

Объединяющая роль принципа структурных функций становится ясной, если обратиться к правому столбцу табл. 7.

3) *Связь между  $D_{\varphi}^{(M)}(\tau)$  и  $S_y(f)$ .* Связь между структурными функциями фазы и  $S_y(f)$  легко установить исходя из выражения (6.5) при  $T=\tau$  и приведенного в табл. 7 соотношения, которое связывает  $D_{\varphi}^{(M)}(\tau)$  и  $(\sigma_{\text{нвс}}^2(M, \tau, \tau))$ :

$$D_{\varphi}^{(M)}(\tau) = 2^{2(M-1)} (\omega_0 \tau)^2 \int_0^{\infty} S_y(f) \frac{\sin^2 M \pi \tau f}{(\pi \tau f)^2} df. \quad (8.10)$$

Соответствующее соотношение для обратного преобразования можно выразить через преобразования Меллина, как показано в работе [50], однако получающиеся формулы слишком сложны для практического использования.

Наличие в передаточной функции показателя степени  $2M$  с очевидностью указывает на желательность привлечения структурных функций более высоких порядков. Их применение желательно с точки зрения сходимости в случае степенных спектральных плотностей с крутыми отрицательными наклонами. Из рассмотрения этого общего соотношения совместно с выражениями, приведенными в табл. 7, становится

понятно, почему  $\Sigma_y(\tau)$  «сходится лучше», чем  $\sigma_y(\tau)$ , которое в свою очередь «сходится лучше», чем  $I(\tau)$ .

Когда  $S_{\varphi}(f)$  допускает однозначное определение, формулу (8.10) можно переписать в виде

$$D_{\varphi}^{(M)}(\tau) = 2^{2M} \int_0^{\infty} S_{\varphi}(f) \sin^2 M \pi \tau f df. \quad (8.11)$$

4) *Применение  $D_{\varphi}^{(M)}(\tau)$  к случаю уходов полиномиального типа.* До сих пор мы занимались главным образом вопросами описания случайных флюктуаций в генераторах, однако в большинстве устройств действительно наблюдаются неслучайные отклонения (уходы) частоты на выходе, которые иногда могут моделироваться детерминированными полиномиальными функциями [9]. Структурные функции представляют интерес и в этом отношении, так как дают возможность разобраться в свойствах коэффициента ухода наивысшего порядка, т. е. в характере долговременной нестабильности источника [50].

Допустим, что уход частоты генератора моделируется полиномом  $(P-1)$ -го порядка ( $P \geq 2$ ):

$$y(t) = \sum_{i=1}^{P-1} d_i t^i. \quad (8.12)$$

Интегрирование в пределах от 0 до  $t$  дает для ухода фазы полином  $P$ -го порядка

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{P-1} D_i t^{i+1}, \quad (8.13)$$

где коэффициенты  $D_i$  связаны с  $d_i$  формулой

$$D_i = \frac{\omega_0 d_i}{i+1}. \quad (8.14)$$

Если пренебречь случайными флюктуациями в результатах измерения частоты, начинающегося в момент  $t_k$  и продолжающегося  $\tau$  секунд, получается среднее значение

$$\bar{y}_k = \sum_{i=1}^{P-1} \frac{d_i}{(i+1)\tau} [(t_k + \tau)^{i+1} - t_k^{i+1}]. \quad (8.15)$$

Таблица 8

Параметры во временной области для полиномиального ухода фазы

		Порядок полинома ухода фазы (P)			
		2 (Линейный уход частоты)	3 (квадратичный уход частоты)	4 (кубический уход частоты)	P
Порядок приращения фазы (M)	1	Зависит от времени	Зависит от времени	Зависит от времени	Зависит от времени
	2	$\sigma_y(\tau) = \frac{d_1}{\sqrt{2}} \tau$	Зависит от времени	Зависит от времени	Зависит от времени
	3	0	$\Sigma_y(\tau) = \frac{2}{3} d_2 \tau^2$	Зависит от времени	Зависит от времени
	4	0	0	$\sigma_{\text{нбс}} = 6 d_3 \tau^3$	Зависит от времени
	M = P	0	0	0	$\sigma_{\text{нбс}} = (P-1)! d_{P-1} \tau^{P-1}$

Подстановка этого выражения в формулу (8.8) или (8.9) позволяет исследовать свойства последовательных приращений фазы при наличии полиномиальных уходов:

- а) приращения фазы порядка  $M < P$  зависят от времени и, следовательно, мало пригодны в качестве мер постоянных коэффициентов ухода;
- б) все приращения фазы порядка  $M > P$  равны нулю и, следовательно, не имеют смысла;
- с) лишь  $P$ -е приращение фазы ( $M = P$ ) не зависит от времени и не обращается в нуль:

$$\Delta^{(P)}\varphi(t; \tau) = (P-1)! \omega_0 d_{P-1} \tau^P. \quad (8.16)$$

Оно прямо связано с коэффициентом ухода наивысшего порядка  $d_{P-1}$  и, следовательно, служит показателем долговременной нестабильности, поскольку с ростом  $t$  преобладающим в (8.12) становится член  $d_{P-1} t^{P-1}$  [50]. Конечно, в реальных генераторах в равной мере имеют место возмущения случайными шумами и приращения фазы более высокого порядка не обращаются в нуль, а служат мерой шумов, определяемой соотношением (8.10).

В целях более четкого сопоставления дрейфов со случайными нестабильностями интересно для полиномиальных уходов вычислить параметры, подобные  $\sigma_y(\tau)$ ,  $\Sigma_y(\tau)$  или другим. Для этого можно произвести подстановку в выражения, указанные в табл. 7, формулы (8.16). Результаты приведены в табл. 8. Мы видим, что для заданного значения степени  $y(t)$ , равного  $P-1$ , интерес представляет лишь один параметр, который изменяется как  $\tau^{P-1}$ . Так,  $\sigma_y(\tau)$  изменяется пропорционально  $\tau$  в случае линейного ухода частоты, а  $\Sigma_y(\tau)$  — как  $\tau^2$  в случае квадратичного ухода частоты.

С помощью приведенных выше результатов получен алгоритм проверки наличия уходов частоты на-

ивысшего порядка (а также присутствия шумов степенного типа), основанный на наблюдении поведения выборок структурных функций [50].

#### Д. Структурные функции частоты

С математической точки зрения можно рассматривать также последовательные приращения  $y(t)$ , определяемые как [52]

$$\Delta^{(M)}y(t; \tau) = \sum_{k=0}^M (-1)^k \binom{M}{k} y(t + (M-k)\tau). \quad (8.17)$$

Однако это выражение содержит мгновенные значения  $y(t)$ , не являющиеся наблюдаемыми величинами, и поэтому его практическая полезность ограничена. Тем не менее расчеты показывают, что  $D_y^{(M)}(\tau)$  обладает общими свойствами, очень похожими на свойства функции  $D_\varphi^{(M)}(\tau)$ , которая связана с наблюдаемыми величинами выражениями (8.8) и (8.9).

1) *Случайные нестабильности.* В данном случае  $D_y^{(M)}(\tau)$  связано с  $S_y(f)$  формулой

$$D_y^{(M)}(\tau) = 2^{2M} \int_0^\infty S_y(f) \sin^2 M \pi f \tau df, \quad (8.18)$$

которая служит аналогом (8.11) для фазового шума. Как и ранее, с ростом  $M$  можно рассматривать степенные зависимости с худшей сходимостью.

2) *Полиномиальные уходы.* Исходя из модели, определяемой выражением (8.12), можно показать, что:

- а) приращения частоты порядка  $M < P - 1$  зависят от времени и поэтому не очень полезны;
- б) приращения частоты порядка  $M > P - 1$  равны нулю и поэтому не имеют смысла;

- с) только приращение частоты  $(P-1)$ -го порядка не обращается в нуль и не зависит от времени; оно определяется как

$$\Delta^{(P-1)}y(t; \tau) = (P-1)! d_{P-1} \tau^{P-1}. \quad (8.19)$$

Эта величина непосредственно связана с коэффициентом ухода наивысшего порядка в  $y(t)$  и равна  $\sigma_{HBC}$ , приведенному в табл. 8.

В качестве частных случаев получаем для  $P=2$  (линейный уход частоты)

$$\Delta^{(1)}y(t; \tau) = \sqrt{2} \sigma_y(\tau) \quad (8.20)$$

и для  $P=3$  (квадратичный уход частоты)

$$\Delta^{(2)}y(t; \tau) = 3 \Sigma_y(\tau). \quad (8.21)$$

Таким образом, структурные функции частоты в применении к полиномиальным уходам дают по существу ту же информацию, что и структурные функции фазы.

#### Е. Долговременная нестабильность генераторов

При больших значениях  $\tau$  (измеряемых, скажем, сутками, месяцами и т. д.) существенные нестабильности частоты могут вызываться как весьма медлен-

ными случайными флюктуациями, так и весьма медленными детерминированными уходами частоты. Они моделируются соответственно степенными спектральными плотностями с отрицательным наклоном и полиномами. Как показано выше, структурные функции позволяют рассматривать процессы обоих видов (см. уравнения (8.10) и (8.16)). Интересно теперь сопоставить зависимости, получаемые для соответствующих параметров.

Одна из трудностей заключается в том, что структурная функция фазы  $M$ -го порядка позволяет рассматривать несколько видов спектральной плотности  $S_y(f) = h_{\alpha} f^{\alpha}$ , а именно вплоть до  $\alpha > -(2M-1)$ , в то же время значимую величину она дает только для ухода фазы, описываемого полиномом  $M$ -го порядка  $\varphi(t) = D_{M-1} t^M$ . Вследствие этого с помощью единственного статистического параметра (т. е. полученного из структурной функции фиксированного порядка) невозможно установить полное соответствие между степенными спектральными функциями и полиномиальными уходами в том смысле, чтобы по одному образцу каждой из этих зависимостей можно было получить значимую зависимость для представляющего интерес параметра.

В табл. 9 указаны зависимости для  $\sigma_y(\tau)$ ,  $\Sigma_y(\tau)$  и  $\sigma_{HBC}(N, \tau, \tau)$  в случае степенных спектральных плотностей, характеризующихся целочисленными отри-

Таблица 9

Долговременная нестабильность.  
Величины наклона и параметров  
во временной области для случайных шумов  
и полиномиальных уходом.

$S_y(f)$	$\sigma_y(\tau)$	$\Sigma_y(\tau)$
$h_{-1} f^{-1}$	$\tau^0$	$\tau^0$
$h_{-2} f^{-2}$	$\tau^{1/2}$	$\tau^{1/2}$
$h_{-3} f^{-3}$	$\infty$	$\tau$
$h_{-4} f^{-4}$	$\infty$	$\tau^{3/2}$
$h_{-5} f^{-5}$	$\infty$	$\infty$
Макс. наклон при целых $\alpha$ $M - \frac{3}{2}$	$1/2$	$3/2$

$y(t) = d_{P-1} t^{P-1}$	Наклон для параметров, представляющих интерес, $P-1$
$d_1 t$	$\sigma_y(\tau) \sim \tau$
$d_2 t^2$	$\Sigma_y(\tau) \sim \tau^2$
$d_3 t^3$	$\sigma_{HBC} \sim \tau^3$
$d_4 t^4$	$\sigma_{HBC} \sim \tau^4$

цательными значениями наклона, и в случае полиномиальных уходов. Вообще говоря, эти параметры зависят от  $\tau$  по степенному закону с положительным наклоном, причем с ростом либо отрицательного наклона  $S_y(f)$ , либо порядка полинома, описывающего уход, указанный наклон растет.

Конкретнее, для случайных процессов максимальный положительный наклон зависимости стандартного отклонения от  $\tau$ , полученной из структурной функции фазы  $M$ -го порядка, принимает при целочисленных  $\alpha$  значение  $M - 3/2$  (например,  $\sigma_y(\tau)$ , полученное из структурной функции фазы второго порядка, характеризуется максимальным положительным наклоном, равным  $1/2$ ). Для нецелых значений реальный максимум меньше  $M - 1$ . С другой стороны, в случае ухода  $y(t) = d_{p-1}t^{p-1}$  интерес представляет лишь одно стандартное отклонение, которое подчиняется закону  $\tau^{p-1}$ .

Таким образом, невозможно для одного и того же параметра во временной области указать определенную степенную зависимость (с фиксированным  $\alpha$ ) и определенный порядок полинома, описывающего уход, которые давали бы одинаковый наклон для его зависимости от  $\tau$  (различные параметры могут, конечно, подчиняться одинаковому закону, например  $\Sigma_y(\tau) \sim \tau$  для  $S_y(f) = h_{-3}f^{-3}$ , а  $\sigma_y(\tau) \sim \tau$  для  $y(t) = d_1t$ ).

Путем тщательного исследования зависимостей  $\sigma_y(\tau)$ ,  $\Sigma_y(\tau)$  и  $\sigma_{НВС}(N, \tau, \tau)$  от  $\tau$  можно однозначным образом определить, не возмущается ли данный стандарт частоты тем или иным случайным шумом или тем или иным полиномиальным уходом. Соответствующие выводы сведены в табл. 10. Отметим, что высказанные соображения справедливы только в отношении целочисленных значений  $\alpha$  для степенных спектров. Если  $\alpha$  может принимать дробные значения, скажем  $\alpha = -2,8$ , то  $\sigma_y(\tau) \sim \tau^{+0,9}$  и сходится. Когда  $\alpha$  приближается к  $-3$ , но соблюдается условие  $\alpha > -3$ ,  $\sigma_y(\tau) \rightarrow \tau^{+1}$  и продолжает сходиться.

Очень полезным может, несомненно, оказаться просмотр графика изменения  $y_n$  во времени.

Кроме того, в случае конечных наборов данных тот факт, что спектр имеет форму  $h_{-3}f^{-3}$  или  $h_{-5}f^{-5}$ , вполне может привести к ложному заключению, даже если  $\sigma_y(\tau)$  и  $\Sigma_y(\tau)$  для шумов такого типа не сходятся.

Таблица 10

Выявление случайных и детерминированных полиномиальных отклонений по законам изменения  $\sigma_y(\tau)$  и  $\Sigma_y(\tau)$

Закон изменения $\sigma_y(\tau)$	указывает на наличие
$\tau^{1/2}$ $\tau$	частотного шума случайных блужданий линейного ухода частоты
Закон изменения $\Sigma_y(\tau)$	указывает на наличие
$\tau^{1/2}$ $\tau$	частотного шума случайных блужданий $S_y(f) = h_{-3}f^{-3}$
$\tau^{3/2}$ $\tau^2$	$S_y(f) = h_{-5}f^{-5}$ квадратичного ухода частоты

**Ф. Заключение**

Метод структурных функций, предложенный Линдси и Цзе Чжа-мином, представляется весьма плодотворным, поскольку он обеспечивает:

а) теоретическое обобщение разнообразных параметров, предложенных в качестве показателей во временной области;

б) новые возможности при работе со степенными спектральными плотностями случайных шумов и при исследовании полиномиальных уходов.

Процесс такого обобщения развит в данной статье путем установления связей между  $D_y^{(M)}(\tau)$  и ранее введенными параметрами при  $M \geq 3$  (см. табл. 7).

Кроме того, рассмотрено использование структурных функций для идентификации случайных шумов степенного типа при наличии полиномиальных уходов (табл. 9 и 10), однако при этом требуется весьма тщательное исследование, так как возможны ложные заключения<sup>15)</sup>.

**IX. ИЗМЕРЕНИЕ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ЧАСТОТЫ**

Даже наиболее сложные статистические параметры не принесут никакой практической пользы при исследовании характеристик генераторов, если их нельзя измерить экспериментально, т. е. оценить по конечному набору данных. Поэтому параллельно с теоретическими изысканиями, описанными в данной статье, в лабораториях проводилась большая работа по созданию измерительных установок, способных различать весьма слабые флуктуации стандартов частоты. Успешное конструирование подобных систем в сильной степени связано с разработкой новейших компонентов и измерительных устройств, как, например, малощумящих смесителей и усилителей, а также цифровых счетчиков и анализаторов спектра.

Мы не приводим здесь техническое описание таких установок, которые очень подробно описаны в литературе (см., например, [1, 2, 19, 21, 22, 38, 41, 44, 45, 54, 55, 57]). Мы ограничимся лишь тем, что подчеркнем некоторые из их особенностей. Описание схем читатель найдет в оригинальных работах.

**А. Необходимость использования опорного генератора**

Чтобы измерить частоту одного генератора, фактически необходимо располагать хотя бы двумя генераторами, один из которых, например, вырабатывает опорный временной интервал цифрового счетчика.

Для каждого физического измерения, безусловно, существует свой наиболее подходящий вид опорного источника.

Поскольку стабильность опорного генератора выше, чем стабильность проверяемого, измеренные нестабильности относятся главным образом к последнему. Однако, когда имеют дело с современными источниками, оба генератора часто бывают одного типа и примерно одинакового качества. При таких условиях

<sup>15)</sup> В период рецензирования данной статьи была опубликована работа [70], в которой упор сделан на идентификацию спектральных плотностей степенного типа. Заметим, что параметр  $D_x^2(\tau)$ , приведенный в табл. 1 указанной работы, связан с  $\Sigma_y^2(\tau)$ , приведенным в нашей табл. 5, соотношением  $\Sigma_y^2(\tau) = D_x^2(\tau)/9\tau^2$ .

предполагается, что в них имеют место некоррелированные флюктуации частоты с одинаковыми статистическими свойствами. Тогда вклад одного генератора должен определяться делением измеренных стандартных отклонений на  $\sqrt{2}$ . Предложен метод оценки нестабильности частоты отдельного генератора на основе данных сравнения его не менее чем с двумя другими генераторами [53] в предположении, что ЧМ-шумы этих генераторов некоррелированы. Этот метод действует, даже если «опорные» генераторы менее стабильны по сравнению с испытываемым, хотя в таком случае достоверность результатов резко снижается.

### В. Определение частоты по данным измерений во временной области

С дихотомией, проявляющейся в теории, мы, конечно, встречаемся и в измерительной технике: в классическом случае измерения во временной области производятся посредством цифровых счетчиков, а в частотной — низкочастотными анализаторами спектра.

Однако теоретические работы, в результате которых были разработаны такие параметры, как дисперсия Адамара и верхнечастотная дисперсия, ослабили влияние этой дихотомии, поскольку спектральные плотности оказалось возможным измерять счетными методами [31, 39, 40], а дисперсии — методами фильтрации [43, 46].

Вообще говоря, в устройствах для измерений во временной области и для измерений в частотной области имеется ряд общих узлов, даже когда оконечные измерительные узлы (например, счетчик или анализатор спектра) различны.

### С. Необходимость демодуляции

Поскольку мы собираемся измерять флюктуации фазы или частоты генератора квазисинусоидального сигнала, необходимо располагать методами демодуляции этих флюктуаций, которая должна предшествовать их измерению и статистическому анализу.

Для этой цели часто используется система ФАП, с помощью которой производится синхронизация опорного генератора с проверяемым и получают требуемые два сигнала с квадратурным фазовым сдвигом, подаваемые на входы фазового детектора. Постоянная времени системы ФАП выбирается таким образом, чтобы аналоговое напряжение на выходе фазового детектора было пропорционально величине флюктуаций либо фазы, либо частоты во всем представляющем интерес диапазоне частот фурье-преобразований [22, 44, 45, 59]. В зависимости от исходных установок и вида измерительного устройства система ФАП может использоваться для измерений либо в частотной, либо во временной областях.

Иногда в качестве частотных дискриминаторов используются дисперсионные элементы, которые преобразуют частотный шум в аналоговое напряжение [54].

### Д. Потребность в высококачественных системах

Современный уровень точности стандартов времени и частоты настолько высок, что одно измерительное устройство не может обеспечить выявление их весьма слабых флюктуаций вследствие недостаточного

разрешения, чувствительности или динамического диапазона.

Поэтому необходимы методы усиления флюктуаций перед их измерением. Для этой цели применяются, например, умножители частоты, после которых производится гетеродинирование, или умножители частотной ошибки. По этой же причине между фазовым детектором в системе ФАП и измерительным прибором включается усилитель с очень малым уровнем шума.

Должен быть обеспечен также более низкий по сравнению с уровнем измеряемых шумов генератора уровень шумов системы. В этом отношении важным достижением для реализации малощумящих измерительных установок было появление смесителей на диодах с барьером Шотки (используемых в качестве фазовых детекторов). Как показано в работе [55], перед любым измерением шумов генератора целесообразно измерить шум системы.

### Е. Автоматизация измерений

Следуя общей тенденции развития измерительной техники, автоматизированные измерительные установки были разработаны как для частотной, так и для временной областей [38, 54, 56, 58]. В данной отрасли автоматические системы действительно полезны, так как приходится обрабатывать большие объемы данных, выполнять различные статистические процедуры для получения разного рода параметров, причем часто требуется строить графики полученных результатов. Программа вычислительного устройства может предусматривать выбор частот, значений ширины полосы, последовательности измерений, статистических процедур, построение графиков результатов и даже калибровку системы.

### Г. Классификация измерительных систем

В ходе разработки системы для измерения временных промежутков с высоким разрешением Аллен и Даамс [59] предложили следующую классификацию измерительных систем в зависимости от измеряемой ими величины:

- a) время;
- b) временные флюктуации;
- c) частота;
- d) частотные флюктуации.

Если система обеспечивает измерение, скажем, временных флюктуаций, то по его результатам можно определить частоту и частотные флюктуации, но не время; то же самое относится и к остальным системам. Наибольшую гибкость в обработке данных обеспечивают системы класса «а» с рабочими характеристиками, отвечающими современному уровню требований, т. е. системы, которые позволяют с надлежащей точностью измерять величины временных интервалов. Если же главная функция заключается в измерении нестабильности частоты, то вполне удовлетворительные результаты даст система класса «d». В качестве примера можно привести систему с жесткой ФАП, имеющую постоянную времени порядка нескольких миллисекунд. В этом случае выходное напряжение при длительности усреднения, превышающей постоянную времени петли, пропорционально флюктуациям ча-



стоты (но не фазы). Это устройство пригодно для измерений во временной области при значениях  $\tau$  порядка 1 с и более.

**Х. ВЫВОДЫ**

Мы рассмотрели ряд предложенных показателей стабильности фазы и частоты, среди которых были как хорошо известные и широко используемые параметры, так и новые. В отношении последних мы попытались ясно указать на их конкретные преимущества, исследуя для этой цели соответствующие передаточные функции. В связи с рассмотрением структурных функций было описано влияние полиномиальных уходов частоты, играющих важную роль при изучении долговременной стабильности, и проведено сравнение их влияния с влиянием низкочастотных расходящихся случайных шумов.

Во всех методах главную роль играют спектральные плотности в том смысле, что по ним могут быть найдены другие показатели нестабильности, тогда как в общем случае обращение соответствующих формул если и возможно, то обычно весьма затруднительно.

В феврале 1978 г. Исследовательской комиссией 7 Международного консультативного комитета по радиосвязи (МККР) «Эталонные частоты и сигналы времени» был принят новый документ (который будет включен в сборник [62]), рекомендуемый использование спектральных плотностей, а для временной области — двухвыборочного стандартного отклонения  $\sigma_y(\tau)$ . Эта новая рекомендация несомненно будет иметь большое международное значение для инженеров, которые не являются специалистами в данной области, но сталкиваются с проблемой описания стабильности.

Тем не менее складывается впечатление, что экспериментаторам следует испытать ряд новых характеристик, поскольку они могут оказаться полезными, в частности при исследовании более глубоких фундаментальных свойств генераторов.

Здесь необходимо подчеркнуть, что разработаны и другие методы анализа, не освещенные в данной статье, которые могут найти применение для описания характеристик высокостабильных источников частоты. Можно, в частности, назвать модели на основе авторегрессии и интегрального скользящего среднего (АРИСС — Auto-Regressive Integrated Moving Average, АRIMA), которые, если их модифицировать применительно к обработке рассматриваемых здесь данных, окажутся мощным средством машинного моделирования и оптимального прогнозирования [63]. Барнсом была рассмотрена возможность их применения к данным о времени и частоте, включая вопросы связи между параметрами модели и  $S_y(f)$  [12]. В более развернутом виде модели АРИСС использовались Персивалем [64] для прогнозирования отклонений частоты коммерческих стандартов на цезиевом пучке при значениях свободного промежутка от 1 до 64 суток и Хьюбером [65] для решения задач прогнозирования при реализации временных шкал.

Особый интерес в связи с характеристиками стабильности частоты вызывает тот факт, что в качестве показателя нестабильности частоты Персиваль предложил пользоваться ошибками прогнозирования, т. е. связывать нестабильность с показателем непредсказу-

емости частоты, автоматически учтя тем самым систематические компоненты.

Недавно предложены и другие методы, как, например, метод дисперсии с конечным временем, определяемой как среднее общей квадратичной формы результатов измерений [66]. Предлагается также применение в целях описания стабильности функций неопределенности [67]. В этом случае генератор включается в некую глобальную систему, характеристики которой требуется отыскать.

Существующие на сегодняшний день модели случайных гауссовских шумов подробно описаны и служат хорошей основой для интерпретации результатов реальных измерений. Однако будущие исследователи наверняка займутся разработкой более тонких моделей, которые, возможно, углубят наши знания некоторых фундаментальных свойств генераторов, например свойств фликкер-шума и возможных спорадических элементов. Эти новые модели потребуют, вероятно, введения новых показателей стабильности.

В общем, несмотря на то что рассматриваемая область представляется зрелой, в ней еще остается широкий простор для новых исследований. Как это не раз бывало в прошлом, сильным побудительным фактором для них наверняка послужит разработка сложных систем, например систем цифровой связи [68] с более жесткими требованиями в отношении описания источников эталонных сигналов частоты и времени.

**СЛОВАРЬ СИМВОЛОВ**

В статье используется множество символов. Ниже дается определение наиболее важных из них. Для наглядности они разбиты на несколько крупных разделов.

Символ	Определение	Формулы или рисунки
<i>Сигнал</i>		
$V(t)$	Мгновенное значение напряжения выходящего квазисинусоидального сигнала	(2.1), (2.2), (2.4)
$V_0$	Номинальное значение амплитуды $V(t)$	(2.1), (2.2), (2.4)
$\nu_0$	Номинальное значение частоты $V(t)$ (угловая частота $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ )	(2.1), (2.2), (2.4)
<i>Флюктуации, модуляция и уходы</i>		
$\epsilon(t)$	Случайные мгновенные флюктуации амплитуды (амплитудный шум)	(2.2)
$\phi(t)$	Случайные мгновенные флюктуации фазы относительно $2\pi\nu_0 t$ (фазовый шум)	(2.3), (2.4)
$\Delta\nu(t)$	Случайные мгновенные флюктуации частоты относительно $\nu_0$ (частотный шум)	(2.6), (2.7)
$\nu(t)$	Мгновенное значение частоты $V(t)$	(2.6)
$x(t)$	Случайное мгновенное отклонение по времени	(2.10)
$y(t)$	Относительные флюктуации частоты	(2.9)
$A(t)$	Относительные флюктуации амплитуды	(3.13)

Символ	Определение	Формулы или рисунки
$f_m$	Модулирующая частота при синусоидальной ЧМ или ФМ	(2.3), (5.14)
$d_i$	Коэффициент полиномиального ухода относительной частоты ( $i$ -го порядка)	(5.17), (8.12)
$D_i$	Коэффициент полиномиального ухода фазы ( $i+1$ -го порядка)	(2.3), (8.13)
<i>Частотная область</i>		
$S_g^{(TS)}(f)$	Двусторонняя спектральная плотность в расчете на 1/Гц действительной функции $g(t)$	(3.2)
$S_g(f)$	Односторонняя спектральная плотность $g(t)$ . В статье термин применяется по отношению к $\varphi(t)$ , $\Delta v(t)$ , $x(t)$ , $y(t)$ , $A(t)$ , $V(t)$	(3.3)
$f$	Частота Фурье-преобразования ( $\omega = 2\pi f$ )	
$\alpha$	Показатель степени $f$ для степенной спектральной плотности (обычно $\alpha = 2, 1, 0, -1, -2$ )	(3.9)
$h_\alpha$	Положительный действительный коэффициент при $f^\alpha$ в степенной спектральной плотности	(3.9)
$f_h$	Верхняя граничная частота идеального фильтра нижних частот	(3.10)
<i>Последовательность измерений</i>		
$\tau$	Интервал временного усреднения при измерении частоты	(4.1)
$t_k$	Момент начала $k$ -го измерения частоты ( $k = 1, 2, 3, \dots, N$ )	(4.1)
$T$	Интервал времени между началами двух последовательных измерений частоты ( $T = t_{k+1} - t_k$ )	Рис. 4
$N$	Количество данных для вычисления выборочной дисперсии, модифицированной выборочной дисперсии или дисперсии Адамара (положительное целое число)	Рис. 4
$m$	При $N=2$ требуется $m+1$ данных для оценки $\sigma_y^2(\tau)$	(4.22)
$h(t)$	Действительная функция времени, отображающая последовательность измерений параметра во временной области. Входит в формулы для нескольких приведенных в тексте видов дисперсии	(5.3)
<i>Временная область</i>		
$y_k$	Мгновенное значение $y(t)$ при $t = t_k$	(7.9)
$\bar{y}_k$	Относительные частотные флуктуации, усредненные на интервале от $t_k$ до $t_k + \tau$	(4.2)
$n_k$	Результат счета (число периодов входного сигнала на интервале от $t_k$ до $t_k + \tau$ )	(4.1)
$I^2(\tau)$	Истинная дисперсия $\bar{y}_k$	(4.5)
$\sigma_y^2(N, T, \tau)$	Выборочная дисперсия по $N$ образцам $\bar{y}_k$ ( $k=1, \dots, N$ ). В тексте дано три определения этой величины. Данный символ относится ко второму из них	(4.13)

Символ	Определение	Формулы или рисунки
$\sigma_y^2(\tau)$	То же для $N=2$ и $T=\tau$ . Рекомендованный показатель нестабильности во временной области	(4.17), (4.18)
$\hat{\sigma}_y^2(\tau, m)$	Оценка $\sigma_y^2(\tau)$ , полученная по $m+1$ результатам измерения $\bar{y}_k$	(4.22)
$E_\alpha$	Доверительный интервал для предыдущей оценки при степенной спектральной плотности вида $h_\alpha f^\alpha$	(4.23)
$\langle \sigma_H^2(N, T, \tau) \rangle$	Дисперсия Адамара для $N$ выборок $\bar{y}_k$ ( $k=1, \dots, N$ )	(6.1)
$\langle \sigma_{HBC}^2(N, T, \tau) \rangle$	Дисперсия Адамара при обработке выборок биномиальными весовыми коэффициентами	(6.4)
$\sigma_{HP}^2(\tau)$	Верхнечастотная дисперсия (измеренная посредством фильтрации)	(6.8), (6.10)
$\sigma_{BP}^2(\tau)$	Полосовая дисперсия (измеренная посредством фильтрации)	(6.8), табл. 4
$\sum_{\bar{y}}^2(N, T, \tau)$	Модифицированная выборочная дисперсия для $N$ выборок $\bar{y}_k$ ( $k=1, \dots, N$ )	(7.1)
$\sum_{\bar{y}}^2(\tau)$	То же для $N=3$ и $T=\tau$	(7.4)
$\langle \delta y_T^2 \rangle$	Средний квадрат относительного приращения частоты $\delta y_T = y(t_{k+1}) - y(t_k)$ , где $T = t_{k+1} - t_k$	(7.9)
$\langle \delta \bar{y}_T^2 \rangle$	Средний квадрат разности двух последовательных несмежных $\bar{y}_k$ ( $T > \tau$ )	(7.15)
$R_g(\tau)$	Корреляционная функция действительной функции $g(t)$	(3.1)
<i>Передаточные функции</i>		
$H(f)$	Передаточная функция, связанная с дисперсией и фигурирующая в соотношении, связывающем ее с $S_y(f)$ . Представляет собой преобразование Фурье от $h(t)$ . В тексте используется при определении нескольких видов дисперсии	(3.1), (6.7)
$H_\Phi(f)$	Передаточная функция, связывающая дисперсию с $S_\Phi(f)$	(6.8), (6.9), (6.10)
<i>Структурные функции</i>		
$M$	Порядок приращения структурной функции (положительное целое число)	
$\Delta^{(M)}g(t; \tau)$	Приращение $M$ -го порядка действительной функции $g(t)$	(8.1)
$D_g^{(M)}(T; \tau)$	Структурная функция приращения $M$ -го порядка	(8.3)
$D_g^{(M)}(\tau)$	Структурная функция $M$ -го порядка $g(t)$ , определяемая как $D_g^{(M)}(T=0; \tau)$	(8.4)
$P$	Порядок полиномиального ухода соответствующей величины	(8.12)

ОТ АВТОРА

Хотелось бы выразить благодарность многим лицам за весьма плодотворные дискуссии, проведенные за последние годы, и в особенности Д. У. Аллену, д-ру Дж. А. Барнсу, проф. Дж. де Пренсу и проф. Б. Писанно. Автор весьма признателен также за кон-

структивные обсуждения во время двух последних заседаний Исследовательской комиссии 7 МКРП д-ру А. Р. Чжи, д-ру П. Карташову и д-ру Дж. М. Р. Уинклеру. Наконец, хотелось бы особо поблагодарить проф. Дж. Юберсфельда за постоянный интерес и моральную поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

[1] "IEEE-NASA Symposium on Short-Term Frequency Stability," Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, Nov. 23-24, 1964 (Document NASA SP-80).

[2] Стабильность частоты: Тематический выпуск.— (ТНИЭР, 1966, т. 54, № 2.)

[3] E. J. Baghdady, R. N. Lincoln, and B. D. Nelin, "Short term frequency stability: Characterization, theory and measurement," in [1], pp. 65-88.

[4] L. S. Cutler, "Some aspects of the theory and measurement of frequency fluctuations in frequency standards," in [1], pp. 89-100.

[5] Катлер, Сирль. Некоторые аспекты теории и измерений частотных флюктуаций стандартов частоты.— См. [2], с. 41—61.

[6] Вессот, Мюллер, Ванье. Определение характеристик генератора по результатам измерений в частотной области.— См. [2], с. 109—117.

[7] Аллен. Статистические характеристики атомных стандартов частоты.— См. [2], с. 132—142.

[8] J. A. Barnes, A. R. Chi, L. S. Cutler, D. J. Healey, D. B. Leeson, T. E. McGunigal, J. A. Mullen, W. L. Smith, R. L. Sydnor, R. Vessot and G. M. R. Winkler, "Characterization of frequency stability," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-20, pp. 105-120, May 1971.

[9] G. M. R. Winkler, "A brief review of frequency stability measures," in *Proc. 8th Annu. PTTI Applications and Planning Meeting*, (U.S. Naval Research Laboratory, Washington DC), Nov. 30-Dec. 2, 1976, pp. 489-527.

[10] J. A. Barnes, "A review of methods of analyzing frequency stability," in *Proc. 9th Annu. PTTI Applications and Planning Meeting*, Nov. 29-Dec. 1, 1977.

[11] Слепян Д. О ширине полосы. *ТНИЭР*, 1976, т. 64, № 3, с. 4—14.

[12] J. A. Barnes, "Models for the interpretation of frequency stability measurements," NBS Tech. Note 683, Aug. 1976.

[13] E. Boileau and B. Picinbono, "Statistical study of phase fluctuations and oscillator stability," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-25, no. 1, pp. 66-75, March 1976.

[14] J. L. Doob, "The Brownian movement and stochastic equations," *Ann. Math.*, vol. 43, no. 2, Apr. 1942.

[15] A. M. Yaglom, "Correlation theory of processes with random stationary Nth increments," *Ann. Math. Soc. Trans.*, vol. 8, pp. 87-141, 1958.

[16] B. Picinbono, "Processus à accroissements stationnaires," *Ann. des Télécom.*, Tome 30, no. 7-8, pp. 211-212, July-Aug. 1975.

[17] Рутман (Рютман), Юберсфельд. Модель частотного фликкершума генераторов. *ТНИЭР*, 1972, т. 60, № 2, с. 101—103.

[18] "Annales des Télécommunications," Special issue on analysis of non-stationary signals, Tome 30, no. 7-8, pp. 203-308, July-Aug. 1975.

[19] F. Walls, "New horizons and old pitfalls in frequency and time metrology," in *Proc. 2nd Frequency Standards and Metrology Symp.*, Copper Mountain, CO, July 5-7, 1976, pp. 489-517.

[20] Бендат Дж., Пирсол А. *Измерение и анализ случайных процессов*. М.: Мир, 1974.

[21] F. L. Walls and S. R. Stein, "Accurate measurements of spectral density of phase noise in devices," in *Proc. 31st Annu. Frequency Control Symp.*, (Atlantic-City, NJ), June 1-3, 1977, pp. 335-343.

[22] D. A. Howe, "Frequency domain stability measurements: A tutorial introduction," NBS Technical Note 679, Mar. 1976.

[23] D. W. Allan, "A review of flicker noise frequency instabilities in precision frequency standards," in *Proc. Symp. 1/f Fluctuations* (Sasakawa Hall, Tokyo, Japan), July 11-13, 1977.

[24] Ласей, Хелгесон, Холловой. Кратковременная стабильность пассивных атомных стандартов частоты.— См. [2], с. 78—84.

[25] D. Halford, A. E. Wainwright, and J. A. Barnes, "Flicker noise of phase in RF amplifiers and frequency multipliers: Characterization, cause and cure" (summary), in *Proc. 22nd Annu. Frequency Control Symp.*, (Atlantic-City, NJ), Apr. 1968, pp. 340-341.

[26] Аткинсон, Фий, Ньюмен. Спектральный анализ чрезвычайно низкочастотных изменений частоты кварцевых генераторов. *ТНИЭР*, 1963, т. 51, № 2, с. 413—414.

[27] F. Clerc, "Pureté spectrale et stabilité des harmoniques de rang élevé d'un oscillateur métrologique," Thèse de Doctorat de 3e Cycle, Université Paris VI, Sept. 30, 1977.

[28] J. Rutman, "Relations between spectral purity and frequency stability," in *Proc. 28th Annu. Frequency Control Symp.*, (Atlantic-City, NJ), May 29-31, 1974, pp. 160-165.

[29] Миддлтон Д. *Введение в статистическую теорию связи*. Т. 1, 1961, т. 2, 1962.— М.: Сов. радио.

[30] Барнс. Точное измерение времени с помощью атомных стандартов частоты и статистические свойства прецизионных генераторов сигналов.— См. [2], с. 118—132.

[31] P. Lesage and C. Audoin, "Instabilité de fréquence des oscillateurs: mesure dans le domaine fréquence par une méthode temporelle," *L'Onde Electrique*, vol. 55, no. 2, pp. 82-89, Feb. 1975.

[32] J. Rutman, "Instabilité de fréquence des oscillateurs," *L'Onde Electrique*, vol. 52, no. 11, pp. 480-487, Dec. 1972.

[33] P. Lesage and C. Audoin, "Characterization of frequency stability: uncertainty due to the finite number of measurements," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-22, pp. 157-161, June 1973. (См. также поправки, опубликованные в марте 1974 г. и в сентябре 1976 г.)

[34] K. Yoshimura, "Characterization of frequency stability: Uncertainty due to the autocorrelation function of the frequency fluctuations," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-27, no. 1, pp. 1-7, Mar. 1978.

[35] J. A. Barnes, "Tables of bias functions,  $B_1$  and  $B_2$ , for variances based on finite samples of processes with power law spectral densities," NBS Tech. Note 375, Jan. 1969.

[36] A. R. Chi, "The mechanics of translation of frequency stability measures between frequency and time domain measurements," in *Proc. 9th Annu. PTTI Applications and Planning Meeting*, Nov. 29-Dec. 1, 1977.

[37] J. Rutman, "Comment on: Characterization of frequency stability," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-21, p. 85, Feb. 1972.

[38] M. C. Fisher, "Frequency stability measurement procedures," in *Proc. 8th Annu. PTTI Applications and Planning Meeting*, (U.S. Naval Research Laboratory, Washington DC), Nov. 30-Dec. 2, 1976, pp. 575-617.

[39] R. A. Baugh, "Frequency modulation analysis with the Hadamard variance," in *Proc. 25th Annu. Frequency Control Symp.*, (Atlantic-City, NJ), Apr. 1971, pp. 222-225.

[40] G. Sauvage and J. Rutman, "Analyse spectrale du bruit de fréquence des oscillateurs par la variance de Hadamard," *Ann. Télécom.*, tome 28, no. 7-8, pp. 301-314, July-Aug. 1973.

[41] J. Gros Lambert, "A new spectrum analyser using both analog and digital filtering via Hadamard variance," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-25, pp. 480-483, Dec. 1976.

[42] J. Rutman, "Characterization of frequency stability: a transfer function approach and its application to measurement via filtering of phase noise," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-23, pp. 40-48, Mar. 1974.

[43] J. Rutman and G. Sauvage, "Measurement of frequency stability in time and frequency domains via filtering of phase noise," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-23, pp. 515-518, Dec. 1974.

[44] D. W. Allan, "The measurement of frequency and frequency stability of precision oscillators," NBS Tech. Note 669, May 1975.

[45] D. G. Meyer, "A test-set for the accurate measurement of phase noise on high quality signal sources," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-19, pp. 215-227, Nov. 1970.

[46] R. G. Wiley, "A direct time domain measure of frequency stability: the modified Allan variance," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-26, pp. 38-41, Mar. 1977.

[47] J. Rutman, "Oscillator specifications: A review of classical and new ideas," in *Proc. 31st Annu. Frequency Control Symp.*, (Atlantic-City, NJ), June 1-2-3, 1977, pp. 291-301.

[48] J. De Prins and G. Cornelissen, "Power spectrum, frequency stability and flicker noise," in *Proc. Frequency Standards and Metrology Seminar* (Univ. Laval, Québec, Canada), Aug. 30-31-Sept. 1, 1971, pp. 368-387.

[49] G. Cornelissen, "Analyse de signaux et application aux problèmes de définition de la stabilité de fréquence," Thèse de Doctorat es Sciences Physiques, Univ. Libre de Bruxelles, Belgique, Année académique 1975-1976.

[50] Линдси У. С., Цзе Чжа-мин. Теория нестабильности генераторов, основанная на структурных функциях. *ТНИЭР*, 1976, т. 64, № 12, с. 5—21.

[51] W. C. Lindsey, C. M. Chie, and W. E. Leavitt, "Interpretation and application of oscillator instability measures using structure functions," in *Proc. 8th Annu. PTTI Applications and Planning Meeting*, (U.S. Naval Res. Lab., Washington, DC), Nov. 30-Dec. 2, 1976, pp. 535-560.

[52] W. C. Lindsey and C. M. Chie, "Structure function of oscillator fractional phase and frequency fluctuations," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-26, pp. 420-421, Dec. 1977.

- [53] J. E. Gray and D. W. Allan, "A method for estimating the frequency stability of an individual oscillator," in *Proc. 28th Annu. Frequency Control Symp.*, (Atlantic City, NJ), May 29-31, 1974, pp. 243-246.
- [54] A. L. Lance, W. D. Seal, F. G. Mendoza and N. W. Hudson, "Automating phase noise measurements in the frequency domain," in *Proc. 31st Annu. Frequency Control Symp.*, (Atlantic City, NJ), June 1-3, 1977, pp. 347-358.
- [55] F. L. Walls, S. R. Stein, J. E. Gray, and D. J. Glaze, "Design considerations in state-of-the-art signal processing and phase noise measurement system," in *Proc. 30th Annu. Frequency Control Symp.*, (Atlantic City, NJ), June 1976, pp. 269-274.
- [56] J. Gros Lambert, M. Olivier, and J. Uebersfeld, "Automatic plotting systems for frequency stability curves and discrete spectral density of frequency standards," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-21, no. 4, pp. 405-409, Nov. 1972.
- [57] J. Gros Lambert, G. Marianneau, and M. Olivier, "Méthodes expérimentales de caractérisation des oscillateurs," *L'Onde Electrique*, vol. 55, no. 2, pp. 74-81, Feb. 1975.
- [58] D. Babitch and J. Oliverio, "Phase noise of various oscillators at very low Fourier frequencies," in *Proc. 28th Annu. Frequency Control Symp.*, (Atlantic City, NJ), May 29-31 1974, pp. 150-159.
- [59] D. W. Allan and H. Daams, "Picosecond time difference measurement system," in *Proc. 29th Annu. Frequency Control Symp.*, (Atlantic City, NJ), May 28-30, 1975, pp. 404-411.
- [60] G. Kramer, "Digitale Bestimmung von Schwankungsspektren," *PTB, Jahresbericht 1975*, p. 157.
- [61] —, "Charakterisierung von Schwankungserscheinungen," *PTB-Bericht*, PTB-Me-13, Feb. 1977.
- [62] C.C.I.R., XIVth Plenary Assembly, Kyoto 1978, Volume VII "Standard Frequencies and Time Signals," published by the International Telecommunication Union, Geneva, Switzerland.
- [63] G. E. P. Box and G. M. Jenkins, *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. San Francisco, CA: Holden-Day, 1976 (revised edition).
- [Имеется перевод I-го изд.: Бокс Дж., Дженкинс Н. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М.: Мир, 1974.]
- [64] D. B. Percival, "Prediction error analysis of atomic frequency standards," in *Proc. 31st Annu. Frequency Control Symp.*, (Atlantic City, NJ), USA, June 1-3, 1977, pp. 319-326.
- [65] U. Hübner, "Models and predictions for the realization of time scales," in *Proc. 31st Annu. Frequency Control Symp.*, (Atlantic City, NJ), June 1-3, 1977, pp. 327-334.
- [66] E. Boileau and Y. Lecourtier, "Description statistique de la stabilité des oscillateurs," in *Proc. Int. Symp. Measurements in Telecommunications* (organized by URSI, Lannion, France), Oct. 3-7, 1977, pp. 231-236.
- [67] R. Moreau, "Comparaison des oscillateurs ultrastables. Intérêt relatif des mesures temporelles et fréquentielles," in *Proc. Int. Symp. Measurements in Telecommunications* (organized by URSI, Lannion, France), Oct. 3-7, 1977, pp. 219-225.
- [68] P. Kartaschoff, "Frequency control and timing requirements for communications," in *Proc. 31st Annu. Freq. Control Symp.*, (Atlantic City, NJ), June 1-3, 1977, pp. 478-483.
- [69] J. A. Barnes and D. W. Allan, "An approach to the prediction of coordinated universal time," *Frequency*, vol. 5, pp. 15-20, Nov.-Dec. 1967.
- [70] W. C. Lindsey and C. M. Chie, "Identification of power-law type oscillator phase noise spectra from measurements," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-27, pp. 46-53, Mar. 1978.

#### Другие публикации, представляющие общий интерес

##### Книги

- P. Kartaschoff, *Frequency and Time*. London, England: Academic Press, 1978.
- B. E. Blair, Ed., *Time and Frequency: Theory and Fundamentals* (NBS Monograph no. 140) Washington DC: U.S. Government Printing Office.
- G. M. R. Winkler, *Timekeeping and Its Applications, Advances in Electronics and Electron Physics*, vol. 44. New York: Academic Press, 1977.
- R. B. Blackman and J. W. Tukey, *The Measurement of Power Spectra*. New York: Dover Publ., 1958.
- F. M. Gardner, *Phase-Lock Techniques*. New York: Wiley, 1966.
- A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. New York: McGraw-Hill, 1965.
- E. Oran Brighman, *The Fast Fourier Transform*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1974.
- G. A. Campbell and R. M. Foster, *Fourier Integrals for Practical Applications*. Princeton NJ: Van Nostrand, 1948.
- Давенпорт В. Б., Рут В. Л. *Введение в теорию случайных сигналов и шумов*. М.: ИЛ, 1960.

#### Обзоры

Время и частота: Тематический выпуск.— (ТИИЭР, 1972, т. 60, № 5.)

*IEEE Trans. Instrum. Meas.*, Special Issue on Conference on Precision Electromagnetic Measurements, Every December of even-numbered years.

*L'Onde Electrique*, Special Issue on ultra stable oscillators and their applications, vol. 52, no. 11, pp. 479-536, Dec. 1972 and vol. 53, no. 2, pp. 39-78, Feb. 1973.

*L'Onde Electrique*, Special Issue on Frequency Stability and Spectral Purity Measurement Techniques, vol. 55, no. 2, pp. 65-126. Feb. 1975.

#### Симпозиумы

Труды ежегодных симпозиумов по регулированию и контролю частоты

Год	№ выпуска	Кем высылается	№ документа
1956	10	NTIS <sup>a</sup>	AD 298 322
	7	"	AD 298 323
	8	"	AD 298 324
	9	"	AD 298 325
1960	14	"	AD 246 500
	1	"	AD 265 455
	2	"	PB 162 343
	3	"	AD 423 381
	4	"	AD 450 341
	5	"	AD 471 229
	6	"	AD 800 523
	7	"	AD 659 792
	8	"	AD 844 911
	9	"	AD 746 209
1970	24	EIA <sup>b</sup>	
	1	NTIS	AD 746 211
	2	"	AD 771 043
	3	"	AD 771 042
	4	EIA	
	5	"	
	6	"	
	7	"	

Труды ежегодных совещаний по применению и планированию точного времени и временных интервалов<sup>c</sup>

<sup>a</sup>NTIS, National Technical Information Service  
Sills Building  
5285 Port Royal Road  
Springfield, VA 22161.

<sup>b</sup>EIA, Publications Committee  
Annual Frequency Control Symposium  
Electronic Industries Association  
2001 Eye Street, N.W.  
Washington DC 20006.

<sup>c</sup>Technical Information and Administrative Support  
Division, Code 250, Goddard Space Flight Center,  
Greenbelt, MD 20771.

Жак Рютман родился во Франции в 1945 г. В 1972 г. в VI Парижском университете, Франция, получил степень доктора наук по физике. С 1968 по 1971 г. работал в Национальном управлении по аэрокосмическим исследованиям, Франция, а с 1971 по 1974 г. возглавлял научно-исследовательский отдел фирмы Adret Electronique. В 1975 г. поступил в Национальное бюро метрологии, Франция, в качестве заместителя директора лаборатории первичных эталонов времени и частоты при Парижской обсерватории. Круг научных интересов охватывает исследование шумов генераторов, вопросы описания нестабильностей фазы и частоты и родственные вопросы методики измерений. В настоящее время занимается также исследованием методов сравнения времени и метрологией частот оптического диапазона. С 1972 г. преподает в VI Парижском университете метрологию времени и частоты; с 1976 г. является членом Исследовательской группы 7 «Эталонные частоты и сигналы времени» Международного консультативного комитета по радиосвязи (МККР), где в настоящее время возглавляет Французскую исследовательскую группу 7. Член Французского национального комитета по радиоэлектронике (CNER), Французского комитета Международного научного радиообъединения, а также Французского общества электриков и специалистов по электронике и радиотехнике (SEE), где является председателем технической секции метрологии, измерительной техники и измерительной аппаратуры.