Занятие 4.
Обнаружение сигналов

Постановка задачи обнаружения.

Наблюдается реализация y(t) на интервале [0,T]:

$$y(t)=\begin{cases} S(t,\lambda)+n(t), & \text{если сигнал присутствует,}\\ n(t), & \text{если сигнал отсутствует.}\end{cases}$$

или

$$y(t)=\vartheta S(t,\lambda)+n(t), \quad t\in[0,T]$$

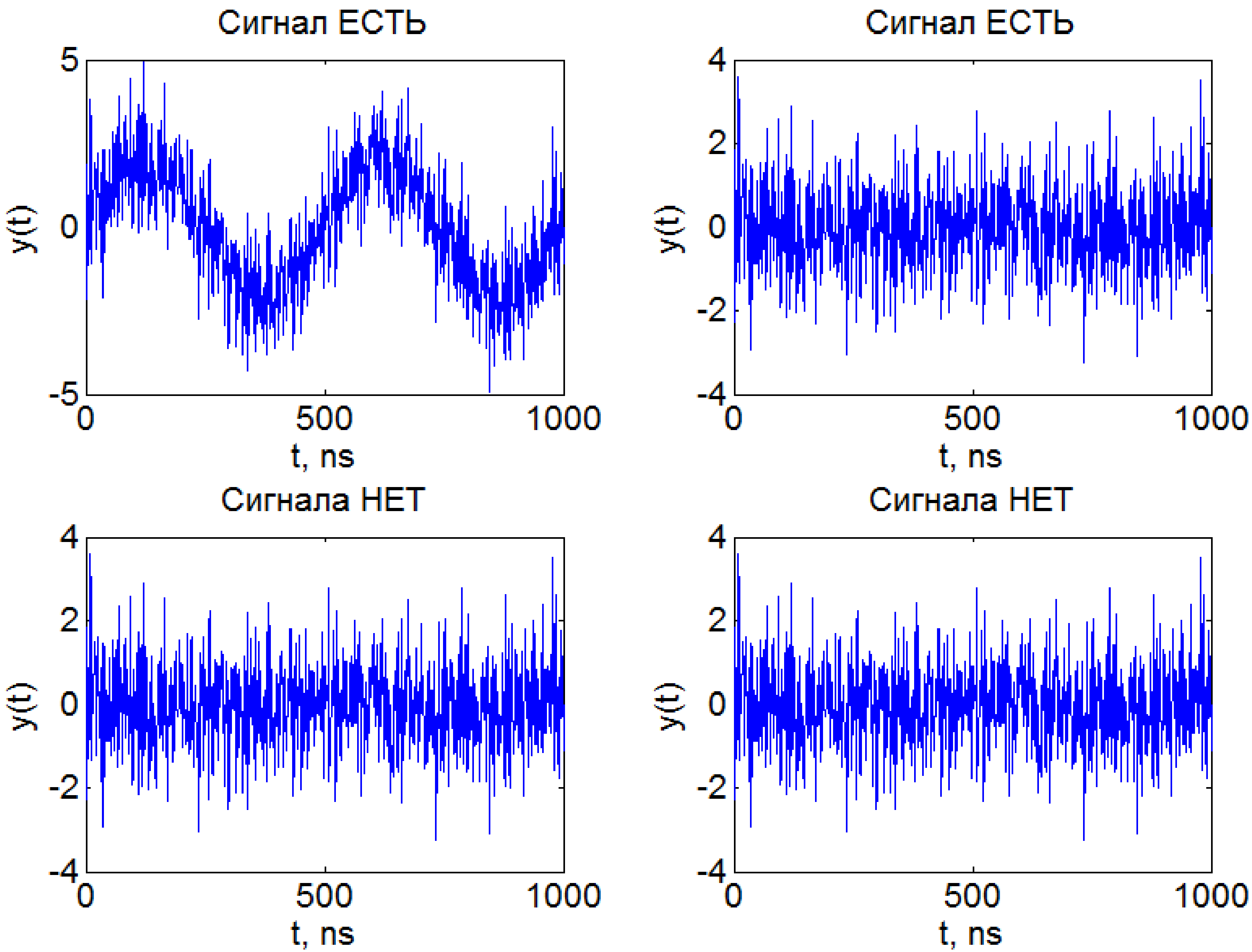
$$\vartheta=\{0,1\},$$

$$P(\vartheta=1)=P_{ap}(1)$$

Требуется оценить ϑ

Зачем это нужно

Примеры: радиовещание радионавигация



Обнаружение детерминированного сигнала

Байесовское решение. Простая функция потерь:

Истинное значение ϑ	Оценка $\hat{\vartheta}$	Функция потерь $c\left(\vartheta,\hat{\vartheta}\right)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Средний риск:

$$r\left(\mathrm{u},t\right)=\iint c\left(\mathrm{x}\left(t\right),\mathrm{u}\left(Y_0^t\right)\right)p\left(\mathrm{x}\left(t\right),\mathbf{Y}_0^t\right)d\mathrm{x}\left(t\right)d\mathbf{Y}_0^t=$$

$$=\iint c\left(\mathrm{x}\left(t\right),\mathrm{u}\left(Y_0^t\right)\right)p\left(\mathrm{x}\left(t\right)\mid\mathbf{Y}_0^t\right)d\mathrm{x}\left(t\right)p\left(\mathbf{Y}_0^t\right)d\mathbf{Y}_0^t$$

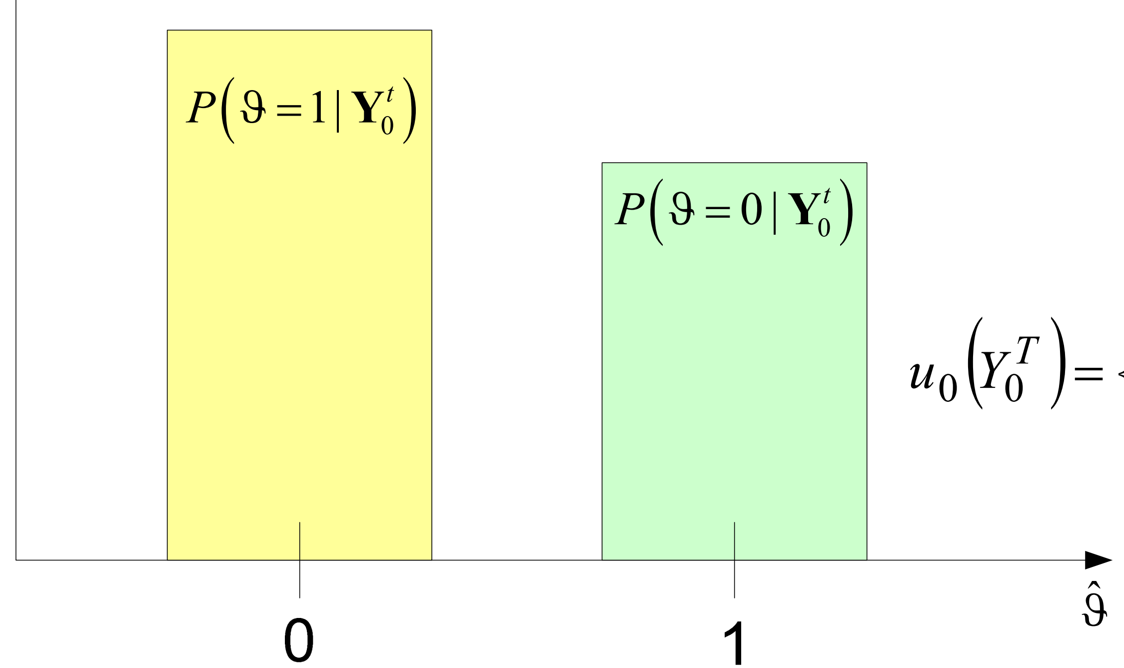
$$\Leftrightarrow r\left(\mathrm{u}\equiv\hat{\vartheta}\right)=\int\left(\sum_{\vartheta=0}^{1}c\left(\vartheta,\hat{\vartheta}\right)P\left(\vartheta\mid\mathbf{Y}_0^t\right)\right)p\left(\mathbf{Y}_0^t\right)d\mathbf{Y}_0^t\to\min$$

Обнаружение детерминированного сигнала

Оценка $\hat{\vartheta}$ такая что: $$r_{ps}\left(\hat{\vartheta},\mathbf{Y}_0^t\right)=\left(\sum_{\vartheta=0}^{1}c\left(\vartheta,\hat{\vartheta}\right)P\left(\vartheta\mid\mathbf{Y}_0^t\right)\right)\to\min,$$

т.е. $$\hat{\vartheta}=\arg\min\left(\sum_{\vartheta=0}^{1}c\left(\vartheta,\hat{\vartheta}\right)P\left(\vartheta\mid\mathbf{Y}_0^t\right)\right)$$

$$r_{ps}\left(\hat{\vartheta}\mid\mathbf{Y}_0^t\right)=\left(\sum_{\vartheta=0}^{1}c\left(\vartheta,\hat{\vartheta}\right)P\left(\vartheta\mid\mathbf{Y}_0^t\right)\right)=P\left(\vartheta\neq\hat{\vartheta}\mid\mathbf{Y}_0^t\right)$$



Решающее правило:

$$u_0\left(Y_0^T\right)=\begin{cases}\hat{\vartheta}=1, & \text{при } P\left(\vartheta=1\middle|Y_0^T\right)\geq P\left(\vartheta=0\middle|Y_0^T\right),\\ \hat{\vartheta}=0, & \text{при } P\left(\vartheta=1\middle|Y_0^T\right)< P\left(\vartheta=0,Y_0^T\right).\end{cases}$$

Как из решающего правила получается алгоритм обработки

По формуле Байеса

$$P\left(\vartheta \middle| Y_0^T\right) = kP_{ap}\left(\vartheta\right)P\left(Y_0^T \middle| \vartheta\right) \qquad \left(k = 1/P\left(Y_0^T\right) = const\right)$$

Если $\dfrac{P\left(Y_0^T \middle| \vartheta = 1\right)}{P\left(Y_0^T \middle| \vartheta = 0\right)} \geq \dfrac{P_{ap}\left(0\right)}{P_{ap}\left(1\right)},$ то $\hat{\vartheta} = 1$

$$\rho\left(Y_0^T\right) = \frac{P\left(Y_0^T \middle| \vartheta = 1\right)}{P\left(Y_0^T \middle| \vartheta = 0\right)}$$ - отношение правдоподобия

$$h = \frac{P_{ap}\left(0\right)}{P_{ap}\left(1\right)}$$ - порог сравнения

Отношение правдоподобия

Рассмотрим дискретный сигнал: $y_k = S_k(\lambda) + n_k, \quad k = \overline{1,m}$

$$p\left(Y_1^m \middle| S_k(\lambda), k = \overline{1,m}\right) = p\left(y_1 \middle| S_1(\lambda)\right) \cdot p\left(y_2 \middle| S_2(\lambda)\right) \cdots p\left(y_m \middle| S_m(\lambda)\right)$$

$$p\left(y_k \middle| S_k(\lambda)\right) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\left(y_k - S_k(\lambda)\right)^2\right\}$$

$$p\left(y_1, y_2, \ldots, y_m \middle| S_k(\lambda), k = \overline{1,m}\right) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{m/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m}\left(y_k - S_k(\lambda)\right)^2\right\} \Rightarrow$$

$$\rho\left(Y_1^m\right) = \frac{p\left(Y_1^m \middle| S_k(\lambda), k = \overline{1,m}\right)}{p\left(Y_1^m \middle| 0, k = \overline{1,m}\right)} = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m}\left(y_k - S_k(\lambda)\right)^2\right\} \Big/ \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m} y_k^2\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{m} S_k(\lambda)\left(y_k - \frac{1}{2} S_k(\lambda)\right)\right\}$$

Отношение правдоподобия

Отношение правдоподобия для непрерывного времени:

$$\rho\left(Y_0^T\right) = \exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T S(t,\lambda)\left(y(t) - \frac{1}{2}S(t,\lambda)\right)dt\right\}$$

Отношение правдоподобия для векторных сигналов и сообщений:

$$\rho\left(\mathbf{Y}_0^T\right) = \exp\left\{\int_0^T \mathbf{S}^{\mathrm{T}}(t,\lambda)2\mathbf{N}_n^{-1}\left(\mathbf{y}(t) - \frac{1}{2}\mathbf{S}(t,\lambda)\right)dt\right\}$$

Алгортм обработки сигнала

$$\hat{\vartheta} = \left\{ \rho\left(Y_0^T\right) \geq h \right\}$$

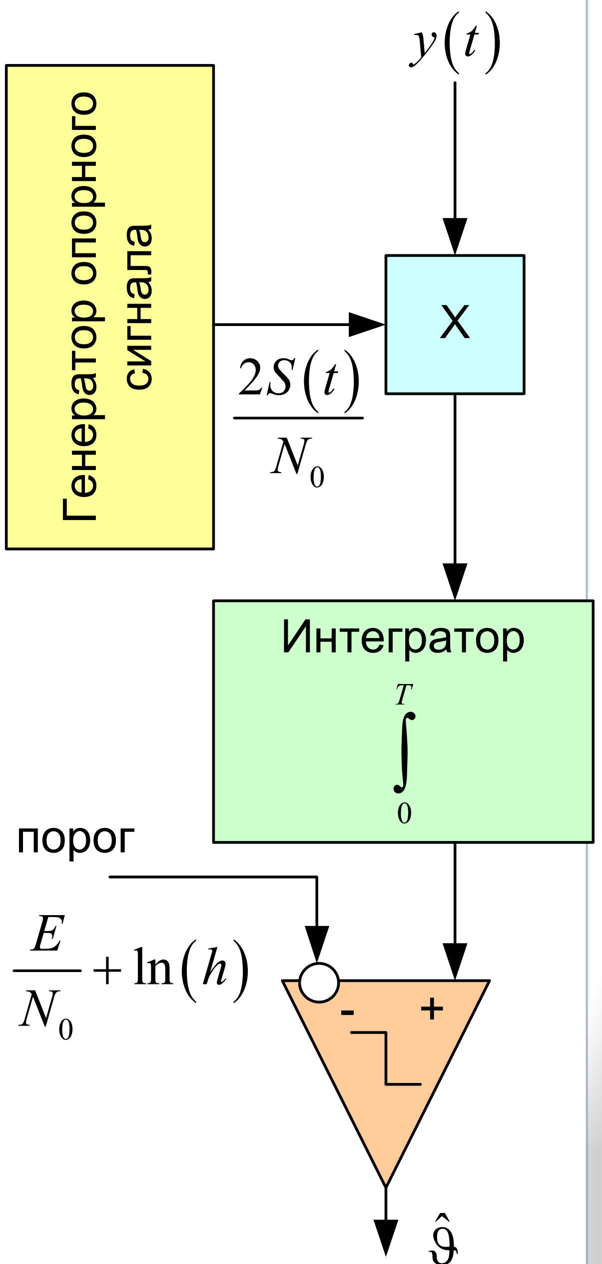
$$\exp\left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T S(t,\lambda)\left(y(t) - \frac{1}{2} S(t,\lambda) \right) dt \right\} \geq h$$

$$\frac{2}{N_0} \int_0^T S(t,\lambda)\left(y(t) - \frac{1}{2} S(t,\lambda) \right) dt \geq \ln(h)$$

$$\frac{2}{N_0} \int_0^T S(t,\lambda) y(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T S^2(t,\lambda) dt \geq \ln(h),$$

$\int_0^T S^2(t,\lambda) dt = E$ - энергия сигнала

$$\boxed{\frac{2}{N_0} \int_0^T S(t,\lambda) y(t) dt \geq \ln(h) + \frac{E}{N_0}}$$



Домашнее задание

Обобщенная функция потерь:

Истинное значение ϑ	Оценка $\hat{\vartheta}$	Функция потерь $c\left(\vartheta, \hat{\vartheta}\right)$
0	0	0
0	1	c_{01}
1	0	c_{10}
1	1	0

Требуется записать решающее правило для задачи обнаружения детерминированного сигнала при обобщённой функции потерь

$$\hat{\vartheta} = u_0\left(Y_0^T\right) \quad - \quad ???$$

Критерий Неймана-Пирсона

Истинное значение ϑ	Оценка $\hat{\vartheta}$	Функция потерь $c\left(\vartheta, \hat{\vartheta}\right)$
0	0	0
0	1	c_{01}
1	0	c_{10}
1	1	0

- ложная тревога

- пропуск сигнала

По критерию Неймана-Пирсона оптимальным решением считается такое, которое обеспечивает максимум вероятности правильного обнаружения (или, что тоже самое, минимум вероятности пропуска сигнала) при заданной вероятности ложной тревоги.

Решающее правило отличается только значением порога:

$$\hat{\vartheta} = \left\{ \rho\left(Y_0^T \right) \geq \tilde{h} \right\}$$

Критерий Неймана-Пирсона

Порог обнаружения выбирается исходя из условия:

$$P\left(\rho\left(Y_0^T\right) \geq \tilde{h} \,\middle|\, \vartheta = 0\right) = P_{F_{\text{доп}}}$$

$P_{F_{\text{доп}}}$ – вероятность ложной тревоги (задана)