Приложение 1
Вывод итогового алгоритма для нахождения оценки $\hat{\mathbf{X}}_\nu^k$

Решим рекуррентное уравнение для эволюции АПВ $p\left(\mathbf{X}_\nu^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right)$ для первого и второго момента АПВ $p\left(\mathbf{X}_\nu^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right)$.

Рекуррентное уравнение для эволюции АПВ $p\left(\mathbf{X}_\nu^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right)$ имеет вид

$$\boxed{\begin{aligned} &p\left(\mathbf{X}_\nu^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right) = c_2 \cdot p\left(\mathbf{y}_k \middle| \mathbf{x}_k\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{x}_{k-1}\right) \cdot \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu-1}} p\left(\mathbf{X}_{\nu-1}^{k-1} \middle| \mathbf{Y}_1^{k-1}\right) \mathrm{d}\,\mathbf{x}_{\nu-1}, \\ &p\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_1^k\right) = \int\limits_{\mathbf{X}_{\nu+1}^k} p\left(\mathbf{X}_\nu^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right) \mathrm{d}\,\mathbf{X}_{\nu+1}^k. \end{aligned}} \tag{1}$$

Для этого конкретизируем вид расширенного вектора состояния:

$$\mathbf{X}_\nu^k = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_\nu \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k \end{vmatrix} \tag{2}$$

Апостериорную дисперсию данного вектора обозначим как $\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}$.

АПВ $p\left(\mathbf{X}_\nu^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right)$ является гауссовской функцией:

$$p\left(\mathbf{X}_\nu^k \middle| \mathbf{Y}_1^k\right) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2}\sqrt{\det\left(\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}\right)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{X}_\nu^k - \hat{\mathbf{X}}_\nu^k\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1} \left(\mathbf{X}_\nu^k - \hat{\mathbf{X}}_\nu^k\right)\right\} \tag{3}$$

где $L = N \cdot (k - \nu + 1)$ - размерность вектора состояния $\mathbf{X}_\nu^k$.

$$p\left(\mathbf{y}_k \middle| \mathbf{x}_k\right) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2}\sqrt{\det\left(\mathbf{D}_n\right)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k\right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \left(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k\right)\right\} \tag{4}$$

$$p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{x}_{k-1}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\mathrm{N}/2}\sqrt{\det\left(\mathbf{D}_\xi\right)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_k - \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}\right)^T \mathbf{D}_\xi^{-1} \left(\mathbf{x}_k - \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}\right)\right\} \tag{5}$$

Для нахождения $\int\limits_{\mathbf{x}_{\nu-1}} p\left(\mathbf{X}_{\nu-1}^{k-1} \middle| \mathbf{Y}_{1}^{k-1}\right) \mathrm{d}\,\mathbf{x}_{\nu-1}$ можно воспользоваться следующими математическими соотношениями:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + c\right\} \mathrm{d}\,\mathbf{x} = \\ = \sqrt{\frac{\pi}{\det(\mathbf{A})}} \exp\left\{\frac{1}{4}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + c\right\} \tag{6}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{vmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{vmatrix}\mathbf{R}_{xx} & \mathbf{R}_{xy}\\ \mathbf{R}_{xy}^{\mathrm{T}} & \mathbf{R}_{yy}\end{vmatrix} \begin{vmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{vmatrix}\right\} \mathrm{d}\,\mathbf{x} = \\ = \sqrt{\frac{2^{n_x}\pi}{\det(\mathbf{R}_{xx})}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{R}_{yy} - \mathbf{R}_{xy}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\right)\mathbf{y}\right\} \tag{7}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{vmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{vmatrix}\mathbf{R}_{xx} & \mathbf{R}_{xy}\\ \mathbf{R}_{xy}^{\mathrm{T}} & \mathbf{R}_{yy}\end{vmatrix} \begin{vmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{vmatrix}\right\} \mathrm{d}\,\mathbf{y} = \\ = \sqrt{\frac{2^{n_y}\pi}{\det(\mathbf{R}_{yy})}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{R}_{xx} - \mathbf{R}_{xy}\mathbf{R}_{yy}^{-1}\mathbf{R}_{xy}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{x}\right\} \tag{8}$$

В (7) применяется подстановка $\left(\mathbf{X}_{\nu-1}^{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{\nu-1}^{k-1}\right) \to \begin{vmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{vmatrix}$ так что $\left(\mathbf{x}_{\nu-1} - \hat{\mathbf{x}}_{\nu-1}\right) \to \mathbf{x}$, $\left(\mathbf{X}_{\nu}^{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k-1}\right) \to \mathbf{y}$, $\mathbf{D}_{\mathbf{X},k-1}^{-1} \to \begin{vmatrix}\mathbf{R}_{xx} & \mathbf{R}_{xy}\\ \mathbf{R}_{xy}^{\mathrm{T}} & \mathbf{R}_{yy}\end{vmatrix}$.

$$\int\limits_{\mathbf{x}_{\nu-1}} p\left(\mathbf{X}_{\nu-1}^{k-1} \middle| \mathbf{Y}_{1}^{k-1}\right) \mathrm{d}\,\mathbf{x}_{\nu-1} = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{X}_{\nu}^{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k-1}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \left(\mathbf{X}_{\nu}^{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k-1}\right)\right\}}{\sqrt{2^{L-N}\pi^{L-1}\det\left(\mathbf{D}_{\mathbf{X},k-1}\right)\det\left(\mathbf{R}_{xx}\right)}} \tag{9}$$

где $\mathbf{A} = \left(\mathbf{R}_{yy} - \mathbf{R}_{xy}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\right)$.

Подставляя (6)-(8) в (1), получим, что с одной стороны:

$$\ln p\left(\mathbf{X}_{\nu}^{k}\middle|\mathbf{Y}_{1}^{k}\right)=c_{5}-\frac{1}{2}\left(\mathbf{X}_{\nu}^{k}-\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1}\left(\mathbf{X}_{\nu}^{k}-\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k}\right) \tag{10}$$

с другой стороны:

$$\begin{aligned}\ln p\left(\mathbf{X}_{\nu}^{k}\middle|\mathbf{Y}_{1}^{k}\right)&=c_{6}-\frac{1}{2}\left(\mathbf{y}_{k}-\mathbf{H}_{k}\mathbf{x}_{k}\right)^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\left(\mathbf{y}_{k}-\mathbf{H}_{k}\mathbf{x}_{k}\right)-\\&-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_{k}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}\right)^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\left(\mathbf{x}_{k}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}\right)-\frac{1}{2}\left(\mathbf{X}_{\nu}^{k-1}-\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\left(\mathbf{X}_{\nu}^{k-1}-\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k-1}\right).\end{aligned} \tag{11}$$

Приравнивая (10) и (11) получим:

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{X}_{\nu}^{k}-\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1}\left(\mathbf{X}_{\nu}^{k}-\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k}\right)=c_{7}+\left(\mathbf{y}_{k}-\mathbf{H}_{k}\mathbf{x}_{k}\right)^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\left(\mathbf{y}_{k}-\mathbf{H}_{k}\mathbf{x}_{k}\right)+\\&+\left(\mathbf{x}_{k}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}\right)^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\left(\mathbf{x}_{k}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}\right)+\left(\mathbf{X}_{\nu}^{k-1}-\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\left(\mathbf{X}_{\nu}^{k-1}-\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k-1}\right)=\\&=c_{8}-2\mathbf{y}_{k}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{H}_{k}\mathbf{x}_{k}+\mathbf{x}_{k}^{T}\mathbf{H}_{k}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{H}_{k}\mathbf{x}_{k}+\mathbf{x}_{k}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{k}+\mathbf{x}_{k-1}^{T}\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}-\\&-\mathbf{x}_{k}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}-\mathbf{x}_{k-1}^{T}\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{k}+\left(\mathbf{X}_{\nu}^{k-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}_{\nu}^{k-1}-2\left(\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k-1}.\end{aligned} \tag{12}$$

Пусть:

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}_{k}=\mathbf{c}_{k}\mathbf{X}_{\nu}^{k},\ \text{где }\mathbf{c}_{k}=\left|\mathbf{0}_{N\times(L-N)}\ \mathbf{I}_{N}\right|,\\&\mathbf{x}_{k-1}=\mathbf{c}_{k-1}\mathbf{X}_{\nu}^{k},\ \text{где }\mathbf{c}_{k-1}=\left|\mathbf{0}_{N\times(L-2N)}\ \mathbf{I}_{N}\ \mathbf{0}_{N\times N}\right|,\\&\mathbf{X}_{\nu}^{k-1}=\mathbf{c}_{\nu}\mathbf{X}_{\nu}^{k},\ \text{где }\mathbf{c}_{\nu}=\left|\mathbf{I}_{(L-N)\times(L-N)}\ \mathbf{0}_{(L-N)\times N}\right|,\end{aligned} \tag{13}$$

Тогда:

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathbf{X}_\nu^k-\hat{\mathbf{X}}_\nu^k\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1}\left(\mathbf{X}_\nu^k-\hat{\mathbf{X}}_\nu^k\right)=c_8-2\mathbf{y}_k{}^T\mathbf{D}_n{}^{-1}\mathbf{H}_k\mathbf{c}_k\mathbf{X}_\nu^k+\\
&+\left(\mathbf{X}_\nu^k\right)^T\mathbf{c}_k{}^T\left[\mathbf{H}_k{}^T\mathbf{D}_n{}^{-1}\mathbf{H}_k+\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\right]\mathbf{c}_k\mathbf{X}_\nu^k-\\
&-\left(\mathbf{X}_\nu^k\right)^T\mathbf{c}_k{}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{c}_{k-1}\mathbf{X}_\nu^k-\left(\mathbf{X}_\nu^k\right)^T\mathbf{c}_{k-1}{}^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{c}_k\mathbf{X}_\nu^k+\\
&+\left(\mathbf{X}_\nu^k\right)^T\mathbf{c}_{k-1}{}^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{c}_{k-1}\mathbf{X}_\nu^k+\left(\mathbf{X}_\nu^k\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_\nu{}^T\mathbf{A}\mathbf{c}_\nu\mathbf{X}_\nu^k-2\left(\hat{\mathbf{X}}_\nu^{k-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{c}_\nu\mathbf{X}_\nu^k=\\
&=c_8-2\left[\mathbf{y}_k{}^T\mathbf{D}_n{}^{-1}\mathbf{H}_k\mathbf{c}_k+\left(\hat{\mathbf{X}}_\nu^{k-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{c}_\nu\right]\mathbf{X}_\nu^k+\\
&+\left(\mathbf{X}_\nu^k\right)^T\begin{bmatrix}\mathbf{c}_k{}^T\left[\mathbf{H}_k{}^T\mathbf{D}_n{}^{-1}\mathbf{H}_k+\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\right]\mathbf{c}_k+\mathbf{c}_{k-1}{}^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{c}_{k-1}+\\+\mathbf{c}_\nu{}^T\mathbf{A}\mathbf{c}_\nu-\mathbf{c}_k{}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{c}_{k-1}-\mathbf{c}_{k-1}{}^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{c}_k\end{bmatrix}\mathbf{X}_\nu^k=\\
&=\left(\mathbf{X}_\nu^k\right)^T\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1}\mathbf{X}_\nu^k-2\left(\hat{\mathbf{X}}_\nu^k\right)^T\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1}\mathbf{X}_\nu^k+\hat{\mathbf{X}}_\nu^k\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1}\hat{\mathbf{X}}_\nu^k
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Из (14) следует, что:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1}=\mathbf{c}_k{}^T\left[\mathbf{H}_k{}^T\mathbf{D}_n{}^{-1}\mathbf{H}_k+\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\right]\mathbf{c}_k+\mathbf{c}_{k-1}{}^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{c}_{k-1}+\\
&+\mathbf{c}_\nu{}^T\mathbf{A}\mathbf{c}_\nu-\mathbf{c}_k{}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{c}_{k-1}-\mathbf{c}_{k-1}{}^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi{}^{-1}\mathbf{c}_k,\\
&\qquad\left(\hat{\mathbf{X}}_\nu^k\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1}=\left(\mathbf{y}_k{}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_n{}^{-1}\mathbf{H}_k\mathbf{c}_k+\left(\hat{\mathbf{X}}_\nu^{k-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{c}_\nu\right),\\
&\qquad\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1}\hat{\mathbf{X}}_\nu^k=\left(\mathbf{y}_k{}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_n{}^{-1}\mathbf{H}_k\mathbf{c}_k+\left(\hat{\mathbf{X}}_\nu^{k-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{c}_\nu\right)^{\mathrm{T}},\\
&\qquad\hat{\mathbf{X}}_\nu^k=\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}\left(\mathbf{c}_k{}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_k{}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_n{}^{-1}\mathbf{y}_k+\mathbf{c}_\nu{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}_\nu^{k-1}\right).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Для удобства изложим итоговый алгоритм нахождения оценки $\hat{\mathbf{X}}_\nu^k$ пользуясь блочным представлением векторов и матриц.

1. Вводится расширенный вектор состояния $\mathbf{X}_\nu^k=\left|\mathbf{x}_\nu^{\mathrm{T}}\ldots\mathbf{x}_k^{\mathrm{T}}\right|^{\mathrm{T}}$ размерностью $L=N\cdot\left(k-\nu+1\right)$ с матрицей апостериорных дисперсий $\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}$ размерностью $L\times L$.

2. Обратная матрица дисперсий на $(k-1)$-м шаге представлется в виде блочной матрицы (16)

$\mathbf{D}_{\mathbf{X},k-1}^{-1}=\begin{vmatrix}\mathbf{R}_{xx} & \mathbf{R}_{xy}\\ \mathbf{R}_{xy}^{\mathrm{T}} & \mathbf{R}_{yy}\end{vmatrix}$, где $\mathbf{R}_{xx}$ – матрица размерности $N\times N$,

$\mathbf{R}_{yy}$ – матрица размерности $(L-N)\times(L-N)$, $\mathbf{R}_{xy}$ – матрица размерности $N\times(L-N)$.

Рассчитывается матрица

$$\mathbf{A}=\left(\mathbf{R}_{yy}-\mathbf{R}_{xy}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\right).$$

3. Рассчитывается матрица апостериорных дисперсий на шаге k

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}^{-1}=\begin{vmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}_{(L-N)\times N}\\ \mathbf{0}_{N\times(L-N)} & \mathbf{0}_{N\times N}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}\mathbf{0}_{(L-2N)\times(L-2N)} & & \mathbf{0}_{(L-2N)\times(2N)}\\ & \mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F} & -\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\\ \mathbf{0}_{(2N)\times(L-2N)} & -\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F} & \left[\mathbf{H}_{k}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{H}_{k}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\right]\end{vmatrix}$$

4. Рассчитывается искомая оценка $\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k}$ с использованием оценки $\hat{\mathbf{X}}_{\nu-1}^{k-1}$ на предыдущем шаге:

$$\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k}=\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}_{\nu}^{k-1}\\ \mathbf{H}_{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{k}\end{vmatrix}$$

Приложение 2
Вывод выражений для нахождения ненормированных плотностей вероятности $p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_1^{\nu-1})$ и $\hat{p}\left(\boldsymbol{x}_\nu \middle| \boldsymbol{Y}_{\nu+1}^k\right)$

ПВ экстраполированной оценки $p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_1^{\nu-1})$.

Из свойств Марковского процесса:

$$p(\mathbf{x}_a) = \int p(\mathbf{x}_a \mid \mathbf{x}_b) p(\mathbf{x}_b) d\mathbf{x}_b; \tag{17}$$

Воспользуемся этим свойством для ПВ экстраполированной оценки:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_1^{\nu-1}) &= \int p(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{x}_{\nu-1} \mid \mathbf{Y}_1^{\nu-1}) d\mathbf{x}_{\nu-1} = \\ &= \int p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{x}_{\nu-1}, \mathbf{Y}_1^{\nu-1}) \hat{p}(\mathbf{x}_{\nu-1} \mid \mathbf{Y}_1^{\nu-1}) d\mathbf{x}_{\nu-1}; \end{aligned} \tag{18}$$

Т.к. $\mathbf{x}_\nu$ не зависит от выборки $\mathbf{Y}_1^{\nu-1}$, то:

$$p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_1^{\nu-1}) = \int p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{x}_{\nu-1}) \hat{p}(\mathbf{x}_{\nu-1} \mid \mathbf{Y}_1^{\nu-1}) d\mathbf{x}_{\nu-1}; \tag{19}$$

Где: $p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{x}_{\nu-1})$ – ПВ перехода, $\hat{p}(\mathbf{x}_{\nu-1} \mid \mathbf{Y}_1^{\nu-1})$ – АПВ на предыдущем шаге.

Подставим получившиеся выражения в АПВ $\hat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_1^\nu\right)$:

$$\hat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_1^\nu\right) = c_1 \cdot p(\mathbf{y}_\nu \mid \mathbf{x}_\nu) \int p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{x}_{\nu-1}) \hat{p}(\mathbf{x}_{\nu-1} \mid \mathbf{Y}_1^{\nu-1}) d\mathbf{x}_{\nu-1}; \tag{20}$$

Теперь рассмотрим $\hat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_{\nu+1}^k\right)$. Ненормированную плотность вероятности величины $\mathbf{x}_\nu$, при условии, что известны наблюдения $\mathbf{y}_{\nu+1} \ldots \mathbf{y}_k$ можно представить как:

$$
\begin{aligned}
&\widehat{p}\left(\mathbf{x}_{\nu}\middle|\mathbf{Y}_{\nu+1}^{k}\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\prod_{j=\nu+1}^{k}p(\mathbf{y}_{j}\,|\,\mathbf{x}_{j})\cdot p(\mathbf{x}_{j}\,|\,\mathbf{x}_{j-1})d\mathbf{X}_{\nu+1}^{k}=\\
&=\int\limits_{\mathbf{x}_{\kappa}}p(\mathbf{y}_{\kappa}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa})\int\limits_{\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-1}}p(\mathbf{x}_{\kappa}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa-1})\cdot\prod_{j=\nu+1}^{k-1}p(\mathbf{y}_{j}\,|\,\mathbf{x}_{j})\cdot p(\mathbf{x}_{j}\,|\,\mathbf{x}_{j-1})d\mathbf{x}_{\kappa}d\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-1}=\\
&=\int\limits_{\mathbf{x}_{\kappa}}p(\mathbf{y}_{\kappa}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa})\int\limits_{\mathbf{x}_{\kappa-1}}p(\mathbf{x}_{\kappa}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa-1})\cdot p(\mathbf{y}_{\kappa-1}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa-1})\cdot\\
&\cdot\int\limits_{\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-2}}p(\mathbf{x}_{\kappa-1}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa-2})\cdot\prod_{j=\nu+1}^{k-2}p(\mathbf{y}_{j}\,|\,\mathbf{x}_{j})\cdot p(\mathbf{x}_{j}\,|\,\mathbf{x}_{j-1})d\mathbf{x}_{\kappa}d\mathbf{x}_{\kappa-1}d\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-2};
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Рассмотрим отдельно интеграл $d\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-2}$:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-2}}p(\mathbf{x}_{\kappa-1}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa-2})\cdot\prod_{j=\nu+1}^{k-2}p(\mathbf{y}_{j}\,|\,\mathbf{x}_{j})\cdot p(\mathbf{x}_{j}\,|\,\mathbf{x}_{j-1})d\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-2}=\\
&=\int\limits_{\mathbf{x}_{\kappa-2}}p(\mathbf{x}_{\kappa-1}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa-2})\cdot p(\mathbf{y}_{k-2}\,|\,\mathbf{x}_{k-2})\cdot\\
&\cdot\int\limits_{\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-2}}p(\mathbf{x}_{\kappa-2}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa-3})\cdot\prod_{j=\nu+1}^{k-3}p(\mathbf{y}_{j}\,|\,\mathbf{x}_{j})\cdot p(\mathbf{x}_{j}\,|\,\mathbf{x}_{j-1})d\mathbf{x}_{\kappa-2}d\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-3};
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Обозначим выражение, под интегралом $d\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-2}$ как ненормированную условную ПВ:

$$
\overline{p}(\mathbf{x}_{\kappa-1}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1}^{k-2},\mathbf{x}_{\nu})=\int\limits_{\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-2}}p(\mathbf{x}_{\kappa-1}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa-2})\cdot\prod_{j=\nu+1}^{k-2}p(\mathbf{y}_{j}\,|\,\mathbf{x}_{j})\cdot p(\mathbf{x}_{j}\,|\,\mathbf{x}_{j-1})d\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-2};
\tag{23}
$$

Тогда, один из множителей в правой части можно обозначить как:

$$
\overline{p}(\mathbf{x}_{\kappa-2}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1}^{k-3},\mathbf{x}_{\nu})=\int\limits_{\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-3}}p(\mathbf{x}_{\kappa-2}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa-3})\cdot\prod_{j=\nu+1}^{k-3}p(\mathbf{y}_{j}\,|\,\mathbf{x}_{j})\cdot p(\mathbf{x}_{j}\,|\,\mathbf{x}_{j-1})d\mathbf{X}_{\nu+1}^{k-3};
\tag{24}
$$

Можно записать общую формулу для ненормированной условной ПВ:

Для $i=\overline{1,\left(k-\nu-1\right)}$:

$$\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+1+i} \,|\, \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i}, \mathbf{x}_{\nu}) = \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+i}} p(\mathbf{x}_{\nu+1+i} \,|\, \mathbf{x}_{\nu+i}) p(\mathbf{y}_{\nu+i} \,|\, \mathbf{x}_{\nu+i}) \overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+i} \,|\, \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i-1}, \mathbf{x}_{\nu}) d\mathbf{x}_{\nu+i}\,, \qquad (25)$$

тогда для **шага** $\mathbf{i = 1}$

$$\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2} \,|\, \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+1}, \mathbf{x}_{\nu}) = \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+1}} p(\mathbf{x}_{\nu+2} \,|\, \mathbf{x}_{\nu+1}) \cdot p(\mathbf{y}_{\nu+1} \,|\, \mathbf{x}_{\nu+1}) \cdot p(\mathbf{x}_{\nu+1} \,|\, \mathbf{x}_{\nu}) d\mathbf{x}_{\nu+1}; \qquad (26)$$

для **шага** $\mathbf{i = (k - \nu - 1)}$

$$\overline{p}(\mathbf{x}_k \,|\, \mathbf{Y}_{\nu+1}^{k-1}, \mathbf{x}_{\nu}) = \int\limits_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k \,|\, \mathbf{x}_{k-1}) \cdot p(\mathbf{y}_{k-1} \,|\, \mathbf{x}_{k-1}) \cdot \overline{p}(\mathbf{x}_{k-1} \,|\, \mathbf{Y}_{\nu+1}^{k-2}, \mathbf{x}_{\nu}) d\mathbf{x}_{k-1};$$

$$\widehat{p}\left(\mathbf{x}_{\nu} \middle| \mathbf{Y}_{\nu+1}^{k}\right) = \int\limits_{\mathbf{x}_{\kappa}} p(\mathbf{y}_{\kappa} \,|\, \mathbf{x}_{\kappa}) \cdot \overline{p}(\mathbf{x}_k \,|\, \mathbf{Y}_{\nu+1}^{k-1}, \mathbf{x}_{\nu}) d\mathbf{x}_{\kappa}; \qquad (27)$$

Выражения (26)-(27) позволяют рекуррентным образом находить функцию $\overline{p}(\mathbf{x}_k \,|\, \mathbf{Y}_{\nu+1}^{k-1}, \mathbf{x}_{\nu})$, которая на последнем шаге дает искомую плотность вероятности $\widehat{p}\left(\mathbf{x}_{\nu} \middle| \mathbf{Y}_{\nu+1}^{k}\right)$.

Приложение 3
Получение выражения для ненормированной условной плотности вероятности $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+1+i} \,|\, \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i}, \mathbf{x}_\nu)$ с учетом Гауссова распределения ПВ входящих в ее состав

Ненормированная условная ПВ $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+1+i} \,|\, \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i}, \mathbf{x}_\nu)$.

Запишем выражения для плотностей вероятности входящих в ненормированную условную ПВ $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+1+i} \,|\, \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i}, \mathbf{x}_\nu)$ при $i=1$ с учетом Гауссова распределения, обусловленного шумом наблюдения.

Для $i=1$;

$$\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2} \,|\, \mathbf{Y}_{\nu+1}, \mathbf{x}_\nu) = \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+1}} p(\mathbf{x}_{\nu+2} \,|\, \mathbf{x}_{\nu+1}) \cdot p(\mathbf{y}_{\nu+1} \,|\, \mathbf{x}_{\nu+1}) \cdot p(\mathbf{x}_{\nu+1} \,|\, \mathbf{x}_\nu) d\mathbf{x}_{\nu+1}; \tag{28}$$

$$p(\mathbf{x}_{\nu+2} \,|\, \mathbf{x}_{\nu+1}) = \frac{1}{2\pi^{N/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_\xi)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{x}_{\nu+2} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})^T \mathbf{D}_\xi^{-1} (\mathbf{x}_{\nu+2} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})\right\};$$

$$p(\mathbf{x}_{\nu+1} \,|\, \mathbf{x}_\nu) = \frac{1}{2\pi^{N/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_\xi)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{F}\mathbf{x}_\nu)^T \mathbf{D}_\xi^{-1} (\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{F}\mathbf{x}_\nu)\right\}; \tag{29}$$

$$p(\mathbf{y}_{\nu+1} \,|\, \mathbf{x}_{\nu+1}) = \frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_n)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{y}_{\nu+1} - \mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{y}_{\nu+1} - \mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})\right\};$$

Где: N – размерность вектора состояний **x**, M – размерность вектора наблюдений **y**.

Подставим уравнения (29) в (28):

$$\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2} \,|\, \mathbf{Y}_{\nu+1}, \mathbf{x}_\nu) = C_2 \cdot \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+1}} [\exp\{-\frac{1}{2} \cdot [(\mathbf{x}_{\nu+2} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})^T \mathbf{D}_\xi^{-1} (\mathbf{x}_{\nu+2} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1}) +$$
$$+ (\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{F}\mathbf{x}_\nu)^T \mathbf{D}_\xi^{-1} (\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{F}\mathbf{x}_\nu) + (\mathbf{y}_{\nu+1} - \mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{y}_{\nu+1} - \mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})]\} d\mathbf{x}_{\nu+1}]; \tag{30}$$

$$\text{Где}: C_2 = \frac{1}{2\pi^{(M+2N)/2}\sqrt{2 \cdot \det(\mathbf{D}_\xi) \cdot \det(\mathbf{D}_n)}};$$

Раскроем скобки в уравнении (30):

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{x}_{\nu+2}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{x}_{\nu+2}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})= \\
&=(\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}-(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_\xi^{-1})(\mathbf{x}_{\nu+2}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})= \\
&=\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}-\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1}-(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}+(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1};
\end{aligned}
\tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{x}_{\nu+1}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{x}_{\nu+1}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})= \\
&=(\mathbf{x}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}-(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^T\mathbf{D}_\xi^{-1})(\mathbf{x}_{\nu+1}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})= \\
&=\mathbf{x}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+1}-\mathbf{x}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}-(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+1}+(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu};
\end{aligned}
\tag{32}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{y}_{\nu+1}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_n^{-1}(\mathbf{y}_{\nu+1}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})= \\
&=(\mathbf{y}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_n^{-1}-(\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_n^{-1})(\mathbf{y}_{\nu+1}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})= \\
&=\mathbf{y}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}-\mathbf{y}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1}-(\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+(\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1};
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Все слагаемые в формулах (31)-(33) содержащие $\mathbf{x}_{\nu+1}$ и не содержащие $\mathbf{x}_{\nu+1}^T$:

$$
-\mathbf{y}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1}-(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+1}-\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1};
\tag{34}
$$

Все слагаемые в формулах (31)-(33) не содержащие $\mathbf{x}_{\nu+1}$ и содержащие $\mathbf{x}_{\nu+1}^T$:

$$
-(\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}-\mathbf{x}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}-(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2};
\tag{35}
$$

Все слагаемые в формулах (31)-(33) содержащие $\mathbf{x}_{\nu+1}$ и содержащие $\mathbf{x}_{\nu+1}^T$:

$$
(\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+1}+\mathbf{x}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+1}+(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+1};
\tag{36}
$$

Все слагаемые в формулах (31)-(33) не содержащие $\mathbf{x}_{\nu+1}$ и не содержащие $\mathbf{x}_{\nu+1}^T$

$$
\mathbf{y}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2};
\tag{37}
$$

Подставим формулы (34)-(37) в (30):

$$\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1},\mathbf{x}_{\nu})=\frac{1}{2\pi^{(M+2N)/2}\sqrt{2\cdot\det(\mathbf{D}_{\xi})\cdot\det(\mathbf{D}_{n})}}\cdot$$
$$\cdot\int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+1}}\exp\{-\frac{1}{2}\cdot[\mathbf{x}_{\nu+1}^{T}(\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F})\mathbf{x}_{\nu+1}-$$
$$-2(\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2})^{T}\mathbf{x}_{\nu+1}+$$
$$+(\mathbf{y}_{\nu+1}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{x}_{\nu+2}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2})]\}d\mathbf{x}_{\nu+1} \qquad (38)$$

Далее воспользуемся формулой (без доказательства):

$$\int\exp\left\{-\mathbf{x}^{T}\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}^{T}\mathbf{x}+\mathbf{c}\right\}d\mathbf{x}=\sqrt{\frac{\pi}{\det(\mathbf{A})}}\exp\left\{\frac{1}{4}\mathbf{b}^{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}+\mathbf{c}\right\}; \qquad (39)$$

Выразим слагаемые под экспонентой из левой части формулы (39) в соответствии с формулой (38)

$$-\mathbf{x}^{T}\mathbf{A}\mathbf{x}=-\mathbf{x}_{\nu+1}^{T}\frac{1}{2}(\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F})\mathbf{x}_{\nu+1};$$
$$\mathbf{b}^{T}\mathbf{x}=(\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2})^{T}\mathbf{x}_{\nu+1}; \qquad (40)$$
$$\mathbf{c}=-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_{\nu+1}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{x}_{\nu+2}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2});$$

Воспользуемся левой частью формулы (39) и подставим в уравнение (38):

$$\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1},\mathbf{x}_{\nu})=2\pi^{(1-M-2N)/2}\cdot(2\cdot\det(\mathbf{D}_{\xi})\cdot\det(\mathbf{D}_{n}))^{-1/2}\cdot$$
$$\cdot\det(\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F})^{-1/2}\cdot$$
$$\cdot\exp\{\frac{1}{2}\cdot[(\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2})^{T}\cdot \qquad (41)$$
$$\cdot(\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F})^{-1}\cdot$$
$$-(\mathbf{y}_{\nu+1}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{x}_{\nu+2}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2})]\}$$

Получим ненормированную условную ПВ $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+1+i}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i},\mathbf{x}_{\nu})$ при $i=1$:

$$\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1},\mathbf{x}_{\nu})=C_{3}\cdot\exp\{\frac{1}{2}[(\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2})^{T}\cdot$$
$$\cdot(\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F})^{-1}\cdot(\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2})- \qquad (42)$$
$$-(\mathbf{y}_{\nu+1}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu}+\mathbf{x}_{\nu+2}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2})]\};$$

$$\text{\textit{Где}}: C_3 = 2\pi^{(1-M-2N)/2}\cdot(2\cdot\det(\mathbf{D}_\xi)\cdot\det(\mathbf{D}_n))^{-1/2}\cdot$$
$$\cdot\det(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{D}_\xi^{-1}+\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F})^{-1/2};$$

Обозначим:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{\nu+2} &= \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{D}_\xi^{-1}+\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F};\\ \mathbf{M}_{\nu+2} &= \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1}+\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu;\\ \mathbf{S}_{\nu+2} &= \mathbf{y}_{\nu+1}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+1};\\ \mathbf{R}_{\nu+2} &= (\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu)^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu;\end{aligned} \tag{43}$$

Подставим (43) в уравнение (42):

$$\begin{aligned}\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1},\mathbf{x}_\nu) = C_3\cdot\exp\{\frac{1}{2}\cdot[(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}+\mathbf{M}_{\nu+2})^T\cdot(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\cdot\\ \cdot(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}+\mathbf{M}_{\nu+2})-(\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}+\mathbf{S}_{\nu+2}+\mathbf{R}_{\nu+2})]\};\end{aligned} \tag{44}$$

Запишем выражения для плотностей вероятности входящих в ненормированную условную ПВ $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+1+i}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i},\mathbf{x}_\nu)$ при $i=2$ с учетом Гауссова распределения, обусловленного шумом наблюдения.

Для $i=2$;

$$\begin{aligned}\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+3}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+2},\mathbf{x}_\nu) &= \int\limits_{\mathbf{X}_{\nu+1}^{\nu+2}} p(\mathbf{x}_{\nu+3}\,|\,\mathbf{x}_{\nu+2})\cdot\prod_{j=\nu+1}^{\nu+2}p(\mathbf{y}_j\,|\,\mathbf{x}_j)\cdot p(\mathbf{x}_j\,|\,\mathbf{x}_{j-1})d\mathbf{X}_{\nu+1}^{\nu+2} =\\ &= \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+2}} p(\mathbf{x}_{\nu+3}\,|\,\mathbf{x}_{\nu+2})\cdot p(\mathbf{y}_{\nu+2}\,|\,\mathbf{x}_{\nu+2})\cdot\\ &\cdot\int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+1}} p(\mathbf{x}_{\nu+2}\,|\,\mathbf{x}_{\nu+1})\cdot p(\mathbf{y}_{\nu+1}\,|\,\mathbf{x}_{\nu+1})\cdot p(\mathbf{x}_{\nu+1}\,|\,\mathbf{x}_\nu)d\mathbf{X}_{\nu+1}^{\nu+2} =\\ &= \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+2}} p(\mathbf{x}_{\nu+3}\,|\,\mathbf{x}_{\nu+2})\cdot p(\mathbf{y}_{\nu+2}\,|\,\mathbf{x}_{\nu+2})\cdot\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1},\mathbf{x}_\nu)d\mathbf{x}_{\nu+2};\end{aligned} \tag{45}$$

$$p(\mathbf{x}_{\nu+3}\,|\,\mathbf{x}_{\nu+2}) = \frac{1}{2\pi^{N/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_\xi)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot(\mathbf{x}_{\nu+3}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{x}_{\nu+3}-\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2})\right\}; \tag{46}$$

$$p(\mathbf{y}_{\nu+2} \mid \mathbf{x}_{\nu+2}) = \frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_n)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot(\mathbf{y}_{\nu+2} - \mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2})^T \mathbf{D}_n^{-1}(\mathbf{y}_{\nu+2} - \mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2})\right\};$$

Подставим уравнения (44) и (46) в уравнение (45):

$$\begin{aligned}
\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+3} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+2}, \mathbf{x}_\nu) &= \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+2}} p(\mathbf{x}_{\nu+3} \mid \mathbf{x}_{\nu+2}) \cdot p(\mathbf{y}_{\nu+2} \mid \mathbf{x}_{\nu+2}) \cdot \overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}, \mathbf{x}_\nu) d\mathbf{x}_{\nu+2} = \\
&= C_4 \cdot \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+2}} \exp\{-\frac{1}{2}\cdot[(\mathbf{x}_{\nu+3} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2})^T \mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{x}_{\nu+3} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2}) + \\
&+ (\mathbf{y}_{\nu+2} - \mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2})^T \mathbf{D}_n^{-1}(\mathbf{y}_{\nu+2} - \mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2}) - \\
&- (\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2} + \mathbf{M}_{\nu+2})^T (\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1} \cdot (\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2} + \mathbf{M}_{\nu+2}) + \\
&+ (\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2} + \mathbf{S}_{\nu+2} + \mathbf{R}_{\nu+2})]\} d\mathbf{x}_{\nu+2};
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\textit{Где}: C_4 = 2\pi^{(1-2M-3N)/2} \cdot (2\cdot\det(\mathbf{D}_\xi)\cdot\det(\mathbf{D}_n))^{-1} \cdot \det(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1/2};$$

Раскроем скобки в уравнении (47):

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{x}_{\nu+3} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2})^T \mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{x}_{\nu+3} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2}) = \\
&= (\mathbf{x}_{\nu+3}^T\mathbf{D}_\xi^{-1} - (\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\mathbf{D}_\xi^{-1})(\mathbf{x}_{\nu+3} - \mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2}) = \\
&= \mathbf{x}_{\nu+3}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} - \mathbf{x}_{\nu+3}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2} - (\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + (\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2};
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{y}_{\nu+2} - \mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2})^T \mathbf{D}_n^{-1}(\mathbf{y}_{\nu+2} - \mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2}) = \\
&= (\mathbf{y}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_n^{-1} - (\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\mathbf{D}_n^{-1})(\mathbf{y}_{\nu+2} - \mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2}) = \\
&= \mathbf{y}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2} - \mathbf{y}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2} - (\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2} + (\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2};
\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
&-(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2} + \mathbf{M}_{\nu+2})^T (\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2} + \mathbf{M}_{\nu+2}) + \\
&+ (\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2} + \mathbf{S}_{\nu+2} + \mathbf{R}_{\nu+2}) = \\
&= (-\mathbf{M}_{\nu+2}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1} - \mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1})(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2} + \mathbf{M}_{\nu+2}) + \\
&+ (\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2} + \mathbf{S}_{\nu+2} + \mathbf{R}_{\nu+2}) = \\
&= -\mathbf{M}_{\nu+2}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2} - \mathbf{M}_{\nu+2}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2} - \\
&- \mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2} - \mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2} + \\
&+ \mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2} + \mathbf{S}_{\nu+2} + \mathbf{R}_{\nu+2};
\end{aligned} \tag{50}$$

Все слагаемые в формулах (48)-(50) содержащие $\mathbf{x}_{\nu+2}$ и не содержащие $\mathbf{x}_{\nu+2}^T$:

$$-\mathbf{x}_{\nu+3}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2}-\mathbf{y}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2}-\mathbf{M}_{\nu+2}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}; \qquad (51)$$

Все слагаемые в формулах (48)-(50) не содержащие $\mathbf{x}_{\nu+2}$ и содержащие $\mathbf{x}_{\nu+2}^T$:

$$-(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3}-(\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2}-\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2}; \qquad (52)$$

Все слагаемые в формулах (48)-(50) содержащие $\mathbf{x}_{\nu+2}$ и содержащие $\mathbf{x}_{\nu+2}^T$:

$$\begin{gathered}(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu+2}+(\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2})^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_{\nu+2}-\\ -\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2}+\mathbf{x}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+2};\end{gathered} \qquad (53)$$

Все слагаемые в формулах (48)-(50) не содержащие $\mathbf{x}_{\nu+2}$ и не содержащие $\mathbf{x}_{\nu+2}^T$:

$$\begin{gathered}\mathbf{x}_{\nu+3}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3}+\mathbf{y}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2}-\\ -\mathbf{M}_{\nu+2}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2}{}^T+\mathbf{S}_{\nu+2}+\mathbf{R}_{\nu+2};\end{gathered} \qquad (54)$$

Подставим формулы (51)-(54) в (47)

$$\begin{gathered}\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+3}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+2},\mathbf{x}_\nu)=\int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+2}}p(\mathbf{x}_{\nu+3}\,|\,\mathbf{x}_{\nu+2})\cdot p(\mathbf{y}_{\nu+2}\,|\,\mathbf{x}_{\nu+2})\cdot\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1},\mathbf{x}_\nu)d\mathbf{x}_{\nu+2}=\\ =2\pi^{(1-2M-3N)/2}\cdot(2\cdot\det(\mathbf{D}_\xi)\cdot\det(\mathbf{D}_n))^{-1}\cdot\\ \cdot\det(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1/2}\\ \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+2}}\exp\{-\frac{1}{2}\cdot[\mathbf{x}_{\nu+2}^T\cdot(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}+\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}-\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}+\mathbf{D}_\xi^{-1})\cdot\mathbf{x}_{\nu+2}-\\ -2\cdot(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3}+\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2}+\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2})^T\cdot\mathbf{x}_{\nu+2}+\\ +\mathbf{x}_{\nu+3}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3}+\mathbf{y}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2}-\mathbf{M}_{\nu+2}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2}+\mathbf{S}_{\nu+2}+\mathbf{R}_{\nu+2}]\}\end{gathered} \qquad (55)$$

Далее воспользуемся формулой (39). Выразим слагаемые под экспонентой из левой части формулы (39) в соответствии с формулой (55):

$$\begin{aligned}&-\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=-\mathbf{x}_{\nu+1}^T\frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}+\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}-\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}+\mathbf{D}_\xi^{-1})\mathbf{x}_{\nu+1};\\ &\mathbf{b}^T\mathbf{x}=(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3}+\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2}+\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2})^T\mathbf{x}_{\nu+1};\\ &\mathbf{c}=-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_{\nu+3}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3}+\mathbf{y}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2}-\mathbf{M}_{\nu+2}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2}+\mathbf{S}_{\nu+2}+\mathbf{R}_{\nu+2});\end{aligned} \qquad (56)$$

Подставим введенные обозначения :

$$
\begin{aligned}
&-\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = -\mathbf{x}_{\nu+1}^T\frac{1}{2}(\mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1})\mathbf{x}_{\nu+1};\\
&\mathbf{b}^T\mathbf{x} = (\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2} + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2})^T\mathbf{x}_{\nu+1};\\
&\mathbf{c} = -\frac{1}{2}(\mathbf{x}_{\nu+3}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + \mathbf{S}_{\nu+2} + \mathbf{y}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2} +\\
&+\mathbf{R}_{\nu+2} - \mathbf{M}_{\nu+2}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2});
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Воспользуемся левой частью формулы (39)и подставим в уравнение (55):

$$
\begin{aligned}
\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+3} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+2}, \mathbf{x}_\nu) = \int\limits_{\mathbf{x}_{\nu+2}} p(\mathbf{x}_{\nu+3} \mid \mathbf{x}_{\nu+2}) \cdot p(\mathbf{y}_{\nu+2} \mid \mathbf{x}_{\nu+2}) \cdot \overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}, \mathbf{x}_\nu) d\mathbf{x}_{\nu+2} = \\
= 2\pi^{(2-2M-3N)/2} \cdot (2 \cdot \det(\mathbf{D}_\xi) \cdot \det(\mathbf{D}_n))^{-1} \cdot \\
\cdot \det(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1/2} \cdot \\
\cdot \det(\mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1})^{-1/2} \cdot \\
\exp\{\frac{1}{2} \cdot [(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2} + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2})^T \cdot \\
\cdot (\mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1})^{-1} \cdot \\
\cdot (\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2} + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2}) - \\
-(\mathbf{x}_{\nu+3}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + \mathbf{S}_{\nu+2} + \mathbf{y}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2} + \mathbf{R}_{\nu+2} - \mathbf{M}_{\nu+2}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2})]\}
\end{aligned}
\tag{58}
$$

Получим ненормированную условную ПВ $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+1+i} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i}, \mathbf{x}_\nu)$ при $i = 2$:

$$
\begin{aligned}
\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+3} \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+2}, \mathbf{x}_\nu) = C_5 \cdot \\
\cdot \exp\{\frac{1}{2} \cdot [(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2} + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2})^T \cdot \\
\cdot (\mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1})^{-1} \cdot \\
\cdot (\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2} + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2}) - \\
-(\mathbf{x}_{\nu+3}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3} + \mathbf{S}_{\nu+2} + \mathbf{y}_{\nu+2}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2} + \mathbf{R}_{\nu+2} - \mathbf{M}_{\nu+2}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2})]\};
\end{aligned}
\tag{59}
$$

$$
\begin{aligned}
&\textit{Где}: C_5 = 2\pi^{(2-2M-3N)/2} \cdot (2 \cdot \det(\mathbf{D}_\xi) \cdot \det(\mathbf{D}_n))^{-1} \cdot \\
&\cdot \det(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1/2} \cdot \det(\mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1})^{-1/2};
\end{aligned}
$$

Обозначим:

$$\begin{gathered}
\mathbf{D}_{\nu+3}=\mathbf{D}_{\nu+2}-\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1};\\
\mathbf{M}_{\nu+3}=\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2};\\
\mathbf{S}_{\nu+3}=\mathbf{S}_{\nu+2}+\mathbf{y}_{\nu+2}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+2};\\
\mathbf{R}_{\nu+3}=\mathbf{R}_{\nu+2}-\mathbf{M}_{\nu+2}{}^{T}(\mathbf{D}_{\nu+2})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+2};
\end{gathered} \tag{60}$$

Подставим уравнения (60) в уравнение (59):

$$\begin{gathered}
\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+3}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+2},\mathbf{x}_{\nu})=C_5\cdot\exp\{\frac{1}{2}\cdot[(\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3}+\mathbf{M}_{\nu+3})^{T}\cdot(\mathbf{D}_{\nu+3})^{-1}\cdot\\
\cdot(\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3}+\mathbf{M}_{\nu+3})-(\mathbf{x}_{\nu+3}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+3}+\mathbf{S}_{\nu+3}+\mathbf{R}_{\nu+3})]\};
\end{gathered} \tag{61}$$

Сравним ненормированную условную ПВ $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+2}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1},\mathbf{x}_{\nu})$ (уравнение (44)) и $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+3}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+2},\mathbf{x}_{\nu})$ (уравнение (61)) и выведем общую формулу для ненормированной условной ПВ $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+1+i}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i},\mathbf{x}_{\nu})$ при $i=\overline{1,(k-\nu-1)}$ с учетом Гауссова распределения, обусловленного шумом наблюдений:

$$\boxed{\begin{gathered}
\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+1+i}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i},\mathbf{x}_{\nu})=C_i\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{x}_{\nu+i+1}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+i+1}+\mathbf{S}_{\nu+i+1}+\mathbf{R}_{\nu+i+1}\right]\right\}\cdot\\
\cdot\exp\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[(\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+i+1}+\mathbf{M}_{\nu+i+1})^{T}\cdot\mathbf{D}_{\nu+i+1}^{-1}\cdot(\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{\nu+i+1}+\mathbf{M}_{\nu+i+1})\right]\right\};\\
C_i=2\pi^{\frac{((i-1)-(i-1)M-iN)}{2}}\cdot(2\cdot\det(\mathbf{D}_{\xi})\cdot\det(\mathbf{D}_{n}))^{-\frac{i-1}{2}}\cdot\prod_{j=2}^{i}\det(\mathbf{D}_{\nu+j})^{-1/2};
\end{gathered}} \tag{62}$$

Составляющие ПВ $\mathbf{D}_{\nu+i+1},\mathbf{M}_{\nu+i+1},\mathbf{S}_{\nu+i+1},\mathbf{R}_{\nu+i+1}$ находится итеративно как:

при $i=1;$	при $i=\overline{2,(k-\nu-1)}$	
$\mathbf{D}_{\nu+i+1}=\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{H}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}+\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F};$ $\mathbf{M}_{\nu+i+1}=\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu};$ $\mathbf{S}_{\nu+i+1}=\mathbf{y}_{\nu+i}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i};$ $\mathbf{R}_{\nu+i+1}=(\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu})^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_{\nu};$	$\mathbf{D}_{\nu+i+1}=\mathbf{D}_{\nu+2}-\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1};$ $\mathbf{M}_{\nu+i+1}=\mathbf{H}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i};$ $\mathbf{S}_{\nu+i+1}=\mathbf{S}_{\nu+i}+\mathbf{y}_{\nu+i}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i};$ $\mathbf{R}_{\nu+i+1}=\mathbf{R}_{\nu+i}-\mathbf{M}_{\nu+i}{}^{T}(\mathbf{D}_{\nu+i-1})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i};$	(63)

Приложение 4

Получение выражения для ненормированной плотности вероятности $\widehat{p}\left(\mathbf{x}_{\nu}\middle|\mathbf{Y}_{\nu+1}^{k}\right)$ с учетом Гауссова распределения, обусловленного шумом наблюдений

Ненормированная условная ПВ $\widehat{p}\left(\boldsymbol{x}_{\nu}\middle|\boldsymbol{Y}_{\nu+1}^{k}\right)$.

Подставим общую формулу для ненормированной условной ПВ $\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+1+i}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i},\mathbf{x}_{\nu})$ при $i=\overline{1,(k-\nu-1)}$ (уравнения (62),(63)) в формулу для ненормированную плотность вероятности $\widehat{p}\left(\mathbf{x}_{\nu}\middle|\mathbf{Y}_{\nu+1}^{k}\right)$ (уравнение (27)):

При $i=k-\nu-1;$

$$\widehat{p}\left(\mathbf{x}_{\nu}\middle|\mathbf{Y}_{\nu+1}^{k}\right)=\int\limits_{\mathbf{x}_{\kappa}} p(\mathbf{y}_{\kappa}\,|\,\mathbf{x}_{\kappa})\cdot\overline{p}(\mathbf{x}_{\nu+1+i}\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1}^{\nu+i},\mathbf{x}_{\nu})d\mathbf{x}_{\kappa}; \tag{64}$$

С учетом Гауссова распределения шума наблюдений:

$$p(\mathbf{y}_{k}\,|\,\mathbf{x}_{k})=\frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_{n})}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot(\mathbf{y}_{k}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{k})^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}(\mathbf{y}_{k}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{k})\right\} \tag{65}$$

Подставим (62),(63) и (65) в уравнение (64):

$$\begin{gathered}\widehat{p}\left(\mathbf{x}_{\nu}\middle|\mathbf{Y}_{\nu+1}^{k}\right)=C_{k}\cdot\int\limits_{\mathbf{x}_{\kappa}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot(\mathbf{y}_{k}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{k})^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}(\mathbf{y}_{k}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{k})\right\}\cdot\\ \cdot\exp\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[(\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{k}+\mathbf{M}_{k})^{T}\cdot\mathbf{D}_{\nu+i}^{-1}\cdot(\mathbf{F}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{k}+\mathbf{M}_{k})\right]\right\}\cdot\\ \cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{x}_{k}^{T}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{x}_{k}+\mathbf{S}_{k}+\mathbf{R}_{k}\right]\right\}d\mathbf{x}_{\kappa};\end{gathered} \tag{66}$$

Раскроем скобки в уравнении (66):

$$\begin{gathered}(\mathbf{y}_{k}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{k})^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}(\mathbf{y}_{k}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{k})=\\ =(\mathbf{y}_{k}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}-(\mathbf{H}\mathbf{x}_{k})^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1})(\mathbf{y}_{k}-\mathbf{H}\mathbf{x}_{k})=\\ =\mathbf{y}_{k}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{k}-\mathbf{y}_{k}^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_{k}-(\mathbf{H}\mathbf{x}_{k})^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{y}_{k}+(\mathbf{H}\mathbf{x}_{k})^{T}\mathbf{D}_{n}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_{k};\end{gathered} \tag{67}$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_k+\mathbf{M}_k)^T\cdot\mathbf{D}_k^{-1}\cdot(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_k+\mathbf{M}_k)=\\
&=(\mathbf{x}_k{}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}+\mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1})\cdot(\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_k+\mathbf{M}_k)=\\
&=\mathbf{x}_k{}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_k+\mathbf{x}_k{}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k+\\
&+\mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_k+\mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k;
\end{aligned}
\tag{68}
$$

Все слагаемые в формулах (67)-(68) содержащие $\mathbf{x}_k$ и не содержащие $\mathbf{x}_k^T$:

$$-\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_k+\mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_k; \tag{69}$$

Все слагаемые в формулах (67)-(68) не содержащие $\mathbf{x}_k$ и содержащие $\mathbf{x}_k^T$:

$$-(\mathbf{H}\mathbf{x}_k)^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k+\mathbf{x}_k{}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k; \tag{70}$$

Все слагаемые в формулах (67)-(68) содержащие $\mathbf{x}_k$ и содержащие $\mathbf{x}_k^T$:

$$(\mathbf{H}\mathbf{x}_k)^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x}_k+\mathbf{x}_k{}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_k+\mathbf{x}_k^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{x}_k; \tag{71}$$

Все слагаемые в формулах (67)-(68) не содержащие $\mathbf{x}_k$ и не содержащие $\mathbf{x}_k^T$:

$$\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k+\mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k+\mathbf{S}_k+\mathbf{R}_k; \tag{72}$$

Подставим уравнения (69)-(72) в уравнение (66):

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_\nu\,|\,\mathbf{Y}_{\nu+1}^k)=C_k\cdot\int_{\mathbf{x}_\kappa}\exp\{&-\mathbf{x}_k^T\frac{1}{2}[\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}-\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}+\mathbf{D}_\xi^{-1}]\mathbf{x}_k+\\
&+[\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k+\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k]^T\mathbf{x}_k-\\
&-\frac{1}{2}[\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k-\mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k+\mathbf{S}_k+\mathbf{R}_k]\}d\mathbf{x}_k;
\end{aligned}
\tag{73}
$$

Далее воспользуемся формулой (39). Выразим слагаемые под экспонентой из левой части формулы (39)в соответствии с формулой (73):

$$
\begin{aligned}
&-\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=-\mathbf{x}_k^T\frac{1}{2}[\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}-\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}+\mathbf{D}_\xi^{-1}]\mathbf{x}_k;\\
&\mathbf{b}^T\mathbf{x}=[\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k+\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k]^T\mathbf{x}_k;\\
&\mathbf{c}=-\frac{1}{2}[\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k-\mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k+\mathbf{S}_k+\mathbf{R}_k];
\end{aligned}
\tag{74}
$$

Воспользуемся левой частью формулы (39)и подставим в уравнение (73):

$$p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_{\nu+1}^k) = C_6 \cdot \exp\{\frac{1}{2}[(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k)^T \cdot$$
$$\cdot(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1})^{-1} \cdot (\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k) -$$
$$-(\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k - \mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k + \mathbf{S}_k + \mathbf{R}_k)]\}; \quad (75)$$

Где: $C_6 = C_k \cdot \det(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1})^{-\frac{1}{2}}$;

Получим выражение для ненормированной плотности вероятности $\widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_{\nu+1}^k\right)$с учетом Гауссова распределения, обусловленного шумом наблюдений:

$$\widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_{\nu+1}^k\right) = C_6 \cdot \exp\{\frac{1}{2}[(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k)^T \cdot$$
$$\cdot(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1})^{-1} \cdot (\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k) -$$
$$-(\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k - \mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k + \mathbf{S}_k + \mathbf{R}_k)]\}; \quad (76)$$
$$C_6 = C_k \cdot \det(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1})^{-\frac{1}{2}};$$

Составляющие ПВ $\mathbf{D}_{\nu+i+1}, \mathbf{M}_{\nu+i+1}, \mathbf{S}_{\nu+i+1}, \mathbf{R}_{\nu+i+1}$ находится итеративно как:

при $i = 1$;	при $i = \overline{2,(k-\nu-1)}$
$\mathbf{D}_{\nu+i+1} = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}$; $\mathbf{M}_{\nu+i+1} = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i} + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu$; $\mathbf{S}_{\nu+i+1} = \mathbf{y}_{\nu+i}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i}$; $\mathbf{R}_{\nu+i+1} = (\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu)^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu$;	$\mathbf{D}_{\nu+i+1} = \mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}$; $\mathbf{M}_{\nu+i+1} = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i} + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i}$; $\mathbf{S}_{\nu+i+1} = \mathbf{S}_{\nu+i} + \mathbf{y}_{\nu+i}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i}$; $\mathbf{R}_{\nu+i+1} = \mathbf{R}_{\nu+i} - \mathbf{M}_{\nu+i}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+i-1})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i}$;

(77)

Приложение 5

Нахождение итогового алгоритма оценки $\hat{\mathbf{x}}_{\text{int},\nu}$

Интерполяционная оценка $\hat{\mathbf{x}}_{\text{int},\nu}$ и ее дисперсия $\mathbf{D}_{\text{int},\nu}$.

Представим АПВ $p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_0^k)$ с учетом Гауссова распределения шума наблюдений:

$$
\begin{gathered}
p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_0^k) = \frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_{\text{int},\nu})}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot(\mathbf{x}_\nu - \hat{\mathbf{x}}_{\text{int},\nu})^T \mathbf{D}_{\text{int},\nu}^{-1}(\mathbf{x}_\nu - \hat{\mathbf{x}}_{\text{int},\nu})\right\} = \\
= \frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_{\text{int},\nu})}} \cdot \\
\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{x}_\nu^T \mathbf{D}_{\text{int},\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_\nu^T \mathbf{D}_{\text{int},\nu}^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{\text{int},\nu} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{int},\nu}^T \mathbf{D}_{\text{int},\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu + \hat{\mathbf{x}}_{\text{int},\nu}^T \mathbf{D}_{\text{int},\nu}^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{\text{int},\nu}\right]\right\} = \\
= \frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_{\text{int},\nu})}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{x}_\nu^T \mathbf{D}_{\text{int},\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu - 2\hat{\mathbf{x}}_{\text{int},\nu}^T \mathbf{D}_{\text{int},\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu + \hat{\mathbf{x}}_{\text{int},\nu}^T \mathbf{D}_{\text{int},\nu}^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{\text{int},\nu}\right]\right\};
\end{gathered}
\tag{78}
$$

Где: $\hat{\mathbf{x}}_{\text{int},\nu}$ - интерполяционной оценка, $\mathbf{D}_{\text{int},\nu}$- дисперсия интерполяционной оценки.

Пусть:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{P} = \mathbf{D}_{\text{int},\nu}^{-1}; \\
\mathbf{q}^T = \hat{\mathbf{x}}_{\text{int},\nu}\mathbf{D}_{\text{int},\nu}^{-1}; \\
c = \hat{\mathbf{x}}_{\text{int},\nu}^T \mathbf{D}_{\text{int},\nu}^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{\text{int},\nu} + \ln\left(\frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_{\text{int},\nu})}}\right);
\end{gathered}
\tag{79}
$$

Алгоритм для нахождения АПВ $p\left(\boldsymbol{x}_\nu \middle| \boldsymbol{Y}_1^k\right)$:

$$
\boxed{p\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) = c_1 \cdot \hat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_0^\nu\right)\cdot \hat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_{\nu+1}^k\right)}
\tag{80}
$$

Тогда согласно уравнениям (78)-(80):

$$p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_0^k) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot \mathbf{x}_\nu^T \mathbf{P}\mathbf{x}_\nu + \mathbf{q}^T\mathbf{x}_\nu + c\right\} = c_1 \cdot \widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_0^\nu\right)\cdot \widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_{\nu+1}^k\right); \tag{81}$$

Подставим уравнение (76)-(77) в уравнение (81):

$$\begin{gathered} p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_0^k) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot \mathbf{x}_\nu^T \mathbf{P}\mathbf{x}_\nu + \mathbf{q}^T\mathbf{x}_\nu + c\right\} = C_7 \cdot \widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_0^\nu\right)\cdot \\ \cdot\exp\{\frac{1}{2}[(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k)^T \cdot \\ \cdot(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1})^{-1}\cdot(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k) - \\ -(\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k - \mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k + \mathbf{S}_k + \mathbf{R}_k)]\}; \end{gathered} \tag{82}$$

Запишем выражения для ПВ $\widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_1^\nu\right)$ с учётом гауссовости шума наблюдений и формирующего шума:

$$\begin{gathered} p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_1^\nu) = \frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_{flt,\nu})}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot(\mathbf{x}_\nu - \hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu})^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}(\mathbf{x}_\nu - \hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu})\right\} = \\ = \frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_{flt,\nu})}}\cdot \\ \cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_\nu^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu} - \hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu + \hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}\right]\right\} = \\ = \frac{1}{2\pi^{M/2}\sqrt{\det(\mathbf{D}_{flt,\nu})}}\cdot \\ \cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu - 2\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu + \hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}\right]\right\}; \end{gathered} \tag{83}$$

Где: $\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}$ - фильтрационная оценка, $\mathbf{D}_{flt,\nu}$ - дисперсия фильтрационной оценки.

Найдем $\mathbf{P}$,$\mathbf{q}^T$.

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_0^k) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot \mathbf{x}_\nu^T \mathbf{P}\mathbf{x}_\nu + \mathbf{q}^T\mathbf{x}_\nu + c\right\} = c_1 \cdot \iint p(\mathbf{X}_0^k \mid \mathbf{Y}_0^k)\, d\mathbf{X}_0^{\nu-1} d\mathbf{X}_{\nu+1}^k = \\
&= C_7 \cdot p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_0^\nu)\cdot \\
&\cdot \exp\{\frac{1}{2}[(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k)^T \cdot \\
&\cdot(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1})^{-1}\cdot(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k) - \\
&-(\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k - \mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k + \mathbf{S}_k + \mathbf{R}_k)]\};
\end{aligned}
\tag{84}
$$

Где:

при $i=1$;	при $i=\overline{2,(k-\nu-1)}$
$\mathbf{D}_{\nu+i+1} = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}$; $\mathbf{M}_{\nu+i+1} = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i} + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu$; $\mathbf{S}_{\nu+i+1} = \mathbf{y}_{\nu+i}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i}$; $\mathbf{R}_{\nu+i+1} = (\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu)^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu$;	$\mathbf{D}_{\nu+i+1} = \mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}$; $\mathbf{M}_{\nu+i+1} = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i} + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i}$; $\mathbf{S}_{\nu+i+1} = \mathbf{S}_{\nu+i} + \mathbf{y}_{\nu+i}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i}$; $\mathbf{R}_{\nu+i+1} = \mathbf{R}_{\nu+i} - \mathbf{M}_{\nu+i}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+i-1})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i}$;

Представим $\widehat{p}\left(\mathbf{x}_\nu \middle| \mathbf{Y}_1^\nu\right)$ (уравнение (83)):

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_\nu \mid \mathbf{Y}_0^k) &= C_8 \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu - 2\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu + \hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}\right]\right\}\cdot \\
&\cdot \exp\{\frac{1}{2}[(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k)^T \cdot \\
&\cdot(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1})^{-1}\cdot(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k) - \\
&-(\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k - \mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k + \mathbf{S}_k + \mathbf{R}_k)]\};
\end{aligned}
\tag{85}
$$

Видно, что $\mathbf{x}_\nu$ содержится в $\mathbf{R}_{\nu+i+1}$ и в $\mathbf{M}_{\nu+i+1}$,

Запишем $\mathbf{M}_{\nu+i+1}$ следующим образом:

$$
\mathbf{M}_{\nu+i+1} = \mathbf{M}_{\nu+i+1}^1\mathbf{x}_\nu + \mathbf{M}_{\nu+i+1}^2;
$$

при $i=1$;	при $i=\overline{2,(k-\nu-1)}$
$\mathbf{M}_{\nu+i+1}^1 = \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}$; $\mathbf{M}_{\nu+i+1}^2 = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i}$;	$\mathbf{M}_{\nu+i+1}^1 = \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i}^1$; $\mathbf{M}_{\nu+i+1}^2 = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i} + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i}^2$;

(86)

Запишем $\mathbf{R}_{\nu+i+1}$ следующим образом:

$$\mathbf{R}_{\nu+i+1} = (\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu)^T \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu - \sum_{j=2}^{i}(\mathbf{M}_{\nu+j}{}^T(\mathbf{D}_{\nu+j})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+j}) =$$

$$= (\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu)^T \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x}_\nu - \sum_{j=2}^{i}((\mathbf{M}^1_{\nu+j}\mathbf{x}_\nu + \mathbf{M}^2_{\nu+j})^T(\mathbf{D}_{\nu+j})^{-1}(\mathbf{M}^1_{\nu+j}\mathbf{x}_\nu + \mathbf{M}^2_{\nu+j})) =$$

$$= \mathbf{x}_\nu^T\left[\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F} - \sum_{j=2}^{i}\left(\mathbf{M}^1_{\nu+j}\right)^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}_{\nu+j})^{-1}\mathbf{M}^1_{\nu+j}\right]\mathbf{x}_\nu -$$

$$-2\left[\sum_{j=2}^{i}\left(\left(\mathbf{M}^1_{\nu+j}\right)^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}_{\nu+j})^{-1}\mathbf{M}^2_{\nu+j}\right)^T\right]\mathbf{x}_\nu -$$

$$-\sum_{j=2}^{i}\left(\mathbf{M}^2_{\nu+j}\right)^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}_{\nu+j})^{-1}\mathbf{M}^2_{\nu+j}$$

$$= \mathbf{x}_\nu^T\mathbf{R}^1_{\nu+i+1}\mathbf{x}_\nu - 2\left(\mathbf{R}^2_{\nu+i+1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_\nu - \mathbf{R}^3_{\nu+i+1};$$

$$\mathbf{R}^1_{\nu+i+1} = \left[\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F} - \sum_{j=2}^{i}\left(\mathbf{M}^1_{\nu+j}\right)^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}_{\nu+j})^{-1}\mathbf{M}^1_{\nu+j}\right]; \tag{87}$$

$$\mathbf{R}^2_{\nu+i+1} = \sum_{j=2}^{i}\left(\mathbf{M}^1_{\nu+j}\right)^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}_{\nu+j})^{-1}\mathbf{M}^2_{\nu+j};$$

$$\mathbf{R}^3_{\nu+i+1} = \sum_{j=2}^{i}\left(\mathbf{M}^2_{\nu+j}\right)^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}_{\nu+j})^{-1}\mathbf{M}^2_{\nu+j};$$

при $i = 1;$	при $i = \overline{2,(k-\nu-1)}$
$\mathbf{R}^1_{\nu+i+1} = \mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F};$ $\mathbf{R}^2_{\nu+i+1} = 0;$ $\mathbf{R}^3_{\nu+i+1} = 0;$	$\mathbf{R}^1_{\nu+i+1} = \mathbf{R}^1_{\nu+i} - \left(\mathbf{M}^1_{\nu+i}\right)^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{M}^1_{\nu+i};$ $\mathbf{R}^2_{\nu+i+1} = \mathbf{R}^2_{\nu+i} + \left(\mathbf{M}^1_{\nu+i}\right)^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{M}^2_{\nu+i};$ $\mathbf{R}^3_{\nu+i+1} = \mathbf{R}^3_{\nu+i} + \left(\mathbf{M}^2_{\nu+i}\right)^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{M}^2_{\nu+i};$

Теперь выразим явно $\mathbf{x}_\nu$ под экспонентой:

$$(\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k)^T =$$

$$= (\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}^2_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}^1_k\mathbf{x}_\nu)^T = \tag{88}$$

$$= (\mathbf{U} + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}^1_k\mathbf{x}_\nu)^T;$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{U}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu)^T(\mathbf{W})^{-1}(\mathbf{U}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu)=\\
&=\mathbf{U}^T(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}+\mathbf{U}^T(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu+\\
&+\mathbf{x}_\nu^T(\mathbf{M}_k^1)^T((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}+\\
&+\mathbf{x}_\nu^T(\mathbf{M}_k^1)^T((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu;
\end{aligned}
\qquad (89)
$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k-\mathbf{M}_k^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k+\mathbf{S}_k+\mathbf{R}_k)=\\
&=(\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k-(\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu+\mathbf{M}_k^2)^T\mathbf{D}_k^{-1}(\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu+\mathbf{M}_k^2)+\\
&+\mathbf{S}_k+\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{R}_{\nu+i}^1\mathbf{x}_\nu-2(\mathbf{R}_{\nu+i}^2)^T\mathbf{x}_\nu-\mathbf{R}_{\nu+i}^3)=\\
&=(\mathbf{y}_k^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k-(\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu-(\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^2-(\mathbf{M}_k^2)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu-\\
&-(\mathbf{M}_k^2)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^2+\mathbf{S}_k+\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{R}_{\nu+i}^1\mathbf{x}_\nu-2(\mathbf{R}_{\nu+i}^2)^T\mathbf{x}_\nu-\mathbf{R}_{\nu+i}^3)=\\
&=(\mathbf{Z}-\mathbf{x}_\nu^T(\mathbf{M}_k^1)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu-(\mathbf{x}_\nu\mathbf{M}_k^1)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^2-\\
&-(\mathbf{M}_k^2)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu+\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{R}_k^1\mathbf{x}_\nu-2(\mathbf{R}_k^2)^T\mathbf{x}_\nu);
\end{aligned}
\qquad (90)
$$

$$
\mathbf{W}=\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}-\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1}+\mathbf{D}_{\xi}^{-1}; \qquad (91)
$$

Подставим все это в (84) и приведем к виду слева:

$$
\begin{aligned}
&\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{P}\mathbf{x}_\nu+\mathbf{q}^T\mathbf{x}_\nu+c\right\}=\\
&=C_8\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu-2\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\mathbf{x}_\nu+\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}\right]\right\}\cdot\\
&\cdot\exp\{\frac{1}{2}[\mathbf{U}^T(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}+\mathbf{U}^T(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu+\\
&+\mathbf{x}_\nu^T(\mathbf{M}_k^1)^T((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}+\\
&+\mathbf{x}_\nu^T(\mathbf{M}_k^1)^T((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_{\xi}^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{D}_{\xi}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu-\\
&-\mathbf{Z}+\mathbf{x}_\nu^T(\mathbf{M}_k^1)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu+(\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^2+\\
&+(\mathbf{M}_k^2)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1\mathbf{x}_\nu-\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{R}_k^1\mathbf{x}_\nu+2(\mathbf{R}_k^2)^T\mathbf{x}_\nu)]\};
\end{aligned}
\qquad (92)
$$

$$=$$

$$\exp\{-\frac{1}{2}\cdot \mathbf{x}_\nu^T(\mathbf{R}_k^1+\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}-(\mathbf{M}_k^1)^T((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1-$$

$$-(\mathbf{M}_k^1)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1)\mathbf{x}_\nu+$$

$$+((\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1})^T\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}+(\mathbf{M}_k^1)^T((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}+\mathbf{R}_k^2+(\mathbf{M}_k^1)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^2)^T\mathbf{x}_\nu$$

$$+\frac{1}{2}(\mathbf{U}^T(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}-\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}-\mathbf{Z})+\ln(C_8)\};$$

Тогда:

$$\mathbf{P}=\mathbf{R}_k^1+\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}-(\mathbf{M}_k^1)^T((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1-(\mathbf{M}_k^1)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1;$$
$$\mathbf{q}^T=((\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1})^T\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}+(\mathbf{M}_k^1)^T((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}+\mathbf{R}_k^2+(\mathbf{M}_k^1)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^2)^T; \quad (93)$$
$$c=\frac{1}{2}(\mathbf{U}^T(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}-\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}-\mathbf{Z})+\ln(C_8);$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\mathbf{x}_\nu^T\mathbf{P}\mathbf{x}_\nu+\mathbf{q}^T\mathbf{x}_\nu+c\right\}$$

$$=$$

$$\exp\{-\frac{1}{2}\cdot \mathbf{x}_\nu^T(\mathbf{R}_k^1+\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}-(\mathbf{M}_k^1)^T((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1- \quad (94)$$

$$-(\mathbf{M}_k^1)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1)\mathbf{x}_\nu+$$

$$+((\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1})^T\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}+(\mathbf{M}_k^1)^T((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}+\mathbf{R}_k^2+(\mathbf{M}_k^1)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^2)^T\mathbf{x}_\nu$$

$$+\frac{1}{2}(\mathbf{U}^T(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}-\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}-Z)+\ln(C_8)\};$$

$$\mathbf{P}=\mathbf{R}_k^1+\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}-(\mathbf{M}_k^1)^T((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{M}_k^1-(\mathbf{M}_k^1)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^1;$$
$$\mathbf{q}^T=((\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1})^T\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}+(\mathbf{M}_k^1)^T((\mathbf{D}_k)^{-1})^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}+\mathbf{R}_k^2+(\mathbf{M}_k^1)^T\mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{M}_k^2)^T; \quad (95)$$
$$c=\frac{1}{2}(\mathbf{U}^T(\mathbf{W})^{-1}\mathbf{U}-\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}-Z)+\ln(C_8);$$

Оптимизируем, с точки зрения количества матричных обращений и получим:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_k^1 + \mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1} - (\mathbf{M}_k^1)^T(\mathbf{D}_k)^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{W}\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k\mathbf{M}_k^1 - (\mathbf{M}_k^1)^T\mathbf{D}_k\mathbf{M}_k^1;$$

$$\mathbf{q}^T = ((\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1})^T\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu} + (\mathbf{M}_k^1)^T(\mathbf{D}_k)^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{W}\mathbf{U} + \mathbf{R}_k^2 + (\mathbf{M}_k^1)^T\mathbf{D}_k\mathbf{M}_k^2)^T;$$

$$c = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^T\mathbf{W}\mathbf{U} - \hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu}^T\mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu} - Z) + \ln(C_8);$$

Где: (96)

$$\mathbf{U} = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k\mathbf{M}_k^2;$$

$$\mathbf{W} = (\mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1})^{-1};$$

Составляющие $\mathbf{D}_{\nu+i+1}$, $\mathbf{M}_{\nu+i+1}^1$, $\mathbf{M}_{\nu+i+1}^2$, $\mathbf{R}_{\nu+i+1}^1$, $\mathbf{R}_{\nu+i+1}^2$ находятся итеративно:

при $i = 1;$	при $i = \overline{2,(k-\nu-1)}$
$\mathbf{D}_{\nu+i+1} = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F};$ $\mathbf{M}_{\nu+i+1}^1 = \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F};$ $\mathbf{M}_{\nu+i+1}^2 = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i};$ $\mathbf{R}_{\nu+i+1}^1 = \mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F};$ $\mathbf{R}_{\nu+i+1}^2 = 0;$	$\mathbf{D}_{\nu+i+1} = \mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1};$ $\mathbf{M}_{\nu+i+1}^1 = \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i}^1;$ $\mathbf{M}_{\nu+i+1}^2 = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i} + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i}^2;$ $\mathbf{R}_{\nu+i+1}^1 = \mathbf{R}_{\nu+i}^1 - \left(\mathbf{M}_{\nu+i}^1\right)^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i}^1;$ $\mathbf{R}_{\nu+i+1}^2 = \mathbf{R}_{\nu+i}^2 + \left(\mathbf{M}_{\nu+i}^1\right)^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i}^2;$

(97)

Теперь перейдем к нахождению интерполяционной оценки $\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{int},\nu}$ и дисперсии интерполяционной оценки $\mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu}$.

Т.к. $\mathbf{P} = \mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu}^{-1}$, следовательно: $\mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu} = \mathbf{P}^{-1}$:

Т.к. $\mathbf{q}^T = \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{int},\nu}^T\mathbf{D}_{\mathrm{int},\nu}^{-1}$, следовательно: $\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{int},\nu} = \mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{q};$

Тогда итоговый алгоритм нахождения оценки $\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{int},\nu}$:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{int},\nu} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{q};$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_k^1 + \mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1} - \left(\mathbf{M}_k^1\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_k\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{W}\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k\mathbf{M}_k^1 - \left(\mathbf{M}_k^1\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_k\mathbf{M}_k^1; \quad (98)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}_{flt,\nu}^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu} + \left(\mathbf{M}_k^1\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_k\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{W}\mathbf{U} + \mathbf{R}_k^2 + \left(\mathbf{M}_k^1\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_k\mathbf{M}_k^2;$$

где:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{U} = \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_k + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k\mathbf{M}_k^2;\\
&\mathbf{W} = (\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}\mathbf{D}_k\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{D}_\xi^{-1})^{-1};\\
&\overline{\mathbf{D}}_{flt,\nu} = \mathbf{F}\mathbf{D}_{flt,\nu-1}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{D}_\xi,\\
&\overline{\mathbf{x}}_{flt,\nu} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu-1},\\
&\mathbf{D}_{flt,\nu} = \left(\overline{\mathbf{D}}_{flt,\nu}^{-1} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1},\\
&\hat{\mathbf{x}}_{flt,\nu} = \overline{\mathbf{x}}_{flt,\nu} + \mathbf{D}_{flt,\nu}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_n^{-1}(y_\nu - \mathbf{H}\overline{\mathbf{x}}_{flt,\nu}).
\end{aligned}
$$

Составляющие $\boldsymbol{D}_k$, $\boldsymbol{M}_k^1$, $\boldsymbol{M}_k^2$, $\boldsymbol{R}_k^1$ и $\boldsymbol{R}_k^2$ находятся итеративно:

при $i = 1$;	при $i = \overline{2,(k-\nu-1)}$
$\mathbf{D}_{\nu+i+1} = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}$; $\mathbf{M}_{\nu+i+1}^1 = \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}$; $\mathbf{M}_{\nu+i+1}^2 = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i}$; $\mathbf{R}_{\nu+i+1}^1 = \mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}$; $\mathbf{R}_{\nu+i+1}^2 = 0$;	$\mathbf{D}_{\nu+i+1} = \mathbf{D}_{\nu+2} - \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{D}_\xi^{-1}$; $\mathbf{M}_{\nu+i+1}^1 = \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i}^1$; $\mathbf{M}_{\nu+i+1}^2 = \mathbf{H}^T\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{y}_{\nu+i} + \mathbf{D}_\xi^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i}^2$; $\mathbf{R}_{\nu+i+1}^1 = \mathbf{R}_{\nu+i}^1 - \left(\mathbf{M}_{\nu+i}^1\right)^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i}^1$; $\mathbf{R}_{\nu+i+1}^2 = \mathbf{R}_{\nu+i}^2 + \left(\mathbf{M}_{\nu+i}^1\right)^{\mathrm{T}}(\mathbf{D}_{\nu+i})^{-1}\mathbf{M}_{\nu+i}^2$;

(99)