

# Лекция 7. Основы теории фильтрации случайных процессов

## Фильтрация, интерполяция, экстраполяция

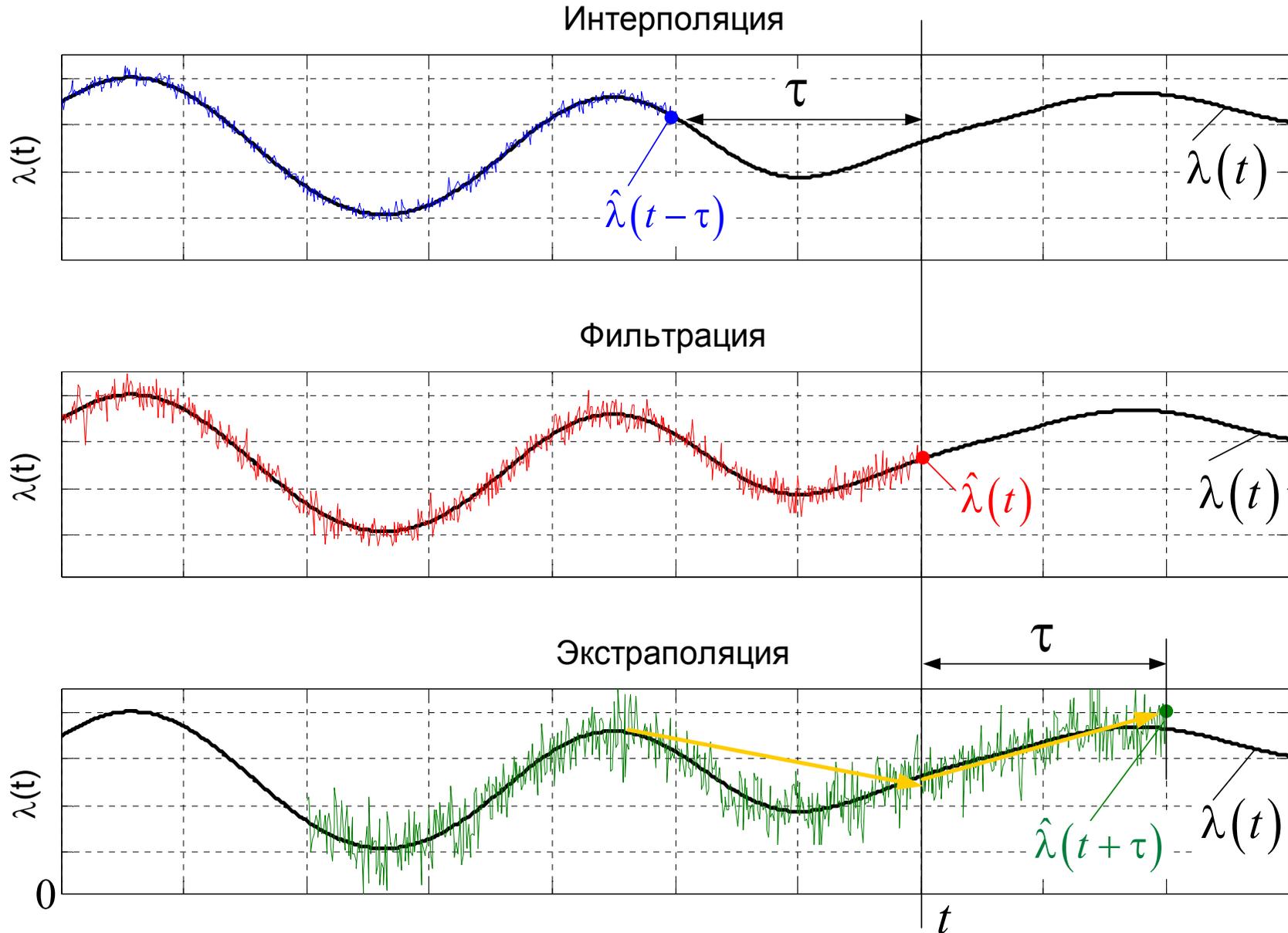
Задача фильтрации: используя наблюдения  $y(t)$  и апр. инф. требуется сформировать оценку  $\hat{\lambda}(t)$  для текущего момента времени  $t$ .

Задача интерполяции: требуется сформировать оценку  $\hat{\lambda}(t - \tau)$  для момента времени в прошлом.

Задача экстраполяции: требуется предсказать оценку  $\hat{\lambda}(t + \tau)$  для момента времени в будущем.

Критерий – минимальная дисперсия ошибки.

# Фильтрация, экстраполяция, интерполяция



# Постановка задачи оптимальной фильтрации

Требуется дать оценку процесса  $\lambda$  не для какого-то одного, а для каждого интересующего момента времени по критерию минимума дисперсии ошибки.

Модель наблюдений:

$y(t_k) = S(t_k, \lambda_k(t_k)) + n(t_k)$ : наблюдения на интервале  $[0, t_k]$   
 $S(t_k, \lambda(t_k))$  – сигнал, несущий информационный процесс  $\lambda(t_k)$   
 $n(t_k)$  - белый шум с односторонней СПМ  $N_0 = 2\sigma_n^2 T$   
+ известна априорная информация о  $\lambda(t_k)$

# Априорная информация о процессе $\lambda_k(t_k)$

В теории оптимальной фильтрации сообщение  $\lambda_k(t_k)$  представляют как часть многомерного марковского процесса:

$$\lambda_k(t_k) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t_k), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad k - \text{момент времени}$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, t_{k-1}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1}, t_{k-1})\xi_{k-1}$$

$\xi_k$  –  $m$ -мерный вектор белых шумов

с корреляционной матрицей  $\mathbf{R}_\xi$

В каждый момент времени  $\mathbf{x}_k$  является векторной с.в. и описывается априорной ПВ  $p(\mathbf{x}_k, t_k)$

# Рекуррентное уравнение для АПВ дискретных процессов

Из теории статистических решений оценка  $\mathbf{x}$  формируется на основе АПВ  $\mathbf{x}$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \int_{\mathbf{x}} \mathbf{x} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) d\mathbf{x} \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{x}}_k = \arg \max p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k)$$

Поэтому надо искать апостериорную плотность вероятности (АПВ)  $\mathbf{x}$  на текущий момент времени  $k$ :  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k)$

Рассмотрим совместную условную ПВ  $p(\mathbf{x}_k, y_k | \mathbf{Y}_0^{k-1})$

$$p(\mathbf{x}_k, y_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) p(y_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) = p(y_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_0^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1})$$

# Рекуррентное уравнение для АПВ дискретных процессов

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) p(y_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) = p(y_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_0^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1})$$

$\mathbf{Y}_0^k = y_0, y_1, \dots, y_k$  - выборка

$p(y_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) = p(y_k) = 1/c$  - не зависит от  $\mathbf{x}$ ;

$p(y_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_0^{k-1}) = p(y_k | \mathbf{x}_k)$  - одношаговая функция правдоподобия;

отсюда:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) = c p(y_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1})$$

При белом гауссовском шуме наблюдений

$$p(y_k | \mathbf{x}_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{(y_k - S(\mathbf{x}_k, t_k))^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

# Плотность вероятности экстраполированной оценки

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) = ???$$

$$p(a) = \int_b p(a, b) db; \quad p(a | c) = \int_b p(a, b | c) db = \int_b p(a | b, c) p(b | c) db;$$

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_0^{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_0^{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$  так как никакие наблюдения процесса  $\mathbf{x}$  до  $(k-1)$ -го момента времени не дадут больше информации, чем само значение  $\mathbf{x}_{k-1}$

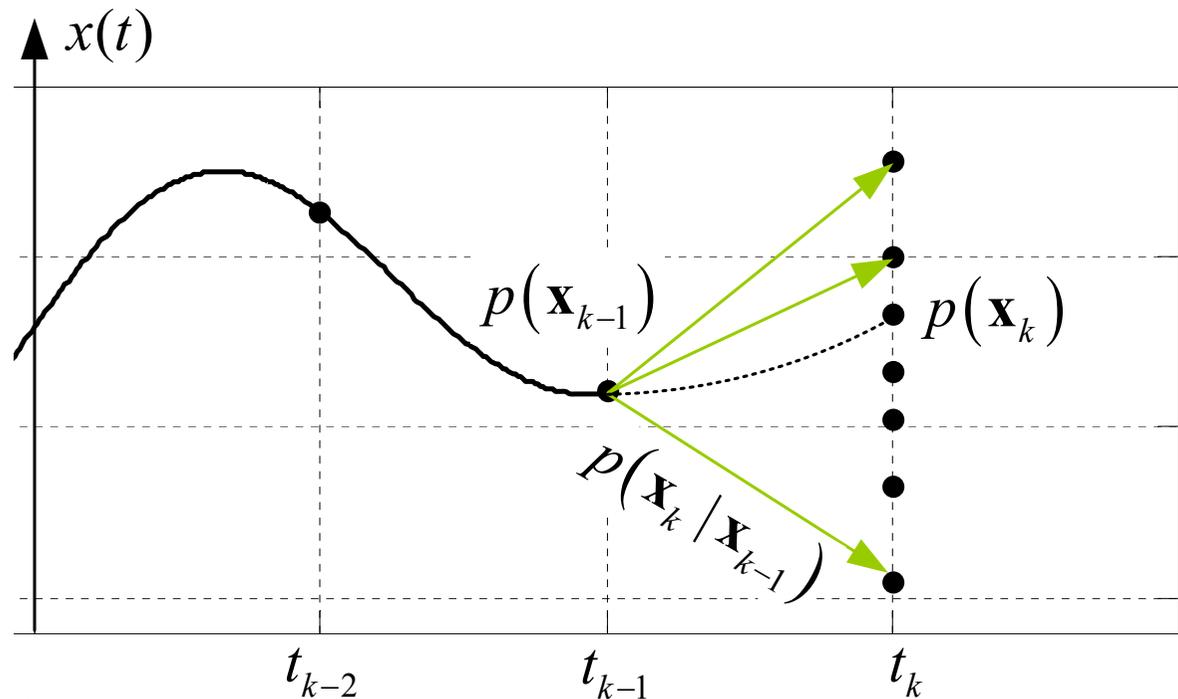
Отсюда:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

# Плотность вероятности перехода марковского процесса

$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$  - плотность вероятности перехода

Пример  
нахождения ПВ  
перехода для  
скалярного  $x$ :



$$x_k = f(x_{k-1}, t_{k-1}) + g(x_{k-1}, t_{k-1})\xi_{k-1},$$

$\xi_{k-1}$  - дискретный БГШ с дисперсией  $\sigma_\xi^2$

$$p(x_k | x_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_k - f(x_{k-1}, t_{k-1}))^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma^2 = \sigma_\xi^2 g^2(x_{k-1}, t_{k-1})$$

# Рекуррентное уравнение для АПВ дискретных процессов

Находим ПВ экстраполированной оценки через ПВ перехода:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_0^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

Отсюда

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) = cp(y_k | \mathbf{x}_k) \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad p(\mathbf{x}_0 | \mathbf{Y}_0^0) = p_{ap}(\mathbf{x}_0)$$

- уравнение Стратоновича для дискретных МП

Нормировочная константа

Одношаговая функция правдоподобия

АПВ на предыдущем шаге

ПВ перехода

# Уравнение Стратоновича для АПВ непрерывных МП

Описание непрерывного МП:

$$\lambda(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\xi(t)$$

$\xi(t)$  –  $m$ -мерный вектор БГШ с корреляционной матрицей  $\mathbf{R}_\xi(\tau) = (\mathbf{S}_\xi/2)\delta(\tau)$

$$\frac{dp(\mathbf{x}, t | \mathbf{Y}_0^t)}{dt} = L(p(\mathbf{x}, t | \mathbf{Y}_0^t)) + \left[ F(\mathbf{x}, t) - \int_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{Y}_0^t) d\mathbf{x} \right] p(\mathbf{x}, t | \mathbf{Y}_0^t)$$

$$F(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}^T(\mathbf{c}\mathbf{x}, t) 2\mathbf{N}_n^{-1}(\mathbf{y}(t) - 0,5\mathbf{S}(\mathbf{c}\mathbf{x}, t)); \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{c}\mathbf{x}, t) + \mathbf{n}(t);$$

$\mathbf{N}_n$  - корреляционная матрица шумов наблюдений:  $M[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^T(t+\tau)] = (\mathbf{N}_n/2)\delta(\tau)$

$L(*)$  - дифференциальный оператор Фоккера-Планка-Колмогорова (стр. 47)

# АПВ дискретных процессов с учетом неинформ. параметров

Наблюдаемый сигнал:

$$y_k = S_k(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}) + n_k, \quad M[n_k n_m] = \sigma_n^2 \delta_{km}, \quad \boldsymbol{\mu} = \text{const} \subset p_{ap}(\boldsymbol{\mu})$$

Основная идея: 
$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) = \int_{\boldsymbol{\mu}} p(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu} | \mathbf{Y}_0^k) d\boldsymbol{\mu}$$

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) = c_1 p_{ap}(\mathbf{x}_k) \int_{\boldsymbol{\mu}} p(\mathbf{Y}_0^k | \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}) p_{ap}(\boldsymbol{\mu}) d\boldsymbol{\mu}, \quad p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1}) = c_2 p_{ap}(\mathbf{x}_k) \int_{\boldsymbol{\mu}} p(\mathbf{Y}_0^{k-1} | \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}) p_{ap}(\boldsymbol{\mu}) d\boldsymbol{\mu}$$

сумасшедшая тавтология: 
$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) = \left( \frac{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k)}{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1})} \right) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^{k-1})$$

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) = c \tilde{p}(y_k | \mathbf{x}_k) \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_0^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad \text{где}$$

$$\tilde{p}(y_k | \mathbf{x}_k) = \int_{\boldsymbol{\mu}} p(\mathbf{Y}_0^k | \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}) p_{ap}(\boldsymbol{\mu}) d\boldsymbol{\mu} / \int_{\boldsymbol{\mu}} p(\mathbf{Y}_0^{k-1} | \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}) p_{ap}(\boldsymbol{\mu}) d\boldsymbol{\mu}, \quad p(\mathbf{x}_0 | \mathbf{Y}_0^0) = p_{ap}(\mathbf{x}_0)$$